

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

wanghg.gr.xjtu.edu.cn

本章基本内容：

1. 双边拉普拉斯变换及收敛域；
2. 常用信号的拉氏变换；
3. 零极点图与系统函数；
4. 双边拉普拉斯变换的性质；
5. 单边拉普拉斯变换；
6. 利用单边拉氏变换分析增量线性系统；

8.0 引言 (Introduction):

傅里叶分析方法在信号与LTI系统分析中如此有用，很大程度上是因为相当广泛的信号都可以表示成复指数信号的线性组合，而**复指数函数是一切 LTI 系统的特征函数。**

将傅里叶变换推广到更一般的情况就是本章及下一章要讨论的中心问题。

通过本章及下一章，会看到拉氏变换和Z变换不仅具有很多与傅里叶变换相同的重要性质，不仅能适用于用傅里叶变换的方法可以解决的信号与系统分析问题，而且还能解决傅里叶分析方法不能适用的许多方面。

拉氏变换与Z变换的分析方法是傅里叶分析方法的推广，傅里叶分析是它们的特例。

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$f(t) = e^{\alpha t} u(t)$ $\alpha > 0$ 的傅里叶变换?

不存在!

将 $f(t)$ 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$

$$F[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$\text{令 } s = \sigma + j\omega \quad = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt$$

若 $\sigma > \alpha$

$$= \frac{1}{s - \alpha}$$

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

推广到一般情况

$$F[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$\text{令 } s = \sigma + j\omega \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

● 定义: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

拉普拉斯正变换

对 $f(t)e^{-\sigma t}$ 求傅里叶反变换可推出

拉普拉斯反变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

8.1 拉普拉斯变换 (The Laplace Transform)

复指数信号 e^{st} 是一切连续时间LTI系统的特征函数。如果LTI系统的单位冲激响应为 $h(t)$ ，则系统对 e^{st} 产生的响应是：

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

其中
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

当 $s = j\Omega$ 时，就是连续时间傅里叶变换。

一. 定义:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

称为 $x(t)$ 的**双边拉氏变换**。其中 $s = \sigma + j\Omega$

若 $\sigma = 0$, $s = j\Omega$ 则:

$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$ 就是 $x(t)$ 的傅里叶变换。

表明: **连续时间傅里叶变换是拉氏变换在 $\sigma = 0$,
或是在 $j\Omega$ 轴上的特例。**

由于

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \mathbb{F}[x(t)e^{-\sigma t}] \end{aligned}$$

所以拉氏变换是对傅里叶变换的推广， $x(t)$ 的拉氏变换就是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。只要有合适的 σ 存在，就可以使某些本来不满足狄里赫利条件的信号，在引入 $e^{-\sigma t}$ 后满足该条件。即有些信号的傅氏变换不收敛而它的拉氏变换存在。因此，**拉氏变换比傅里叶变换有更广泛的适用性。**

如果 $X(s)$ 在 $s = j\Omega$ 收敛, 则有:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$\therefore X(s) \Big|_{s=j\Omega} = X(j\Omega)$$

表明傅立叶变换就是拉氏变换在 $j\Omega$ 轴上的表现。

由傅立叶反变换有:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{\sigma t} e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{st} d\Omega$$

由 $s = \sigma + j\Omega$ 得 $ds = jd\Omega$

当 Ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 时, s 从 $\sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad \text{—— 拉氏反变换}$$

拉氏变换的物理含义:

$x(t)$ 可以被分解成复振幅为 $\frac{1}{2\pi j} X(s)ds$
的复指数信号 e^{st} 的线性组合。

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

8.2 拉氏变换的收敛域 (Region of Convergence)

一. 收敛域ROC:

