

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

4.0 引言：(introduction)

- 本章采用与上一章相同的方法研究离散时间信号与系统的傅立叶分析。可以看到，离散时间的频域分析与连续时间的频域分析既有许多相似的地方，也存在一些重要区别。
- 抓住它们之间的相似之处与掌握其差别，对于掌握和加深对频域分析方法的理理解具有重要意义。

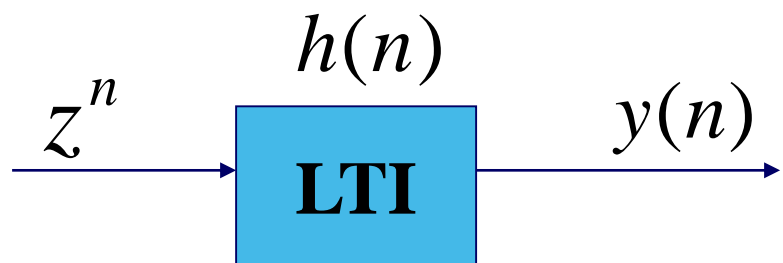
基本思路与内容：

- 复指数函数 z^n 是一切离散LTI系统的特征函数。
- 以此为基础建立离散时间周期信号与非周期信号的频域表示。
- DTFT的性质——信号时域特性与频域特性的关系。
- 离散LTI系统的频域分析。
- 离散傅立叶变换（DFT）及其快速算法（FFT）

基本内容:

1. 离散时间LTI系统的特征函数;
2. 离散时间信号的频域分解;
3. 离散时间傅立叶变换;
4. 系统的频率响应与频域分析;

4.1 离散时间LTI系统的特征函数 (The Eigenfunctions of Discrete-Time LTI Systems)



z^n —— 系统的特征函数

$H(z)$ —— 系统与特征函数
相对应的特征值

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$$

由时域分析法:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{n-k} \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k} \\ &= z^n H(z) \end{aligned}$$

这表明： z^n 是一切离散时间LTI系统的特征函数。

• 如果 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z_k^n$ 则 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(z_k) z_k^n$

其中 z 是一个复数， $z = re^{j\omega}$ 。

• 当 $r = 1$ 时， $z = e^{j\omega}$ ，

显然 $e^{j\omega n}$ 也是离散时间LTI系统的特征函数。

• 以 $e^{j\omega n}$ 为基本信号单元，将信号 $x(n)$ 表示为 $e^{j\omega n}$ 的线性组合即为**信号的频域分解**。

4.2 周期信号与离散时间傅立叶级数 (Periodic Signals & Discrete-time Fourier Series)

成谐波关系的复指数信号集 $\phi_k(n) = \left\{ e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \right\}$

N 为基波周期, $\phi_k(n)$ 中只有 N 个是独立的。

• 将其中所有独立的复指数信号线性组合起来, 表示信号时只需要 N 项。

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{A}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

显然, $x(n)$ 是以 N 为周期的。这表明可以用 N 个谐波分量来表示周期序列, 这种表示就是DFS。

一. DFS:

• 若 $x(n)$ 以 N 为周期, 则 $x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

称为 $x(n)$ 的离散时间傅立叶级数。

1. 级数中只有 N 个独立的成谐波关系的复指数分量。
2. k 只需取相继的 N 个整数, 如: $k=0,1,\dots,N-1$,等等。

若 $x(n)$ 为实序列, 对 \dot{A}_k 可推得:

实部偶对称, 虚部奇对称;

模偶对称, 相位奇对称。

\dot{A}_k 也称为DFS的系数或频谱系数。

二. DFS的系数:

