

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

基本内容:

1. 离散时间LTI系统的特征函数;
2. 离散时间信号的频域分解;
3. 离散时间傅立叶变换;
4. 系统的频率响应与频域分析;

二. 常用信号的离散时间傅立叶变换:

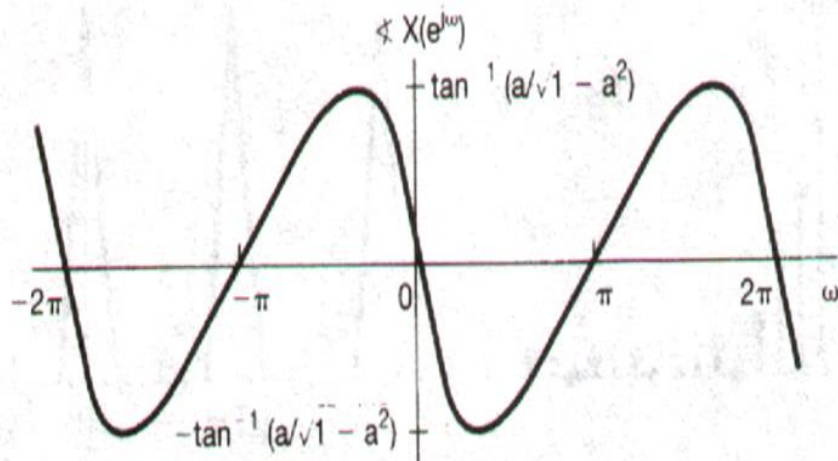
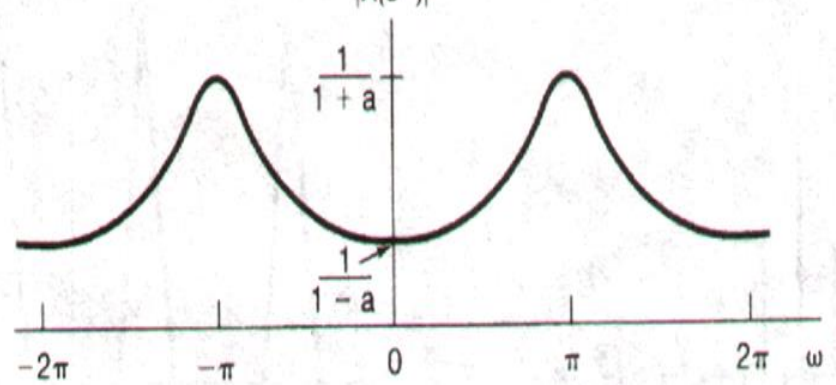
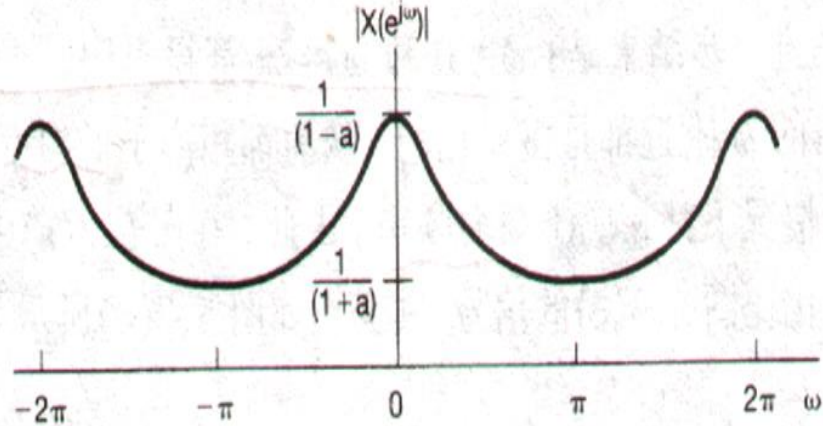
1. $x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

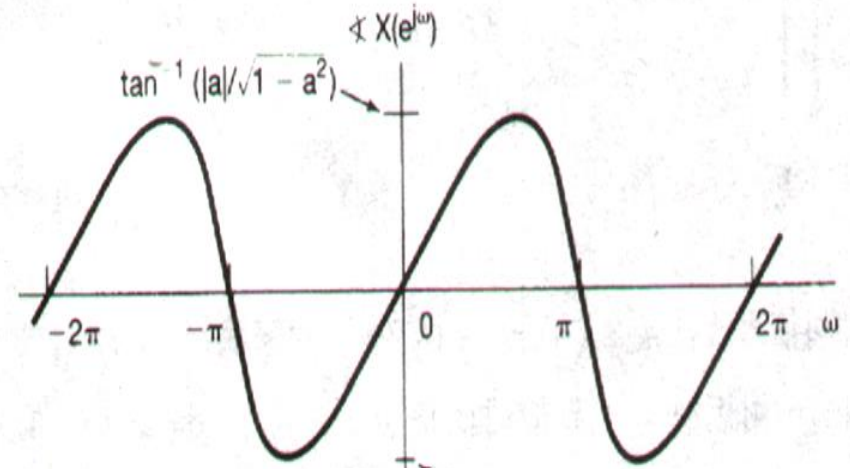
通常 $X(e^{j\omega})$ 是复函数, 它的模和相位:

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}},$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$