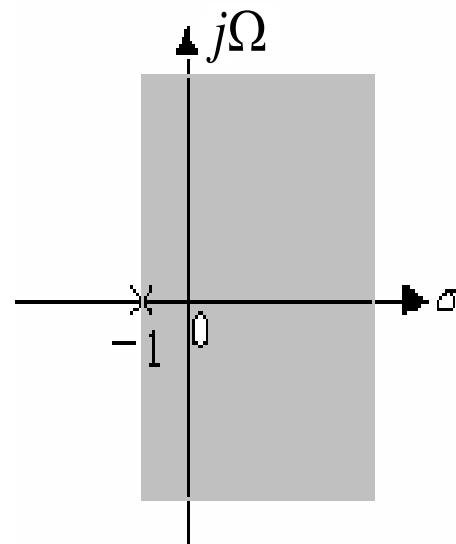
使 $X(s)$ 存在的 s 的取值范围称为 $X(s)$ 的收敛域。

由于 $X(s) = F[x(t)e^{-\sigma t}]$, \therefore ROC 与 σ 有关, 它就是使 $x(t)e^{-\sigma t}$ 绝对可积的那些 σ 的取值范围。这表明 ROC 由 $\text{Re}[s]$ 决定。

例1. $x(t) = e^{-t}u(t)$

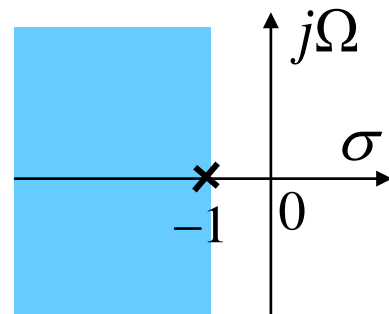
$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt$$

$$= \frac{1}{s+1} \quad (\sigma > -1)$$



例2. $x(t) = -e^{-t}u(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+1)t} dt = \frac{1}{s+1} \quad (\sigma < -1)$$



我们看到：两个不同的信号具有相同的拉氏变换式，只是它们的ROC不同。这表明：**拉氏变换式连同ROC才能与信号建立一一对应的关系。**

例3. $x(t) = e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$

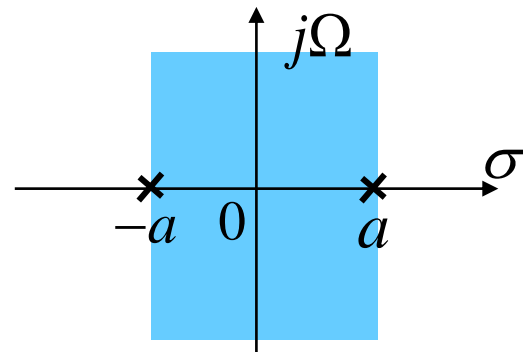
$$X(s) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}$$

• 当 $a > 0$ 时，这两个积分的收敛域有共同部分 $(\sigma < a), (\sigma > -a)$

域有共同部分 $-a < \sigma < a$

此时 $X(s)$ 存在。

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$



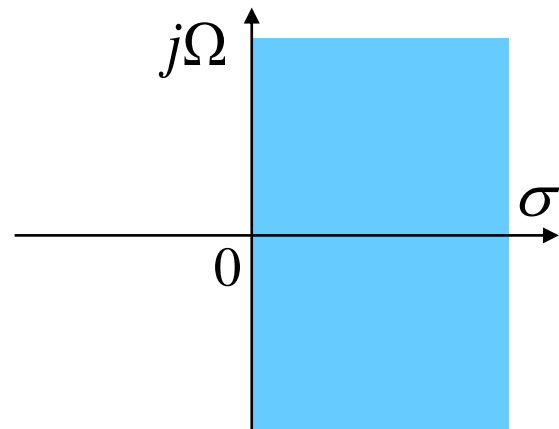
- 当 $a < 0$ 时，这两个ROC无公共区域 $X(s)$ 不存在。

结论： 1. 拉氏变换虽然是付氏变换的推广，但并非任何信号的拉氏变换都存在。

2. 同时可以看到ROC通常是一个平行于 $j\Omega$ 轴的带形区域。

例4. $x(t) = u(t)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad \sigma > 0$$



例5. $x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1 \quad \text{ROC为整个S平面}$$

• 当 $X(s)$ 的ROC包括 $j\Omega$ 轴时, $X(j\Omega)$ 存在, 且有:

$$X(j\Omega) = X(s) \Big|_{s=j\Omega}$$

例如: $x(t) = e^{-t}u(t)$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + 1} = \frac{1}{s + 1} \Big|_{s=j\Omega}$$