由 $x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$, 得

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

对 n 求和: $\sum_{n=\langle N \rangle} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$

$$= \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$\therefore \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \begin{cases} N & k = r \\ 0 & k \neq r \end{cases}$$

$$\therefore \dot{A}_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

↔ DFS

很显然： $\dot{A}_k = \dot{A}_{k+rN}$ $0 \sim N-1$ 的周期称为主值周期

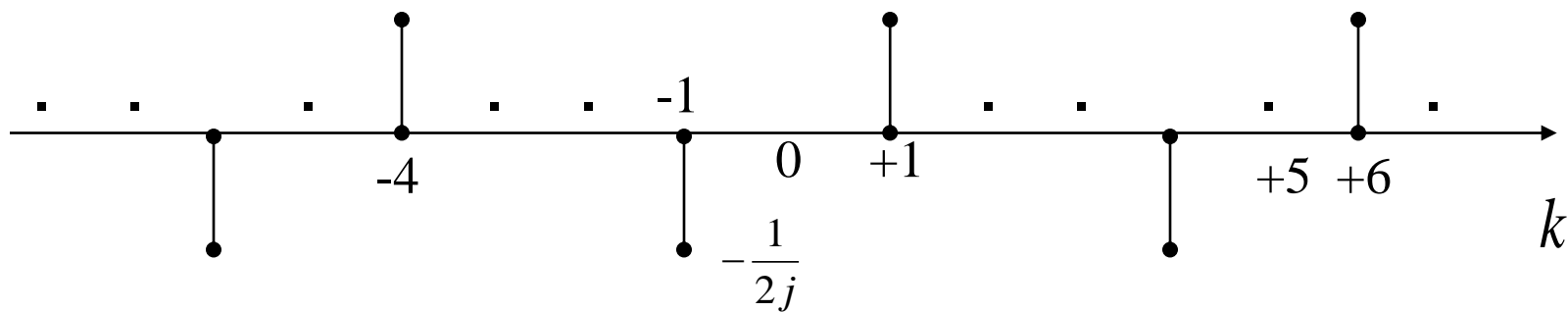
这表明：离散时间周期序列的频谱是以 N 为周期的。

通常 \dot{A}_k 是复数，绘制频谱时要分别以 $|\dot{A}_k|$ 和幅角表示，即幅度频谱和相位频谱。

例1: $x[n] = \sin w_0 n$

① $w_0 = \frac{2\pi}{N}$ $x[n] = \frac{1}{2j} [e^{jk\frac{2\pi}{N}n} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}]$

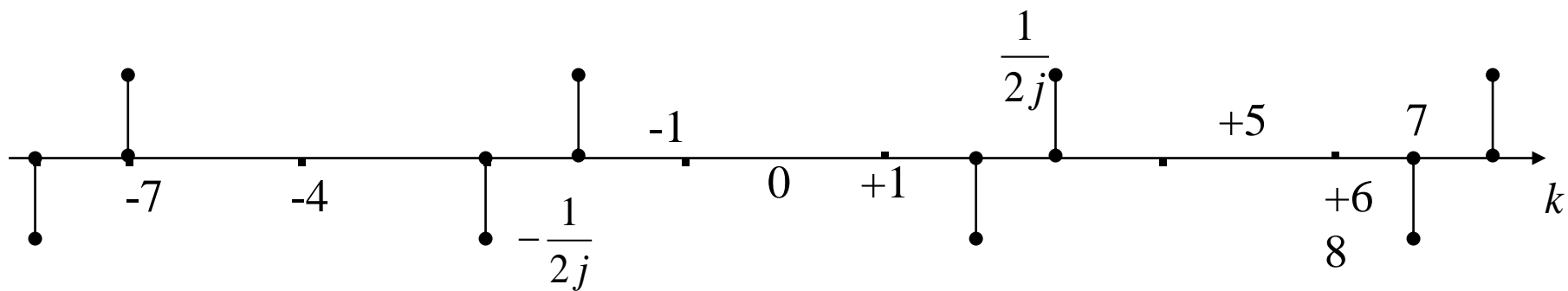
$a_1 = \frac{1}{2j}$ $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$ $N = 5$ $x[n] = \sin(\frac{2\pi}{5})n$



② $w_0 = \frac{2\pi}{N} m$ 若 $N = 5, m = 3$

则 $x[n] = \sin \frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n = \sin 3\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n$

$a_{+3} = \frac{1}{2j}$ $a_{-3} = -\frac{1}{2j}$ $a_{-2} = \frac{1}{2j}$ $a_2 = -\frac{1}{2j}$



a_k 频谱图.