$a > 0$



$a < 0$

由图可以看到（如果 $x(n)$ 是某个系统的单位脉冲响应）：

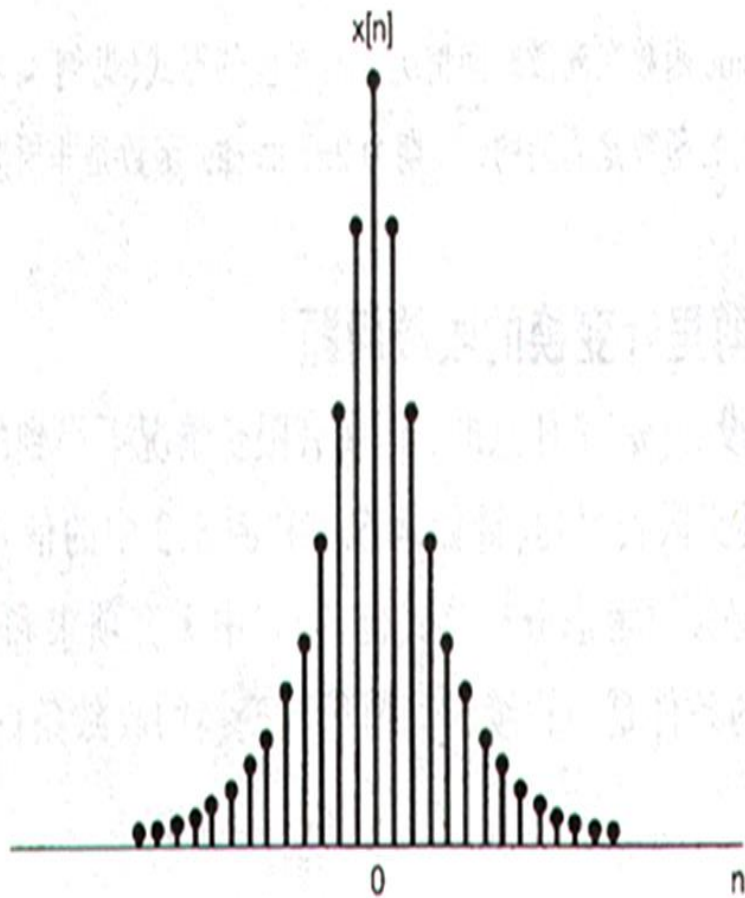
$0 < a < 1$ 时，低通特性， $x(n)$ 单调指数衰减

$-1 < a < 0$ 时，高通特性， $x(n)$ 摆动指数衰减

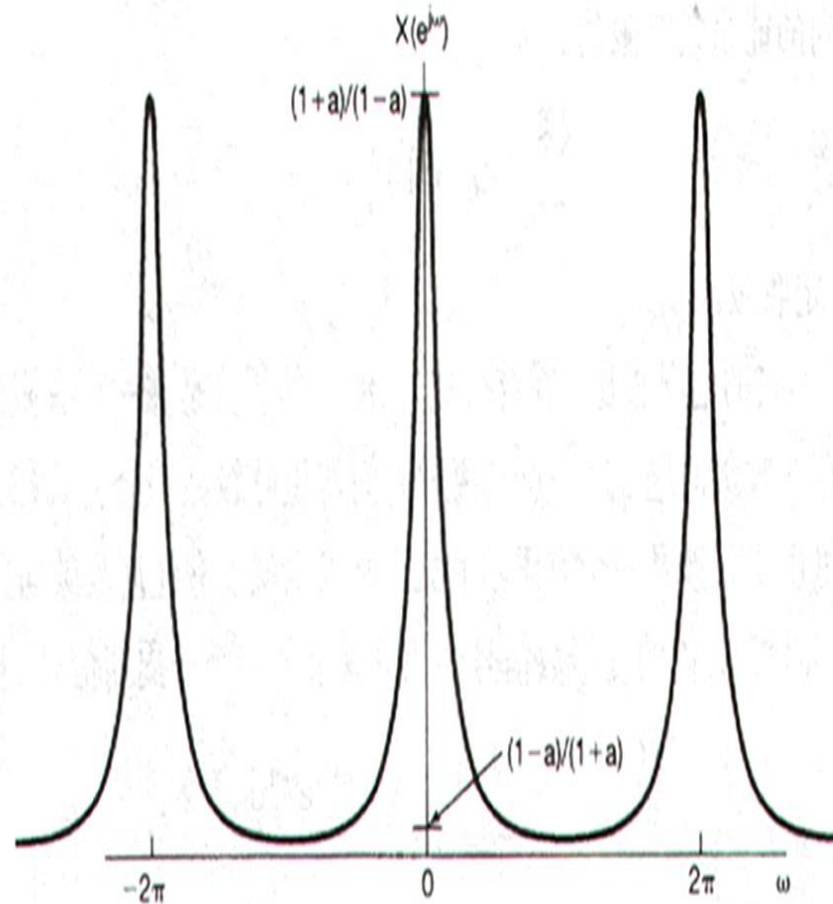
2. $x(n) = a^{|n|}$, $0 < a < 1$

$$x(n) = a^{-n} u(-n-1) + a^n u(n)$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega} \end{aligned}$$



(a)



(b)

$$0 < a < 1$$

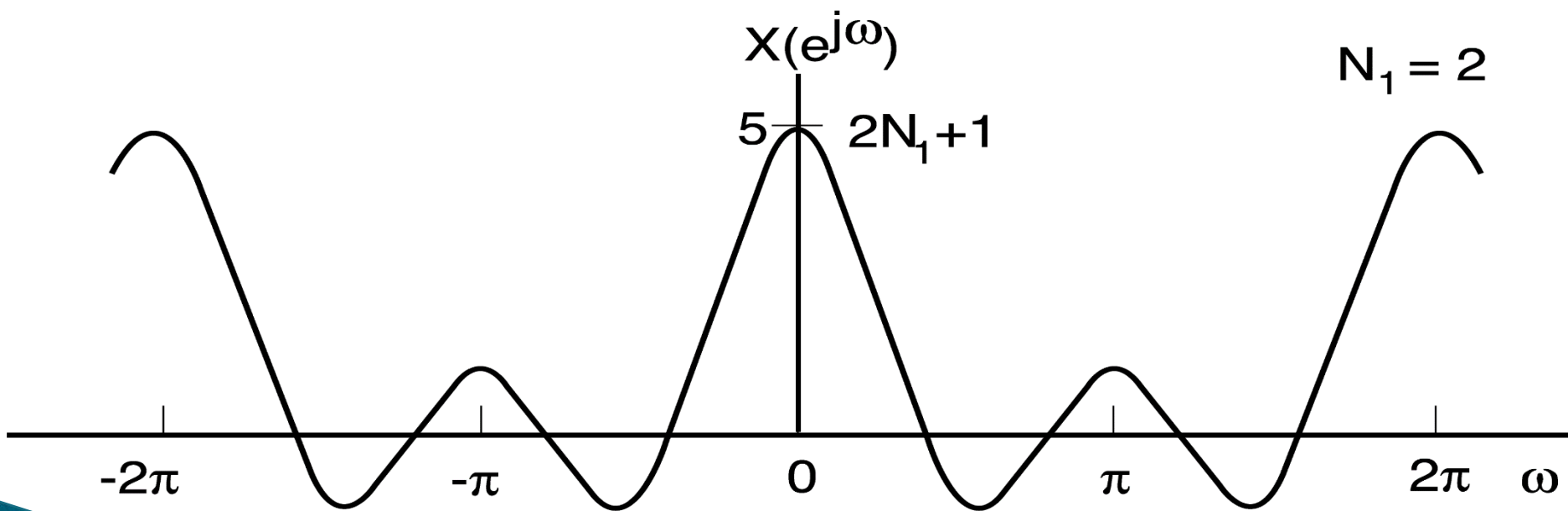
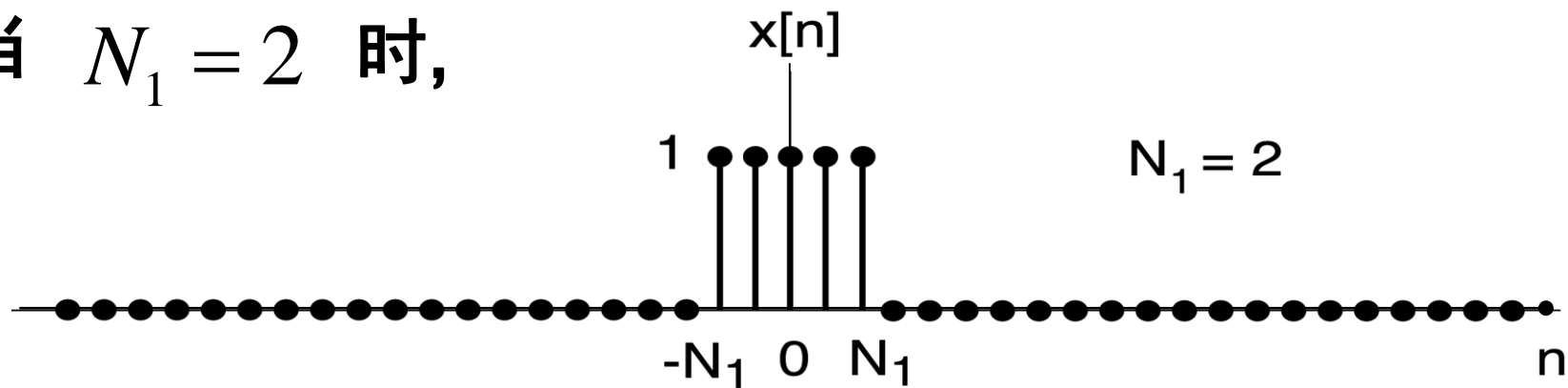
可以看出： **实偶序列** \longleftrightarrow **实偶函数**