• 当 $X(s)$ 的ROC不包含 $j\Omega$ 轴时, $X(j\Omega)$ 可能不存在。
一般地说, 如果ROC不包含 $j\Omega$ 轴, $j\Omega$ 轴也不是ROC的边界时, $X(j\Omega)$ 不存在, 例如:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t), \quad X(s) = \frac{1}{s+1}, (\sigma < -1)$$

由于ROC不包含 $j\Omega$ 轴，因此 $X(j\Omega)$ 不存在。

• 如果ROC不包含 $j\Omega$ 轴，但 $j\Omega$ 轴是ROC的边界时，可以利用冲激函数表示为：

$$X(j\Omega) = X(s)\Big|_{s=j\Omega} + \pi \sum_{k=1}^N a_k \delta(\Omega - \Omega_k)$$

假定 $X(s)$ 在 $j\Omega$ 轴上有 N 个极点 s_k ，也即 $X(s)$ 分母的根， $s_k = j\Omega_k$ ， a_k 是 $X(s)$ 在极点 s_k 处的留数，

如： $x(t) = u(t)$, $X(s) = 1/s, \sigma > 0$; $\sigma = 0$ 是 ROC 的边界。

$X(s)$ 的极点为 $s=0$ ，极点处的留数为 1。

所以：
$$X(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

二. 拉氏变换的零极点图：

从例子中看到，一般情况下 $X(s)$ 可以表示为两个多项式之比，即

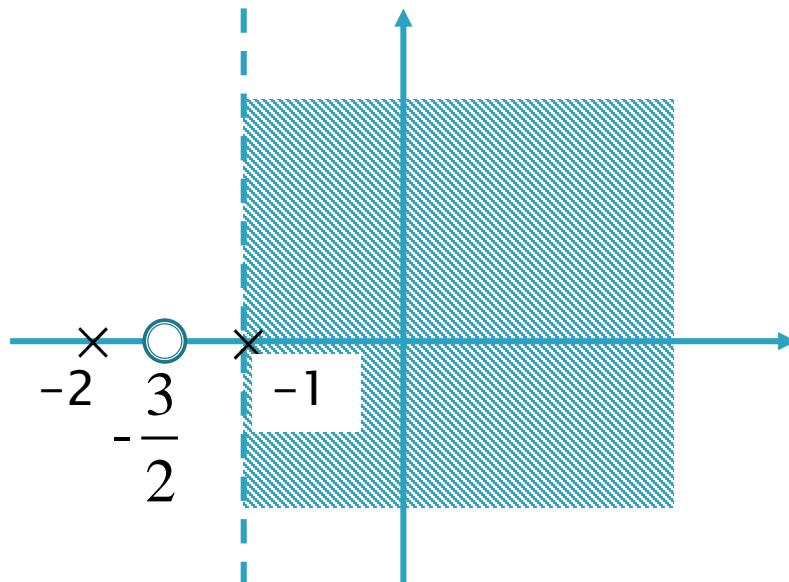
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$

分子多项式的根称为**零点**，分母多项式的根称为**极点**。

将 $X(s)$ 的全部零点和极点表示在 S 平面上，就构成了**零极点图**。

$$X(s) = M \frac{s + 3/2}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$\operatorname{Re}[s] > -1$$



零极点图及其收敛域可以表示一个 $X(s)$ ，最多与真实的 $X(s)$ 相差一个因子 M 。

因此，**零极点图是拉氏变换的图示方法。**

三. ROC的特征:

从例子可以归纳出ROC的以下性质:

1. ROC是 S 平面上平行于 $j\Omega$ 轴的带形区域。
2. 在ROC内无任何极点。
3. 时限信号的ROC是整个 S 平面。
4. 右边信号的ROC是 S 平面内某一条平行于 $j\Omega$ 轴的直线的右边。

说明：若 $x(t)$ 是右边信号, $T \leq t < \infty$, σ_0 在 ROC 内, 则有 $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ 绝对可积, 即:

$$\int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

若 $\sigma_1 > \sigma_0$, 则 $\int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt$

$$= \int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt$$

$$\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

$\therefore \sigma_1$ 也在收敛域内

5. 左边信号的**ROC**是 S 平面内的一条平行于 $j\Omega$ 轴的直线的左边。

说明：若 $x(t)$ 是左边信号，定义于 $(-\infty, T]$ ， σ_0 在 ROC 内， $\sigma_1 < \sigma_0$ ，则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt &= \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty\end{aligned}$$

$\therefore \sigma_1$ 也在收敛域内。

6. 双边信号的**ROC**如果存在，一定是 S 平面内平行于 $j\Omega$ 轴的带形区域。

例1.

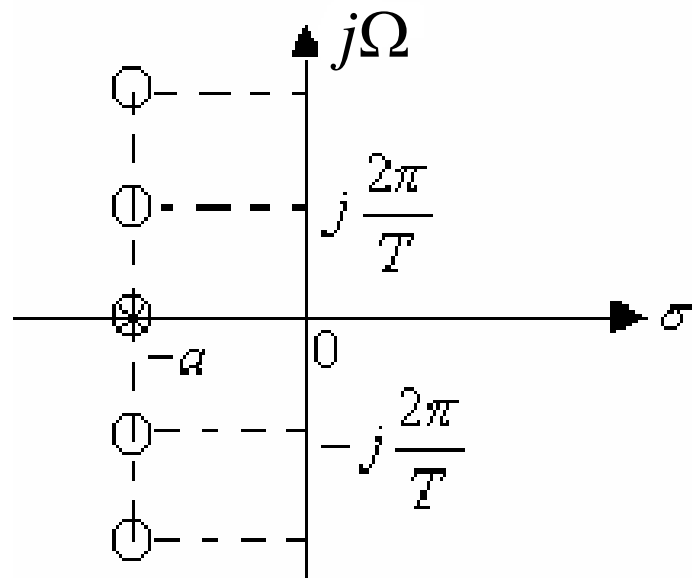
$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & \text{其它 } t \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^T e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

$X(s)$ 有极点 $s = -a$ ，考查零点，令 $e^{-(s+a)T} = 1$

得 $s = -a + j \frac{2\pi}{T} k$



显然在 $s = -a$ 也有一阶零点，由于零极点相抵消，致使整个 S 平面上无极点。

当 $X(s)$ 是有理函数时，其ROC总是由 $X(s)$ 的极点分割的。ROC必然满足下列规律：

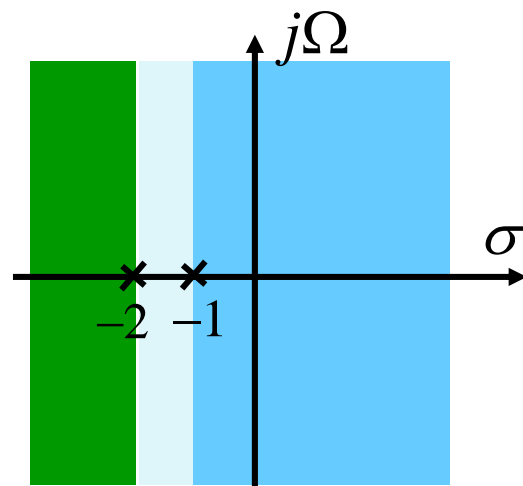
1. 右边信号的ROC一定是 $X(s)$ **最右边极点的右边。**
2. 左边信号的ROC一定是 $X(s)$ **最左边极点的左边。**
3. 双边信号的ROC可以是任意两相邻极点之间的**带形区域。**

例2.
$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$X(s)$ 的极点: $s = -1, s = -2$

$X(s)$ 可以形成三种 ROC:

1. **ROC:** $\text{Re}[s] > -1$ 此时 $x(t)$ 是
右边信号。
2. **ROC:** $\text{Re}[s] < -2$ 此时 $x(t)$ 是
左边信号。
3. **ROC:** $-2 < \text{Re}[s] < -1$ 此时 $x(t)$
是双边信号。