{ 幅频特性 实部
相频特性 *or* 虚部

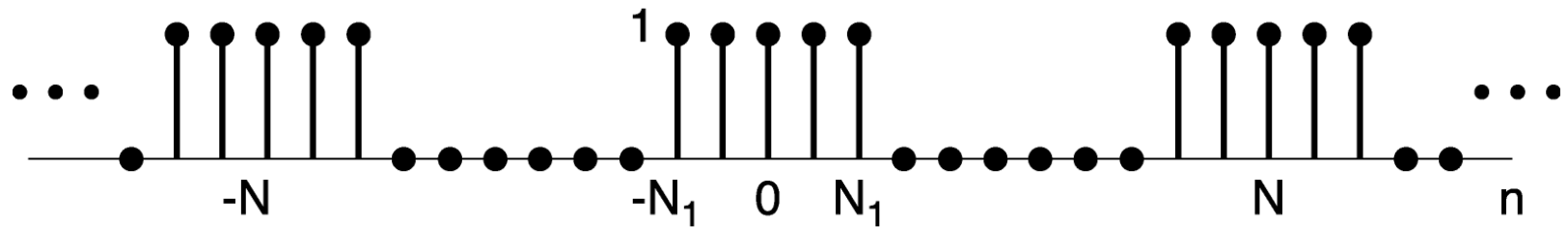
例2:

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2j} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}} - e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right] + 3 \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}} + e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right] + \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} + e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} \right]$$

$$= 1 + \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \right] e^{j\frac{2\pi}{N}} + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2}$$

三. 周期性矩形脉冲信号的频谱:



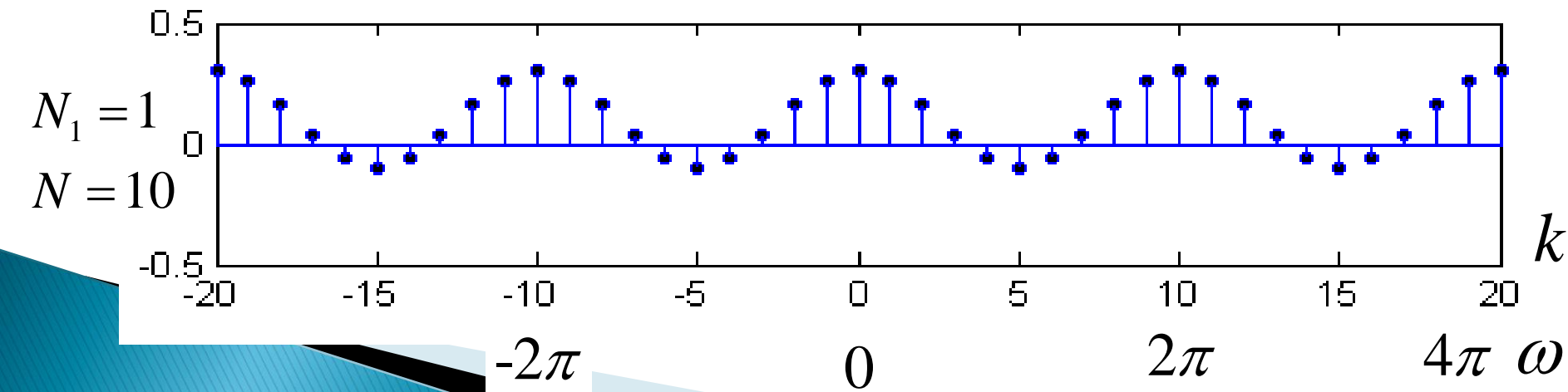
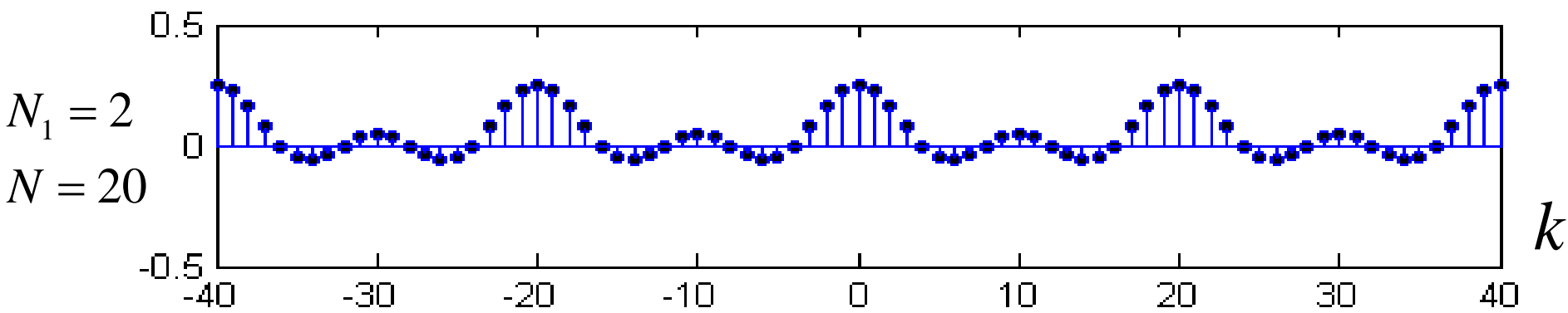
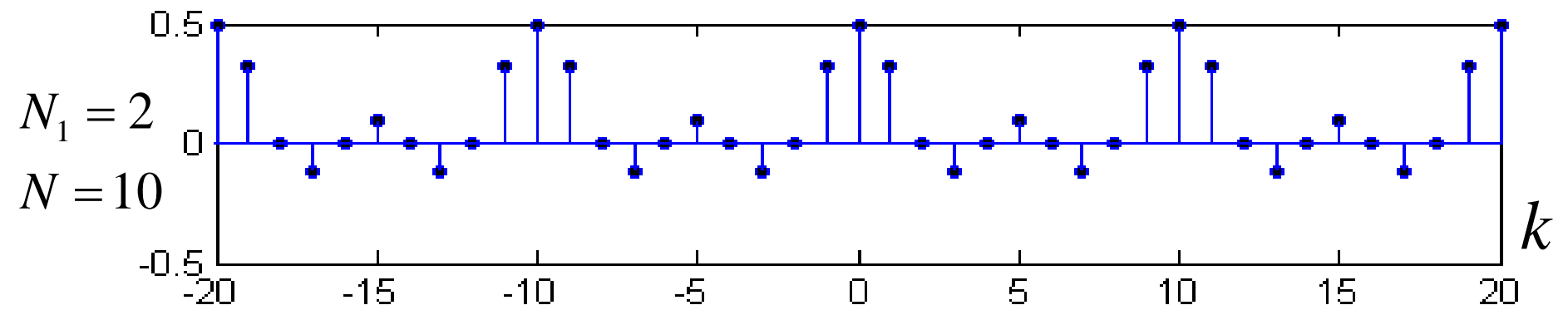
$$\begin{aligned}
 \dot{A}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1} - e^{-j\frac{2\pi}{N}(N_1+1)k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})} \right]}{e^{-j\frac{\pi}{N}k} \left[e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k} \right]}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{2\pi}{N} k (N_1 + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\pi}{N} k} \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$\dot{A}_k = \frac{2N_1 + 1}{N} \quad k = rN \text{ 时}$$

