信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

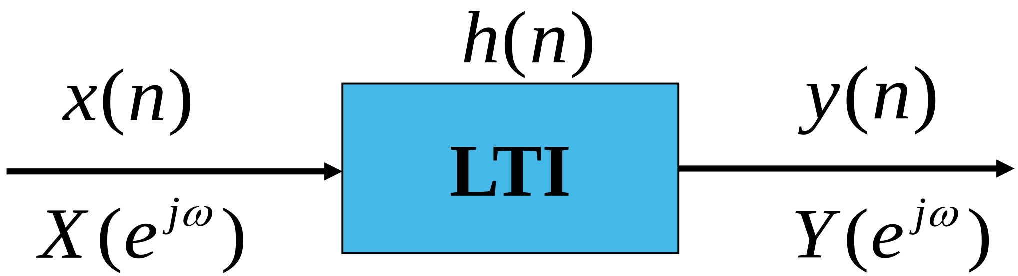
基本内容：

1. 离散时间LTI系统的特征函数；
2. 离散时间信号的频域分解；
3. 离散时间傅立叶变换；
4. 系统的频率响应与频域分析；

4.6 离散时间LTI系统的频域分析：

理论基础： 复指数信号是一切LTI系统的特征函数；

傅立叶变换的卷积特性。



一． 离散时间LTI系统的频域分析：

时域： $$y(n) = x(n) * h(n)$$

频域： $$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$h(n) \leftrightarrow H(e^{j\omega})$ $H(e^{j\omega})$ 称为系统的频率响应。

离散时间系统响应的频域分析

时域差分方程

解差分方程

或时域卷积

时域响应$y[n]$

傅里叶变换

傅里叶反变换

频域代数方程

解代数方程

频域响应$Y(e^{jw})$

若 $x(n)$ 为周期信号 $x(n)=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 则

$$y(n)=\sum_{k=<N>}\dot{A}_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

——— $\dot{A}_k$ 可从DFT求得。

二、系统的频率响应：

$H(e^{j\omega})$ 刻画了LTI系统的频率特性，它是系统单位脉冲响应的傅立叶变换，可以完全表征LTI 系统。

但并非所有的LTI系统都一定存在频率响应。这里有一个先决条件，即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$

这说明只有稳定系统，才能由频率响应来描述。

三、由线性常系数差分方程表征的系统：

$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k),$ 做傅里叶变换有：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$ **是** $e^{-j\omega}$ **的有理函数**

例1： $$y(n) - \frac{5}{6} y(n-1) + \frac{1}{6} y(n-2) = x(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6} e^{-j\omega} + \frac{1}{6} e^{-j2\omega}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}=\frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}+\frac{B}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}$$

$$A=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=2}=3$$

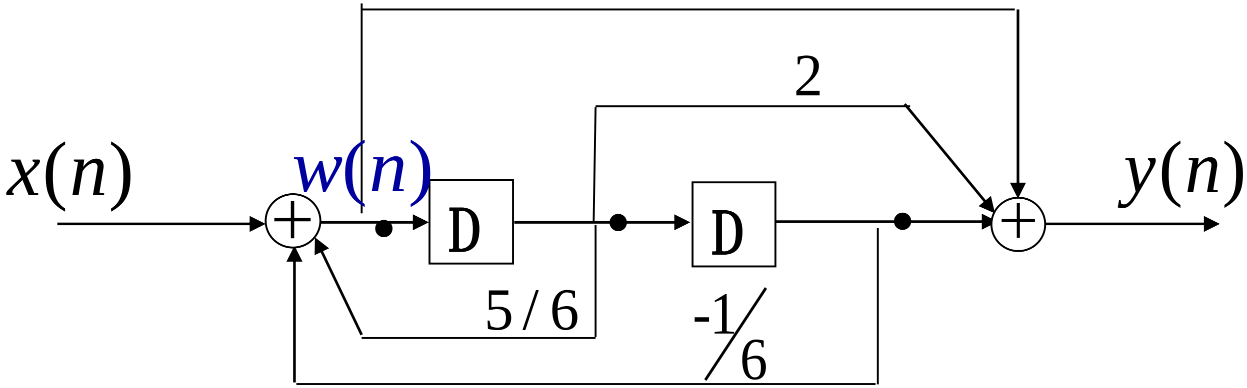
$$A=X(e^{j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=3}=-2$$