- 根据极点分布和ROC的特征, 可以判断信号的种类。

8.3 拉氏变换的性质

(Properties of the Laplace Transform)

- 拉氏变换与傅氏变换一样具有很多重要的性质。这里只着重于ROC的讨论。

1. 线性 (Linearity) :

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$, ROC: R_1

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$, ROC: R_2

则 $ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$

ROC: 至少是 $R_1 \cap R_2$

例. $x_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$ $x_2(t) = -e^{-t}u(t)$

$$X_1(s) = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1$$

而 $x_1(t) + x_2(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1$, **ROC为整个S平面。**

- **当 R_1 与 R_2 无交集时, 表明 $X(s)$ 不存在。**

2. 时移性质 (Time Shifting) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R

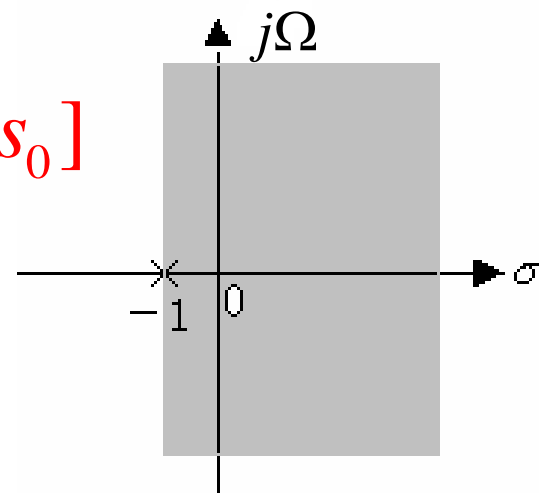
则 $x(t-t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$, **ROC不变**

3. S域平移 (Shifting in the s-Domain) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R 则,

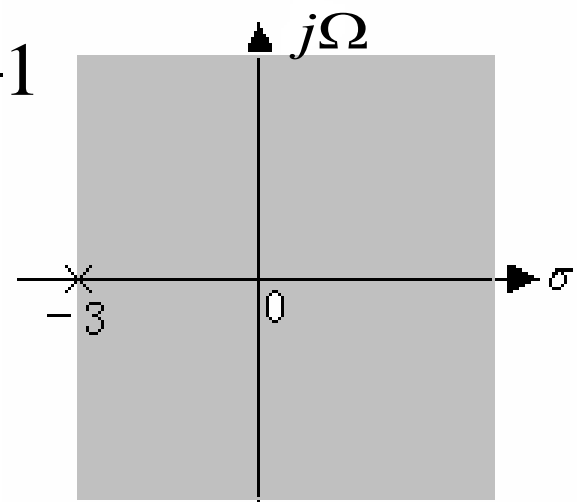
$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s - s_0), \text{ROC: } R + \text{Re}[s_0]$$

表明 $X(s - s_0)$ 的 ROC 是将 $X(s)$ 的 ROC 平移了一个 $\text{Re}[s_0]$ 。



例. $x(t) = e^{-t} u(t)$, $X(s) = \frac{1}{s+1}$, $\sigma > -1$

$$x(t) \cdot e^{-2t} = e^{-3t} u(t) \leftrightarrow X(s+2) = \frac{1}{s+3}$$



显然

$$\text{ROC: } \sigma > -3$$

4. 时域尺度变换 (Time Scaling) :

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R

则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ ROC: aR

当 $\sigma \in R$ 时 $X(s)$ 收敛, 当 $\operatorname{Re}\left[\frac{s}{a}\right] \in R$ 时 $X\left(\frac{s}{a}\right)$ 收敛。

$$\therefore \operatorname{Re}[s] \in a \cdot R$$

例. $x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}$, $\sigma > -1$

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = e^{-t/2}u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2s + 1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -\frac{1}{2}$$

即，若信号在时域尺度变换，拉氏变换的ROC在S平面上作相反的尺度变换。

特例： $x(-t) \leftrightarrow X(-s)$, ROC: $-R$

5. 卷积性质 (Convolution Property) :