3. 矩形脉冲: $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})\omega}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

有同样的结论: **实偶信号** \longleftrightarrow **实偶函数**

当 $N_1 = 2$ 时,



两点比较:

1) 与对应的周期信号比较:

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N} k (2N_1 + 1)}{\sin \frac{\pi}{N} k},$$

显然有

$$\dot{A}_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

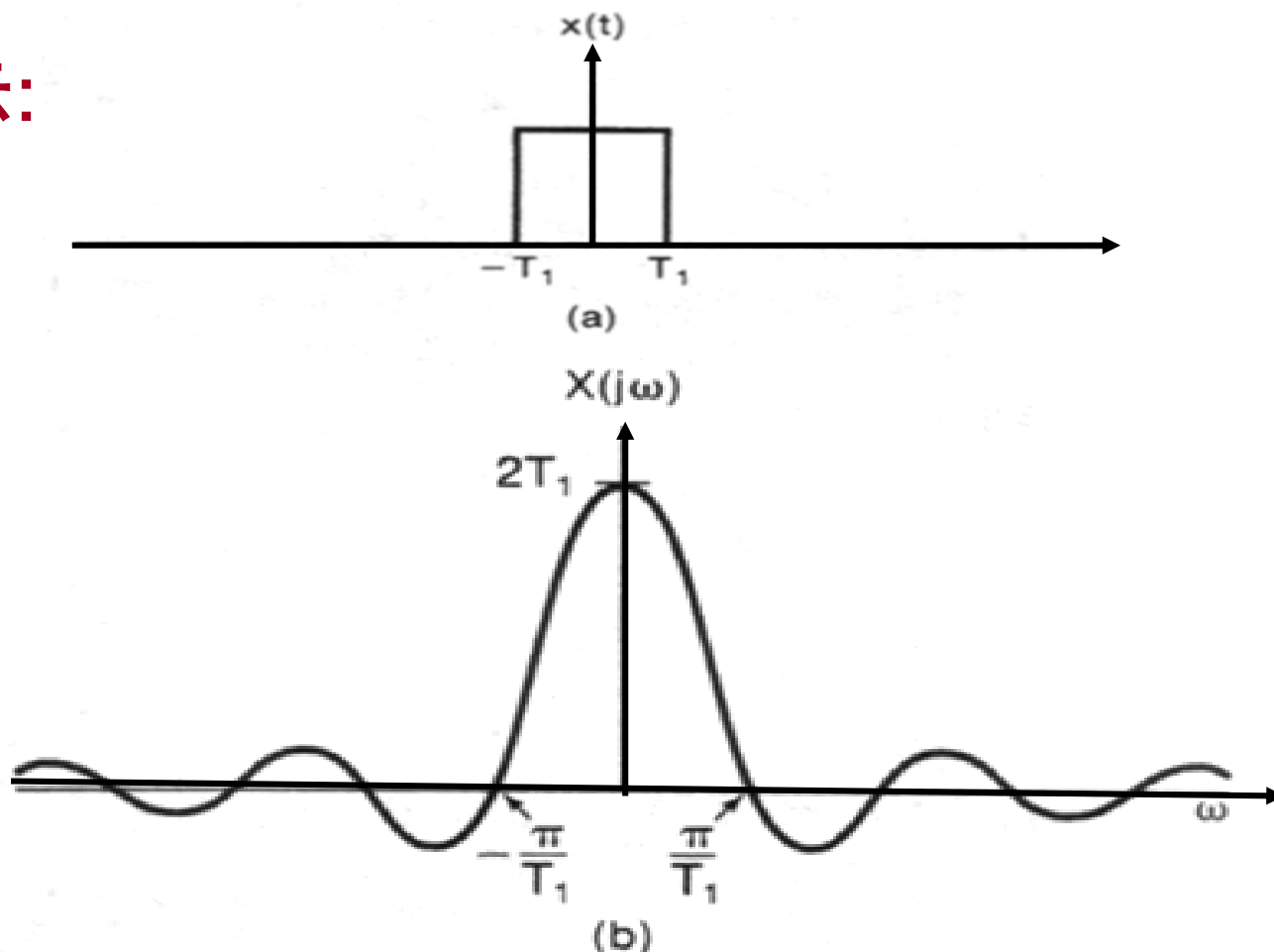
关系成立。

2) 与对应的连续时间信号比较:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

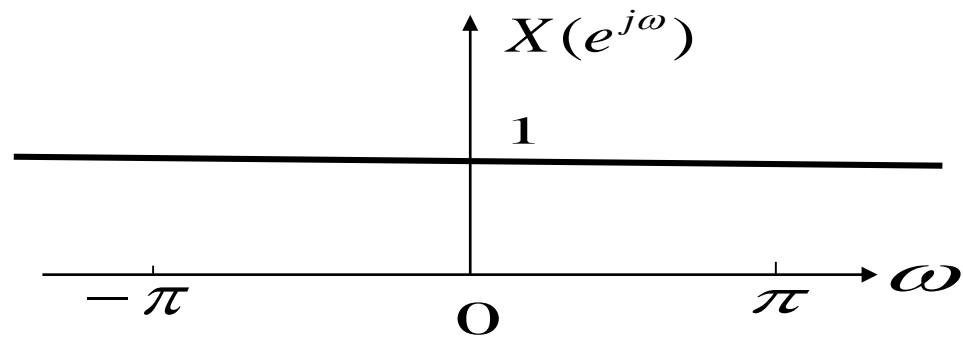
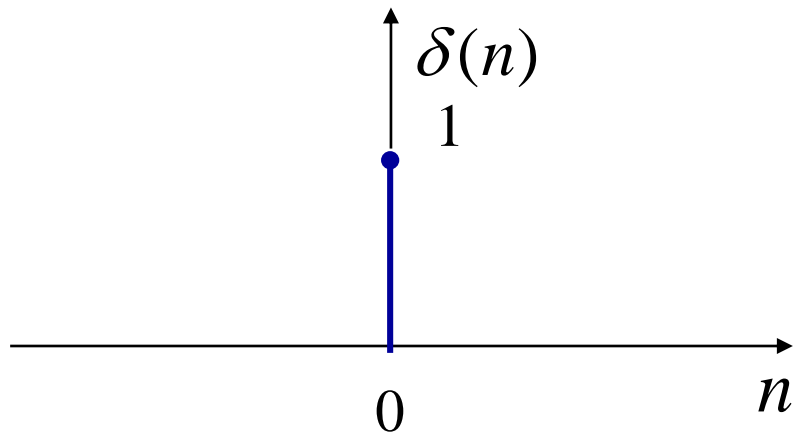