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \frac{\sin \left[\frac{1}{2} (2N_1 + 1) \omega \right]}{\sin \frac{\omega}{2}} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} k}$$

显然 \dot{A}_k 的包络具有 $\frac{\sin \beta x}{\sin x}$ 的形状。



当 N_1 不变、 $N \uparrow$ 时，频谱的包络形状不变，只是幅度减小，谱线间隔变密。

当 N_1 改变、 N 不变时，由于 A_k 的包络有 $\frac{\sin \beta x}{\sin x}$ 的形状，而 $\beta = 2N_1 + 1$ ，可知其包络形状一定发生变化。当 $N_1 \downarrow$ 时，包络的第一个零点会远离原点从而使频谱主瓣变宽。这一点也与连续时间周期矩形脉冲的情况类似。周期序列的频谱也具有**离散性、谐波性**，在 $-\pi \sim \pi$ 区间考查时，也具有**收敛性**。不同的是，离散时间周期信号的频谱具有**周期性**。

三 . DFS的收敛:

DFS是一个有限项的级数, 确定 \dot{A}_k 的关系式也是有限项的和式, 因而不存在收敛问题, 也不会产生Gibbs现象。

DFS表明: 周期序列**可以而且只能**分解成 N 个独立的复指数谐波分量。

解释: 以 N 为周期的序列在时域只有 N 个独立的值, 即该序列一个周期内各点的值。DFS的系数 \dot{A}_k 也是以 N 为周期的, 也只有 N 个独立的值。因此, 从本质上讲, DFS就是将序列在时域的 N 个独立值变换为频域的 N 个独立值。

只要在频域取够N个分量，就一定能完全恢复成原信号，因此DFS不存在收敛问题。只要取够了N个分量，级数将完全收敛于 $x(n)$ ，而不会出现 Gibbs 现象。

连续时间周期信号在一个周期内可能有无数多个独立的值，因而CFS的系数 A_k 也有无数多个独立值。当只取有限个谐波分量时，不可能恢复原信号。随着所取谐波数量的增加，近似程度越来越高，在最小均方误差准则下考虑极限情况时，就自然产生了收敛问题和Gibbs现象。

三 . DFS的性质:

离散时间傅里叶级数的性质与连续时间傅里叶级数的性质具有很多相似性。与后续讨论的离散时间傅里叶变换也有很多相似。如线性特性、时移特性、移频特性、共轭对称特性、时域翻转特性、尺度变换特性等。

本节只讨论有差别的几个性质。

1) 相乘特性

$$x(n) \leftrightarrow \dot{A}_k, \quad y(n) \leftrightarrow \dot{B}_k$$

$f(n) = x(n)y(n)$ 的傅里叶级数的系数为

$$\begin{aligned}\dot{C}_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n)y(n)e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{l=\langle N \rangle} \dot{A}_l e^{-jl(2\pi/N)n} y(n) e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{l=\langle N \rangle} \dot{A}_k \dot{B}_{k-l}\end{aligned}$$