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$, ROC: R_1

$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$, ROC: R_2 则

$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$ ROC: **包括** $R_1 \cap R_2$

例. $X_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $\sigma > -1$, $X_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$, $\sigma > -2$,

$$R_1 \cap R_2 = \sigma > -1$$

$$X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2, \quad \text{ROC扩大}$$

当 $X_1(s)X_2(s)$ 有零极点抵消时，ROC可能会扩大。

卷积特性是LTI系统复频域分析的理论基础。

6. 时域微分：(Differentiation in the Time Domain)

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R

则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)$, ROC包括 R , 有可能扩大。

当 $X(s)$ 在 $s=0$ 有一阶极点，且该极点位于ROC边界上时，由于 s 的引入将消去该极点，从而使ROC扩大。

例: $x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\sigma > -1)$

$$x'(t) \leftrightarrow \frac{s}{s+1} \quad (\sigma > -1) \quad \text{(ROC不变)}$$

例: $x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0)$

$$x'(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \text{ROC: 整个S平面}$$

7. 时域积分: (Integration in the Time Domain)

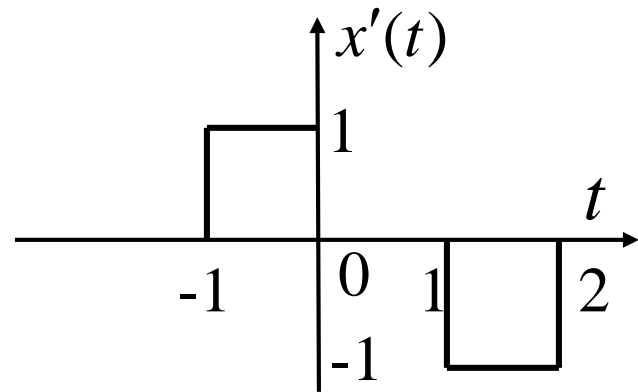
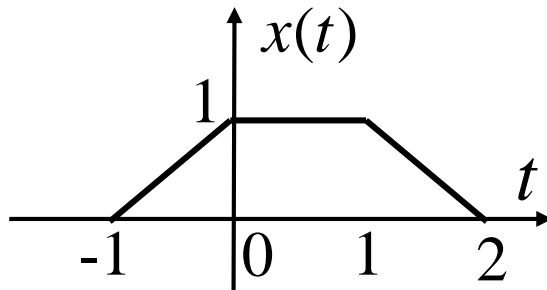
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \quad \text{ROC: 包括 } R \cap (\sigma > 0)$$

$$\because \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \quad u(t) \leftrightarrow 1/s \quad (\sigma > 0)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC: } \mathbf{R}$$

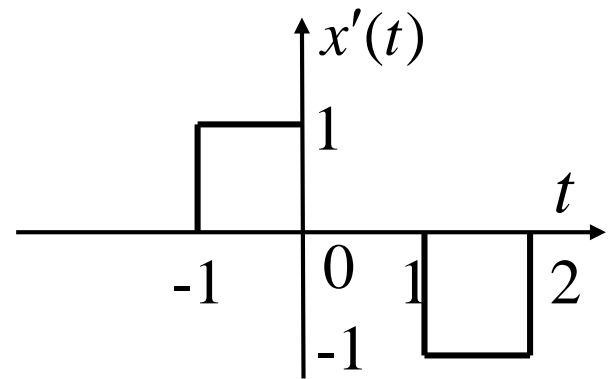
$$\therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC包括 } R \cap (\sigma > 0)$$

例:



$$x'(t) = [u(t+1) - u(t)] - [u(t-1) - u(t-2)]$$

$$x'(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}(e^s - 1) - \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s})$$



$$\begin{aligned} \therefore x(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s^2}(e^s - 1 - e^{-s} + e^{-2s}) \\ &= \frac{1}{s^2}(e^s - 1)(1 - e^{-2s}) \end{aligned}$$

在 $s=0$ 有二阶零点与二阶极点相抵消，因此，ROC为整个S平面。

8. s域微分：（Differentiation in the s-Domain）

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ 则 $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$ **ROC: R**
ROC: R