$$X(j\omega) = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

如图所示:



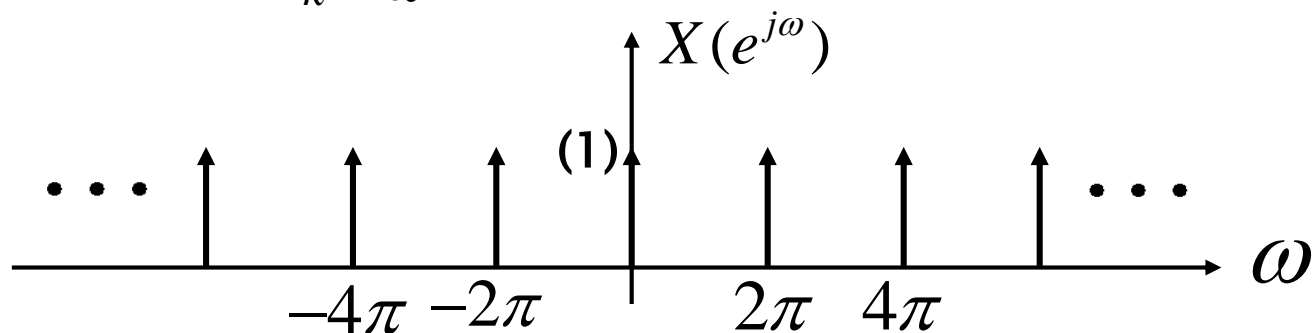
4. $x(n) = \delta(n)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = 1 \quad \text{如图所示:}$$



5. 频域均匀冲激串:

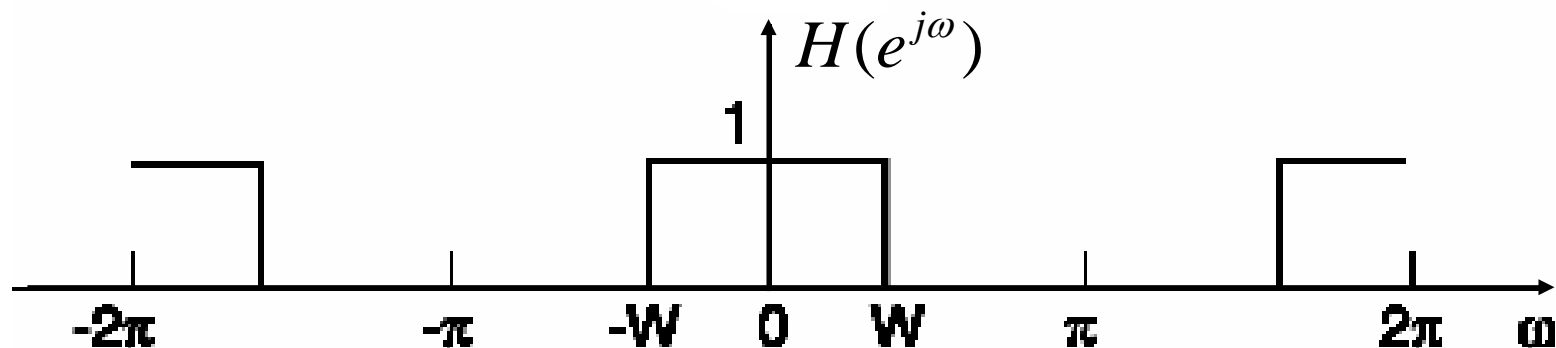
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$



$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$\therefore x(n) = 1 \text{ 时, } X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

6. 理想低通滤波器:

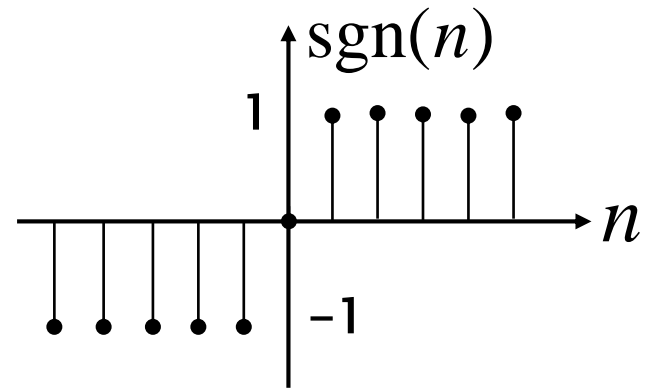


$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

$h(n)$ 具有 sinc 函数的形式, 系统是非因果的。

7. 符号函数:

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$



将其视为下列信号的极限:

$$a^n u(n) - a^{-n} u(-n), \quad (a \rightarrow 1) \text{ 于是有:}$$

$$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = -\frac{j2a \sin \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}$$

当 $a \rightarrow 1$ 时, 可得到:

$$\text{sgn}(n) \leftrightarrow \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

实、奇信号 \longleftrightarrow 虚、奇频谱

8. 单位阶跃的频谱:

$$u(n) = \frac{1}{2} [1 + \text{sgn}(n) + \delta(n)]$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad \text{sgn}(n) \leftrightarrow \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$\therefore u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

对照连续时间单位阶跃

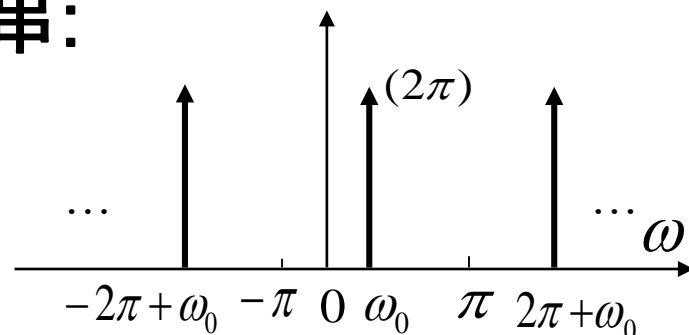
$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

4.4 周期信号的DTFT:

对连续时间信号, 有 $2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \leftrightarrow e^{j\Omega_0 t}$, 由此推断对离散时间信号或许有相似的情况。

但由于DTFT一定是以 2π 为周期的, 因此, 频域的冲激应该是周期性的冲激串:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$



对其做反变换有:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

可见：
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \leftrightarrow e^{j\omega_0 n}$$

由DFS有：
$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

因此，周期信号 $\tilde{x}(n)$ 可表示为DTFT：

$$\tilde{x}(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi \dot{A}_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi l)$$

$$= \dots + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi \dot{A}_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi \dot{A}_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi)$$

$$+ \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi \dot{A}_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 4\pi) + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi \dot{A}_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi \dot{A}_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+N)\right] \\
&\quad \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi \dot{A}_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+2N)\right] + \cdots \\
&= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi \dot{A}_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \sum_{k=N}^{2N-1} 2\pi \dot{A}_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \\
&\quad + \sum_{k=2N}^{3N-1} 2\pi \dot{A}_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) + \cdots = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)
\end{aligned}$$

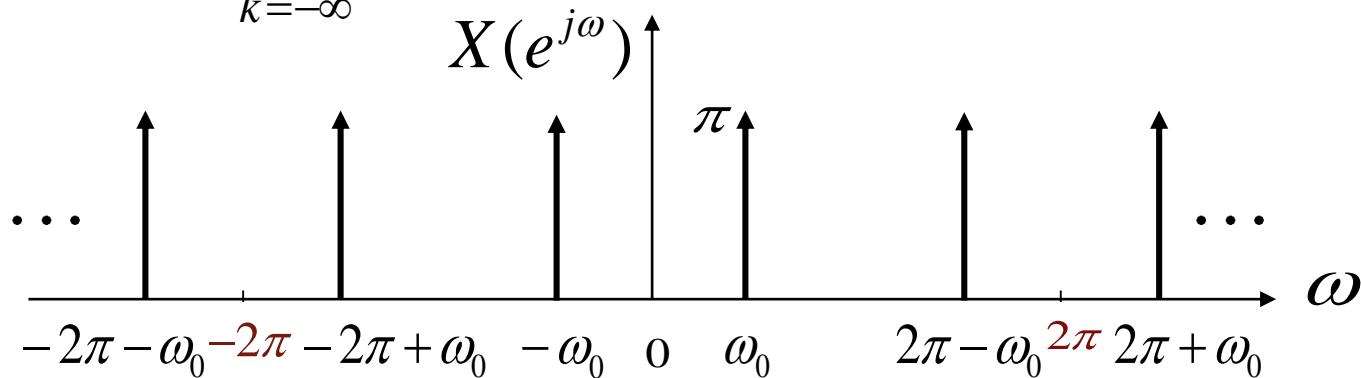
可以看出与连续时间傅立叶变换中的形式是完全一致的。

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

例1. $x(n) = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}),$

不一定是周期的，当 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k$ 时才是周期的。

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

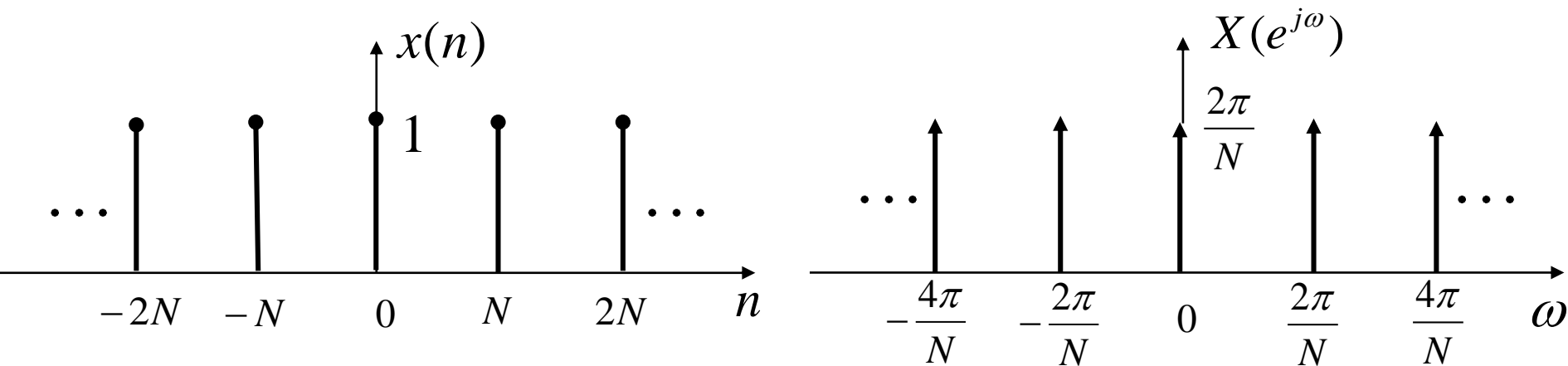


$$\sin \omega_0 n \leftrightarrow \frac{\pi}{j} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) \right]$$

例2. $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$ —— 均匀脉冲串

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$



比较:与连续时间均匀冲激串的情况一致.