2) 一次差分

$$\text{若 } x(n) \leftrightarrow \dot{A}_k$$

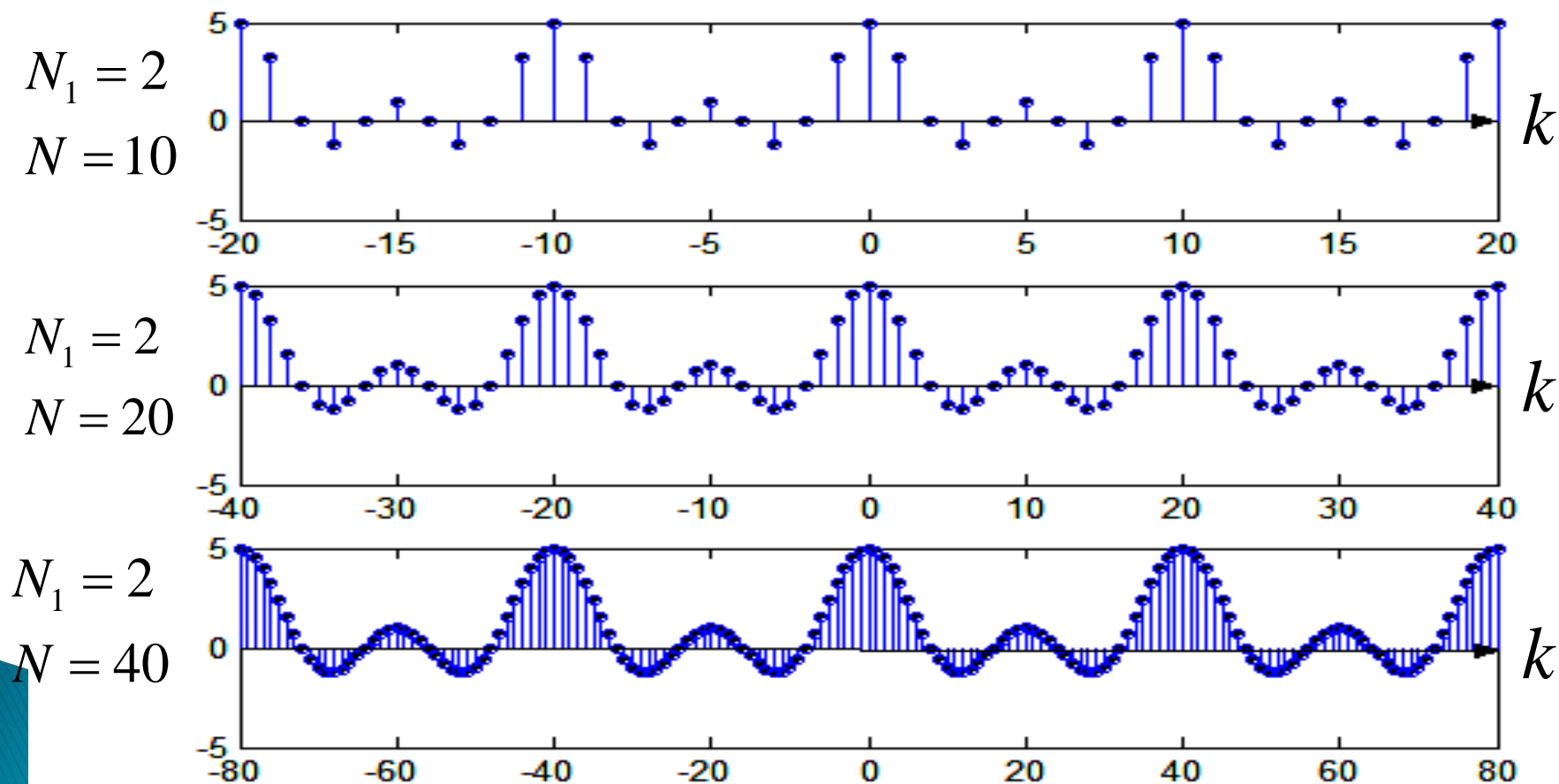
$$\text{则 } x(n) - x(n-1) \leftrightarrow (1 - e^{-jk(2\pi/N)}) \dot{A}_k$$

3) 帕斯瓦尔定律

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |\dot{A}_k|^2$$

4.3 非周期信号与离散时间傅立叶变换: (Aperiodic Signals & Discrete-Time Fourier Transform)

一. 从傅氏级数到傅氏变换:



在讨论周期性矩形脉冲信号的频谱时，已经看到：当周期信号的周期 N 增大时，频谱的谱线间隔变小，谱线变密。在时域，当 $N \rightarrow \infty$ 时，周期信号将变为非周期信号，离散频谱将变为连续频谱。