$\frac{dX(s)}{ds}$ 只会造成阶数的提高，不会改变极点的位置，
所以**ROC**不变。

例: $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1} \quad (\sigma > -1)$

$$te^{-t}u(t) \leftrightarrow -\left[\frac{1}{s+1}\right]' = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (\sigma > -1)$$

例: $X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$ ROC: $\sigma > -a$ **求** $x(t)$

$$\because \frac{1}{(s+a)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) \quad \therefore x(t) = te^{-at}u(t)$$

9. s域积分: (Integration in the s- Domain)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC: } R$$

$$\frac{1}{t} x(t) \leftrightarrow \int_s^\infty X(s_1) ds_1 \quad \text{ROC: } R$$

证: $X(s_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-s_1 t} dt$

$$\int_s^\infty X(s_1) ds_1 = \int_s^\infty \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-s_1 t} dt ds_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_s^\infty e^{-s_1 t} ds_1 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} x(t) e^{-st} dt$$

$$\therefore \frac{1}{t} x(t) \leftrightarrow \int_s^\infty X(s_1) ds_1$$

10. 初值定理： (The Initial-Value Theorem)

若因果信号 $x(t)$ 在 $t=0$ 无奇异函数， $x(t) \leftrightarrow X(s)$

且 $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ 存在，则 $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

证： $\because t < 0$ 时 $x(t) = 0$ ，且在 $t = 0$ 不包含奇异函数。

$$\therefore x(t) = x(t)u(t)$$

将 $x(t)$ 在 $t = 0^+$ 展开为Telory级数有：

$$x(t) = \left[x(0^+) + x'(0^+)t + x''(0^+)\frac{t^2}{2} + \cdots + x^{(n)}(0^+)\frac{t^n}{n!} + \cdots \right] u(t)$$

对两边进行拉氏变换：

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} x(0^+) + \frac{1}{s^2} x'(0^+) + \cdots + \frac{1}{s^{n+1}} x^{(n)}(0^+) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0^+) \frac{1}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

条件 $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ 存在，意味着 $x(t)$ 在 $t=0$ 不包含冲激及其导数，在 $t=0$ 确有初值存在。

初值可通过S域的 $\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ 求得，而不需要求 $X(s)$ 的反变换。

11. 终值定理：（The Final-Value Theorem）

若因果信号 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ，且在 $t = 0$ 无奇异函数， $X(s)$ 除在 $s = 0$ 可以有一阶极点外，其余极点均在 S 平面的左半面。 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

证： $\because x(t)$ 是因果信号，且在 $t = 0$ 无奇异函数，

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dx(t) = x(t)e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

$\because X(s)$ 除了在 $s = 0$ 可以有一阶极点外，其它极点均在 S 的左半平面（即保证 $x(t)$ 有终值）。

故 $sX(s)$ 的 ROC 中必包含 $j\Omega$ 轴。

$\therefore s$ 的实部 σ 可以大于零，从而有

$$x(t)e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} = -x(0^+)$$

$$\therefore \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = -x(0^+) + sX(s)$$

当 $s \rightarrow 0$ 时，

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} dx(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^+)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

8.4 常用信号的拉氏变换:

(Some Laplace Transform Pairs)

由 $u(t)$ 或 $\delta(t)$ 的拉氏变换出发, 利用拉氏变换的性质, 可以求出许多常用信号的拉氏变换。

1. $x(t) = -u(-t)$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0) \quad u(-t) \xleftrightarrow{\text{尺度}} -\frac{1}{s} \quad (\sigma < 0)$$

$$\therefore -u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\sigma < 0)$$

2. $x(t) = e^{-at} u(t)$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0) \quad \text{由S域平移有} \quad e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (\sigma > -a)$$

$$3. \quad x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0) \quad u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s} \quad (\sigma < 0)$$

$$\text{由S域平移有: } -e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (\sigma < -a)$$

$$4. \quad x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (\sigma > -a) \quad e^{at}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a} \quad (\sigma < a)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2} \quad (-a < \sigma < a)$$