4.5 离散时间傅立叶变换的性质： (The Properties of the DTFT)

DTFT也有很多与CTFT类似的性质，当然也有某些明显的差别。

通过对DTFT性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

1. 周期性(periodic):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ，则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较:这是与CTFT不同的。

2. 线性(linearity):

$$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

3. 共轭对称性(symmetry properties):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到以下结论:

1. 若 $x(n)$ 是实信号, 则 $x^*(n) = x(n)$

$\therefore X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$, 即 $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$

因此:
$$\begin{cases} \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = -\operatorname{Im}[X(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

$$\begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$$

2. 若 $x(n)$ 是实偶信号, 则 $x(n) = x(-n)$,

$$x^*(n) = x(n) \quad x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

于是有: $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$,

即: $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 $x(n)$ 是实奇信号, 则 $x(n) = -x(-n)$, $x^*(n) = x(n)$

于是有: $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega})$,

表明: $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$, 则

$$x_e(n) \leftrightarrow \operatorname{Re} \left[X(e^{j\omega}) \right] \quad x_o(n) \leftrightarrow j \operatorname{Im} \left[X(e^{j\omega}) \right]$$

说明: 这些结论与连续时间情况下完全一致。

4. 时移(shifting):

$$\text{若 } x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}),$$

$$\text{则 } x(n - n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

表明：信号在时域平移不改变幅频特性，只产生线性的附加相移。

5. 时域差分与求和(differencing and summation):

$$x(n) - x(n-1) \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

说明:

可看出在DTFT中 $(1 - e^{-j\omega})$ 相当于CTFT中的 $j\Omega$

例: $u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad \delta(n) \leftrightarrow 1$

$$\therefore u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

6. 时域内插与频域尺度变换(interpolation):

定义: $x_k(n) = \begin{cases} x(n/k), & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 X_{(k)}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k(rk) e^{-j\omega rk} \\
 &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) e^{-j\omega rk} = X(e^{jk\omega})
 \end{aligned}$$

$$\therefore x_k(n) \leftrightarrow X(e^{jk\omega}) \quad x_k(n) = \begin{cases} x(n/k), \\ 0, \end{cases}$$

当K= -1时， 据此可得：

$$x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega}) \text{ —— 时间反转特性}$$

表明：信号的特性在时域与频域之间存在一种相反的关系。

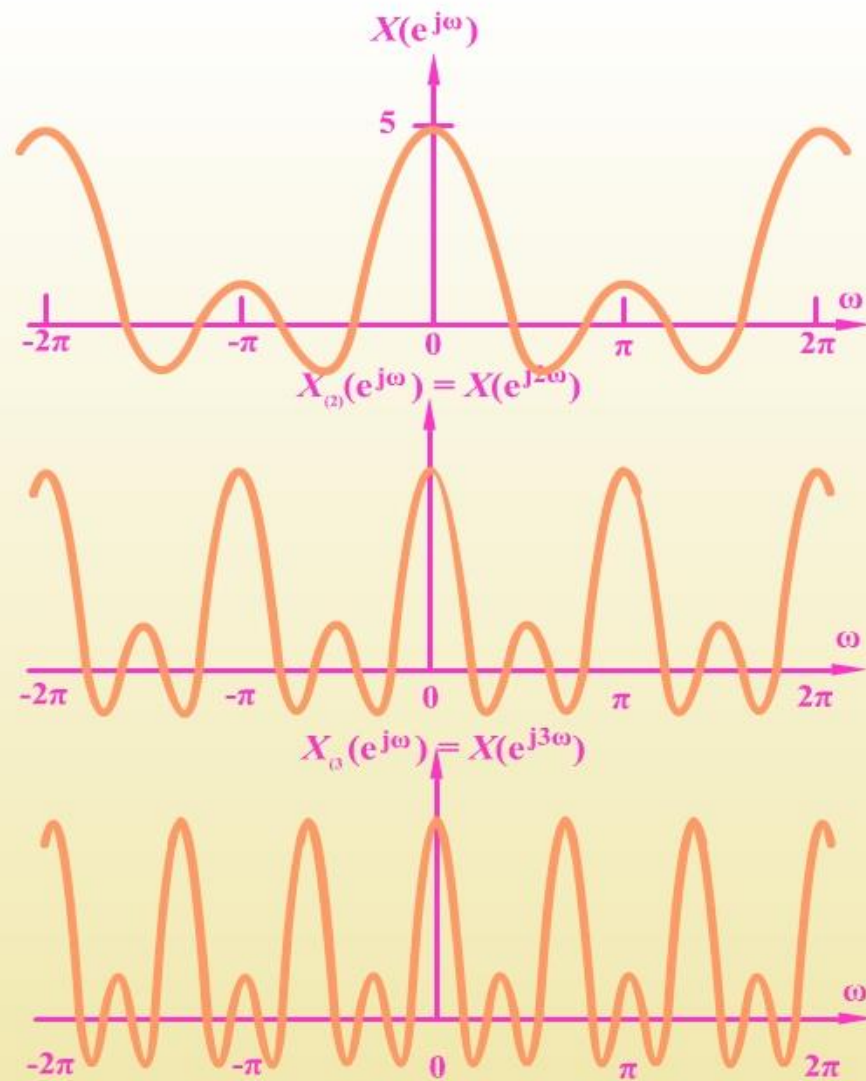
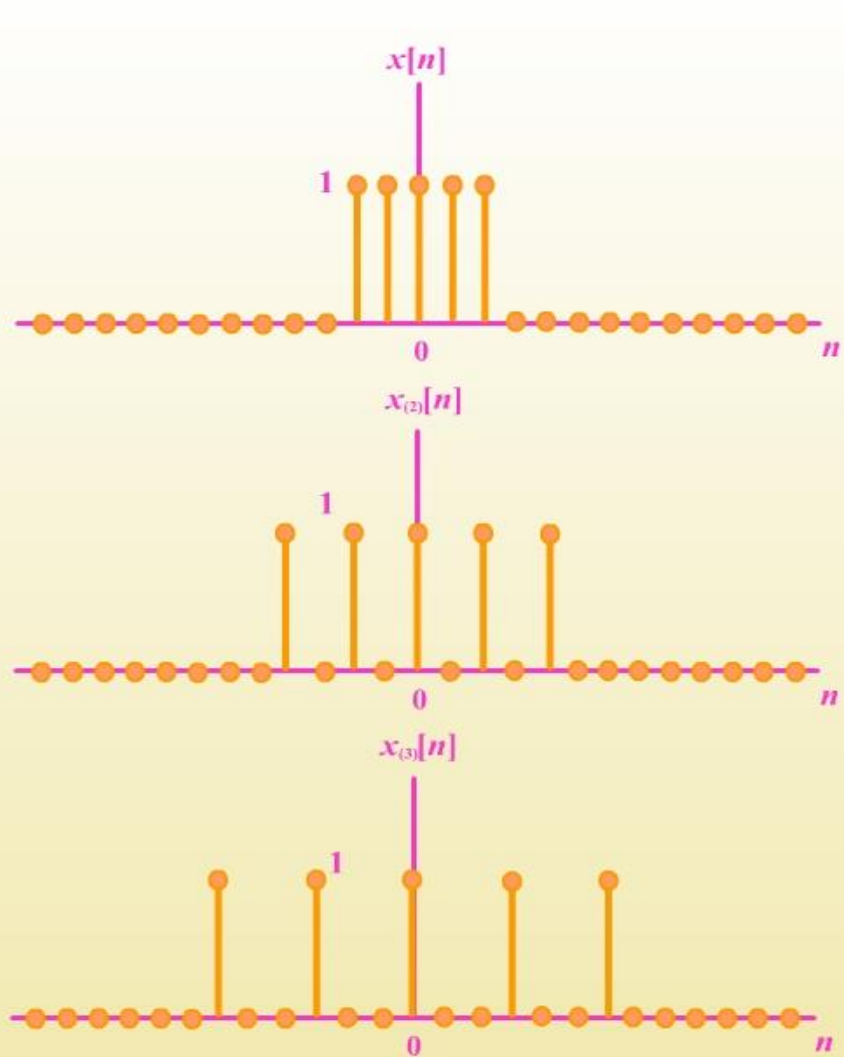