另一方面，任何周期信号都可以看成是一个非周期信号周期延拓的结果。如果 $\tilde{x}(n)$ 是一个以 N 为周期的信号， $x(n)$ 是它的一个周期，则有：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN) \quad x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

对周期信号 $\tilde{x}(n)$ 由DFS有:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

即
$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\frac{2\pi}{N}k \rightarrow \omega$, 令 $\lim_{N \rightarrow \infty} \dot{N}A_k = X(e^{j\omega})$
有:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \text{ --- DTFT}$$

说明: 显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。

将其与 \dot{A}_k 表达式比较有:

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

于是: $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $k\omega_0 \rightarrow \omega, \quad \omega_0 \rightarrow d\omega, \quad \sum \rightarrow \int,$

当 k 在一个周期范围内改变时, $k\omega_0$ 在 2π 范围变化, 所以积分区间是 2π 。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

表明：离散时间序列可以分解为频率在 2π 区间上分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ 的复指数分量的线性组合。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

DTFT对

	连续时间		离散时间	
	时域	频域	时域	频域
傅里叶级数	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ <p>连续时间, 在时间上是周期的</p>	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <p>离散频率, 在频率上是非周期的</p>	$x[n] = \sum_{k=(N)\mathbb{I}} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ <p>离散时间, 在时间上是周期的</p>	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ <p>离散频率, 在频率上是周期的</p>
		↖ 对		← 对偶 →
傅里叶变换	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$ <p>连续时间, 在时间上是非周期的</p>	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \text{ ①}$ <p>连续频率, 在频率上是非周期的</p>	<p>偶 ↘</p> $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \text{ ①}$ <p>离散时间, 在时间上是非周期的</p>	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ <p>连续频率, 在频率上是周期的</p>
	← 对偶 →			

二. DTFT的收敛问题:

当序列是无限长序列时, 由于 $X(e^{j\omega})$ 表达式是无穷项级数, 当然会存在收敛问题。

收敛条件有两组:

1. 若 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, 则 $X(e^{j\omega})$ 存在, 且级数一致收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。

2. 若 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$, 则级数以均方误差最小准则收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。