$$H(e^{j\omega})=[\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}]$$

$$h(n)=4(\frac{1}{2})^n u(n)-2(\frac{1}{4})^n u(n)$$

通过频率响应求出系统的单位脉冲响应，是实际应用中获得单位脉冲响应的主要方法。

例2：由系统方框图求系统的频率响应：



由系统方框图，对两个加法器可列出以下方程：

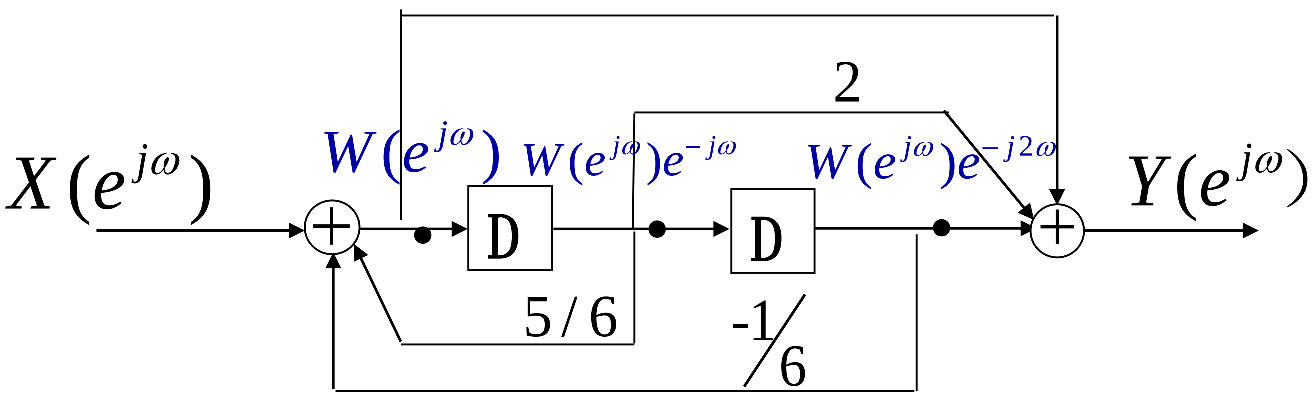
$$w(n)=x(n)+\frac{5}{6}w(n-1)-\frac{1}{6}w(n-2)$$

$$y(n)=w(n)+2w(n-1)+w(n-2)$$

对以上方程做DTFT有：

$$W(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})+(\frac{5}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})=(1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$



由此可解出：

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

三. IIR与FIR系统:

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-j\omega k}}$$

若除 a_0 外其余 $a_k=0$, 则$H(e^{j\omega})=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}$

是一个多项式 。此时:

$$h(n)=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M}b_k\delta(n-k)$$ 是有限长序列（共M+1点）

$$y(n)=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$ ，差分方程无须递推迭代，称为非递归方程；单位脉冲响应是有限长序列。

系统称为**FIR(Finit Impulse Response)系统**。

若除 a_0 外还有其他 $a_k \neq 0$, 则：

$H(e^{j\omega})$是有理分式。差分方程为：

$$y(n)=\frac{1}{a_0}[\sum_{k=0}^{M}b_kx(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_ky(n-k)]$$

差分方程需要递推迭代求解，称为递归方程；

此时$h(n)$是**无限长序列**，系统称为**IIR(Infinit Impulse Response)系统**。

本章小结（ Summary)：

本章主要讨论了以下问题：

1. 建立了离散时间周期信号与非周期信号的频域描述方法—— DFS与DTFT。

2. 通过傅立叶变换性质的讨论，研究了信号时域特性与频域特性的关系。

3. 对离散时间LTI系统建立了频域分析的方法。