图4.16

时域和频域之间的相反关系:当 k 增加时, $x_{(k)}[n]$ 在时域上拉开,而其变换则在频域上压缩

7. 频域微分特性:

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \because X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} jnx(n)e^{j\omega n}$$

$$\therefore nx(n) \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

8. 卷积特性(convolution):

若 $y(n) = x(n) * h(n)$, 则 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$,

$H(e^{j\omega})$ 称为**系统的频率特性**。

卷积特性是对LTI系统进行频域分析的理论基础。

例：求和特性的证明：

$$\because \sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * u(n)$$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

由卷积特性可得：

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

9. 调制特性:

如果 $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$, 则

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

记为:
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

由于 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的,

因此上述卷积称为**周期卷积**。

周期卷积与普通卷积的区别仅在于积分区间是一个周期，卷积的结果也是周期性的。

例： $x(n)e^{j\omega_0 n}$ 的频谱： —— **移频特性**

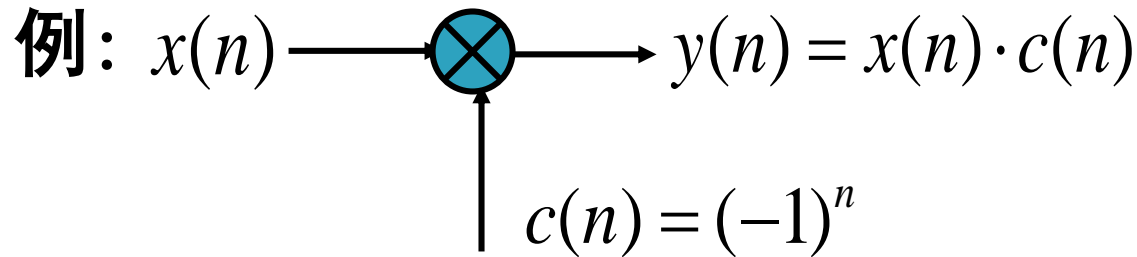
$$\because e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

由调制特性可得：

$$x(n)e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

$$\text{即：} \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) \delta(\omega - \omega_0 - \theta) d\theta = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