- 当以部分复指数分量之和近似信号时，会出现起伏和振荡；但随着 $W \uparrow$, $\tilde{x}(n)$ 的振荡频率变高，起伏幅度趋小；

- 当 $W = \pi$ 时，振荡与起伏将完全消失，不会出现吉伯斯(Gibbs)现象，也不存在收敛问题。

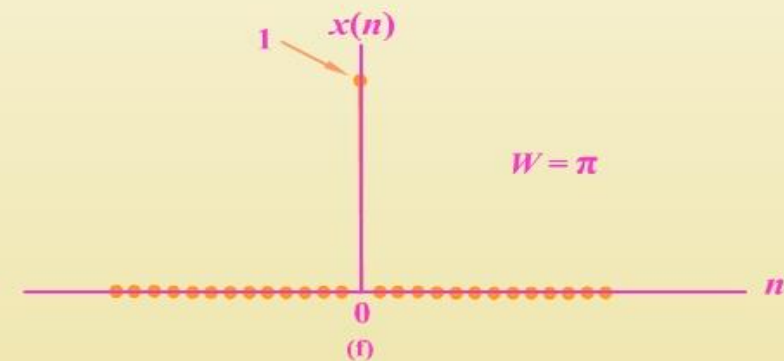
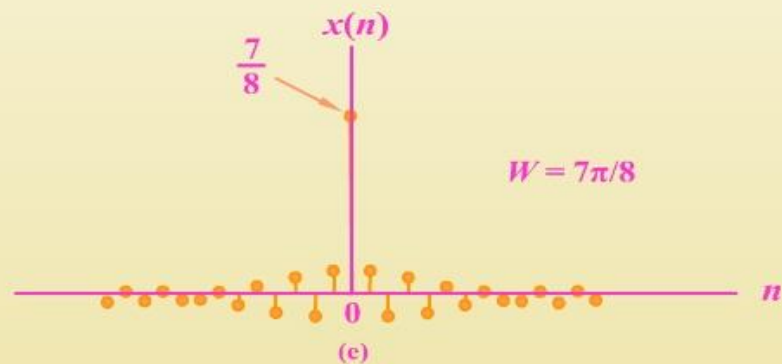
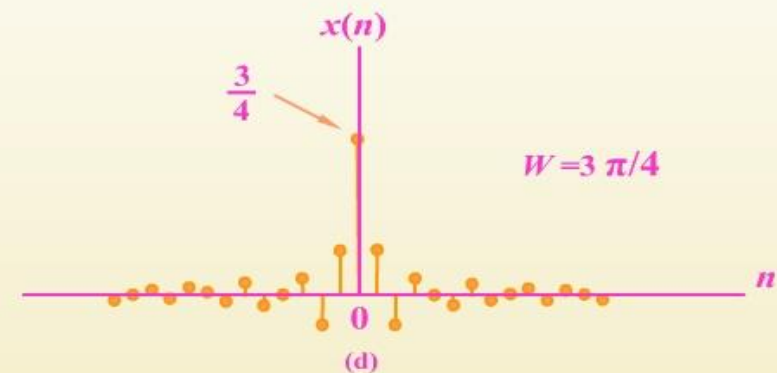
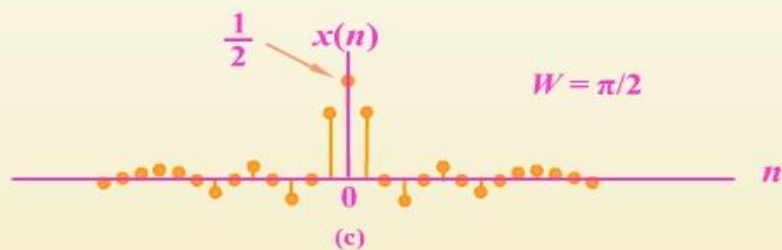
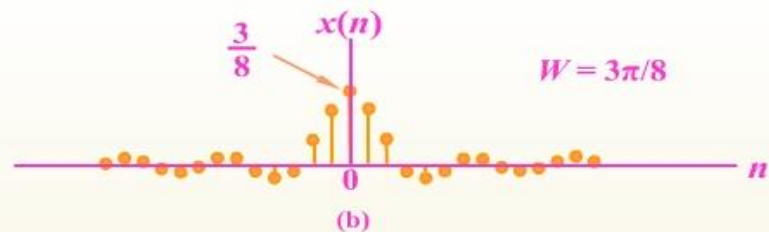
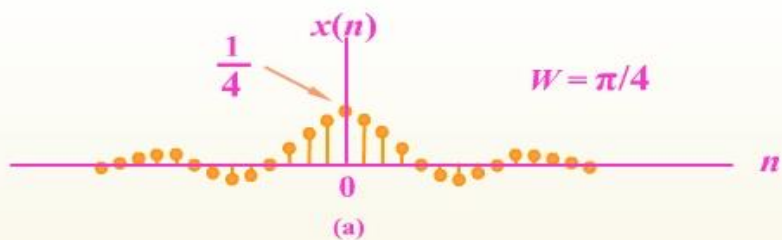


图5.7 利用 $|\omega| \leq W$ 范围内的复指数信号, 按(5.16)式得到的一个近似单位脉冲序列:
 (a) $W = \pi/4$; (b) $W = 3\pi/8$; (c) $W = \pi/2$; (d) $W = 3\pi/4$; (e) $W = 7\pi/8$;
 (f) $W = \pi$. 应该注意到: 当 $W = \pi$ 时, $\hat{x}[n] = \delta[n]$