—— **移频特性**

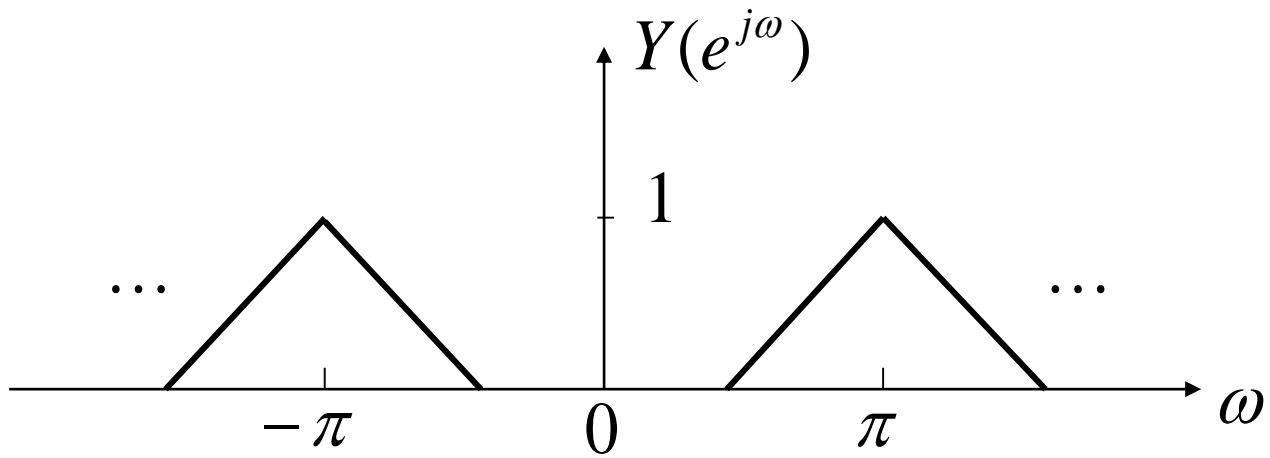
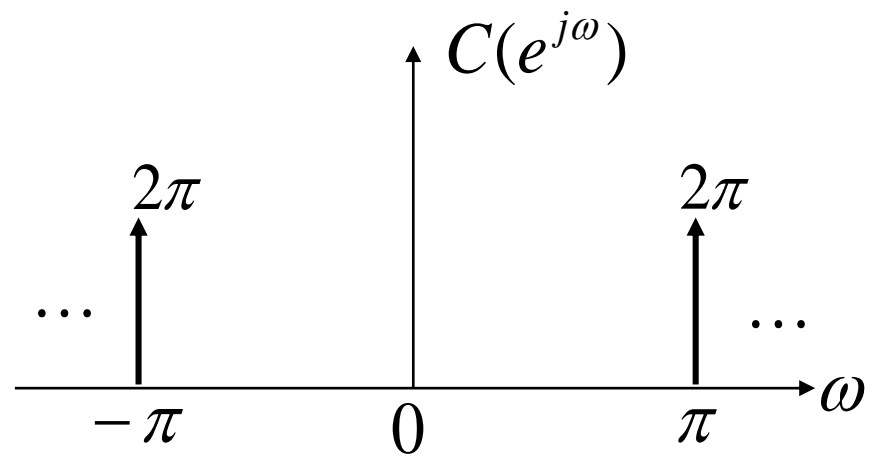
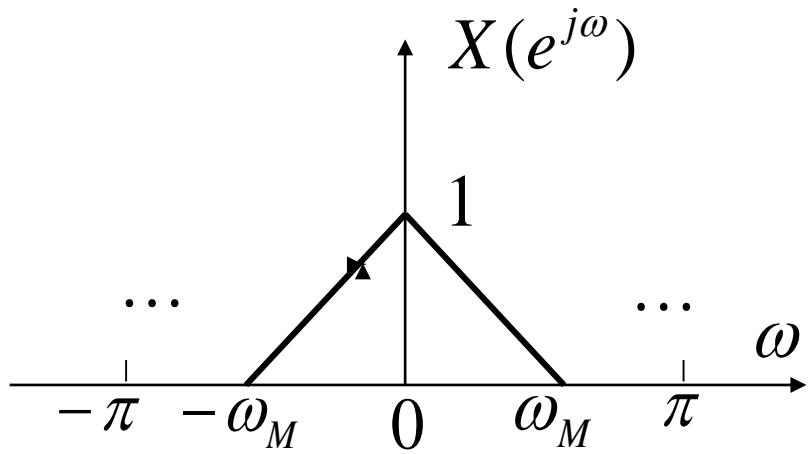


$$c(n) = (-1)^n = e^{j\pi n} \leftrightarrow C(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - 2k\pi)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes C(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) \delta(\omega - \pi) d\omega = X(e^{j(\omega-\pi)})$$



10. Parseval 定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$ 称为 $x(n)$ 的**能量谱密度函数**

比较: 在DFS中, 有 $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |\dot{A}_k|^2$

$|\dot{A}_k|^2$ 称为周期信号的**功率谱**。

11. 对偶性:

一. 离散时间傅立叶级数的对偶:

对离散时间周期序列有:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} \dot{A}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad \dot{A}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于 \dot{A}_k 本身也是以 N 为周期的序列, 当然也可以

将其展开成DFS形式, 即:

$$\dot{A}_k = \sum_{n=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x(-n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{或} \quad \dot{A}_n = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x(-k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

将 \dot{A}_n 记为 $a(n)$ 有 $a(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k)$

这表明 $a(n)$ 序列的DFS系数就是 $\frac{1}{N} x(-k)$,

即:

$$\begin{aligned} x(n) &\xleftrightarrow{DFS} a(k) = \dot{A}_k \\ a(n) &\xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N} x(-k) \end{aligned}$$

利用对偶性可以很方便地将DFS在时域得到的性质对偶到频域，得到频域相应的性质。

例1：从时移到频移：

$$x(n) \leftrightarrow a(k) \quad a(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k)$$

利用**时移性质**有：

$$a(n - n_0) \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$$

由对偶性有：

$$\frac{1}{N} x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N} a(-k - M)$$

$$\therefore x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a(-k - M)$$

$$\therefore x(-n) \leftrightarrow a(-k)$$

$$\therefore x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a(k - M), \text{ 即是**频移特性**}$$

例2:由卷积特性到相乘特性:

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow \dot{A}_k \cdot \dot{B}_k \cdot N$$

$$\dot{A}_n = a(n), \dot{B}_n = b(n)$$

$$a(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \quad b(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2(-k)$$

由时域卷积性质:

$$a(n) \otimes b(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot \frac{1}{N} x_2(-k) \cdot N = \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot x_2(-k)$$

由对偶性:

$$\frac{1}{N} x_1(-n) x_2(-n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} a(m) b(-k-m)$$

$$\therefore x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \sum_{m=\langle N \rangle} a(m) b(k-m) = a(k) \otimes b(k)$$

—— 时域相乘性质

二. DTFT与CFS间的对偶:

由 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 知 $X(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的连续函数, $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$

若在时域构造一个以 2π 为周期的连续时间信号

$X(e^{jt})$, 则可将其表示为CFS:

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jkt}, \quad \dot{A}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jt}) e^{-jkt} dt$$

比较 $x(n)$ 和 \dot{A}_k 的表达式可以看出 $\dot{A}_k = x(-k)$

这表明：

$$\text{若 } x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

$$\text{则 } X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$$

利用这一对偶关系，可以将DTFT的若干特性对偶到CFS中去，或者反之。

例：从CFS的时域微分到DTFT的频域微分：

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{CFS} j \frac{2\pi}{T} k \dot{A}_k \quad \text{—— CFS的时域微分特性}$$

若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

$$\therefore \frac{d}{dt} X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} j \frac{2\pi}{T} k x(-k) = jk x(-k), \quad (T = 2\pi)$$

$$-jnx(n) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \quad \text{—— DTFT的频域微分特性}$$

例：从CFS的卷积特性到DTFT的相乘特性：

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_1(-k)$$

$$X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_2(-k)$$

由**CFS**的卷积特性： $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow T\dot{A}_k \dot{B}_k$

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} 2\pi x_1(-k)x_2(-k), \quad (T = 2\pi)$$

由对偶性有：

$$2\pi x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

——**DTFT的相乘特性**