偶信号 \longleftrightarrow $X(s)$ 偶函数

若 $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$ 奇信号 ($a > 0$)

$$X(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2s}{s^2 - a^2} \quad (-a < \sigma < a)$$

奇信号 \longleftrightarrow $X(s)$ 奇函数

5. $x(t) = \cos \Omega_c t \cdot u(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_c t} + e^{-j\Omega_c t}) u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\Omega_c} + \frac{1}{s + j\Omega_c} \right) = \frac{s}{s^2 + \Omega_c^2} \quad (\sigma > 0)$$

$$x(t) = \sin \Omega_c t \cdot u(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2j} (e^{j\Omega_c t} - e^{-j\Omega_c t}) u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\Omega_c} - \frac{1}{s + j\Omega_c} \right) = \frac{\Omega_c}{s^2 + \Omega_c^2} \quad (\sigma > 0)$$

6. $x(t) = e^{-at} \cos \Omega_c t \cdot u(t)$

由5.再次利用s域平移性质可得:

$$X(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \Omega_c^2} \quad (\sigma > -a)$$

$$7. x(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} u(t)$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (\sigma > -a) \quad \text{由s域微分性质有:}$$

$$te^{-at} u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad (\sigma > -a)$$

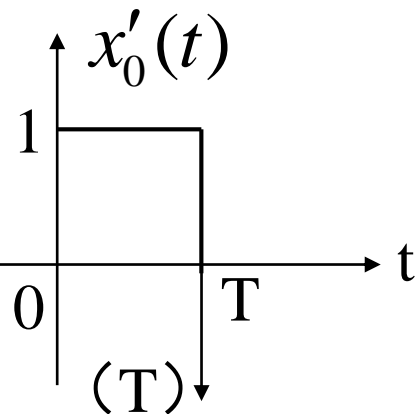
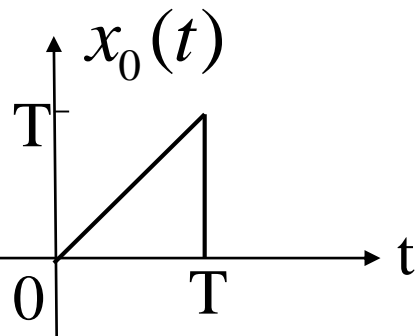
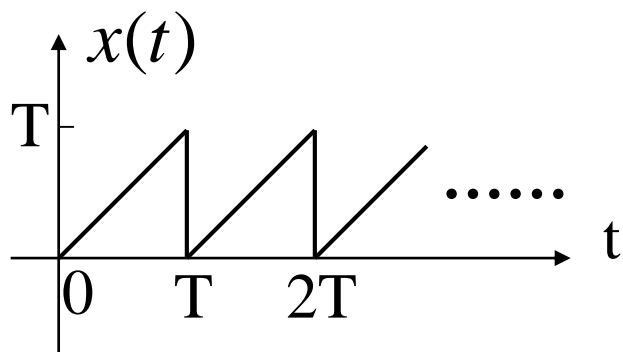
$$\frac{1}{2} t^2 e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^3} \quad (\sigma > -a)$$

$$\vdots$$

$$\therefore \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n} \quad (\sigma > -a)$$

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, 有: } \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^n} \quad (\sigma > 0)$$

例1.



$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0(t - nT)$$

$$x_0(t) = t[u(t) - u(t - T)]$$

$$x'_0(t) = u(t) - u(t - T) - T\delta(t - T)$$

$$\hat{X}_0(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) - Te^{-sT}$$

$$X_0(s) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT}) - \frac{T}{s} e^{-sT}$$
$$= \frac{1}{s} \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} - T e^{-sT} \right) \quad (\text{括号中第一项无极点})$$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} X_0(s) e^{-nsT} = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-sT}} \quad (\sigma > 0)$$

8.5 拉氏反变换: (The Inverse Laplace Transform)

当 $X(s)$ 是有理函数时, 通常利用部分分式展开法做拉氏反变换。

若 $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, 当 $N(s)$ 的阶数低于 $D(s)$ 的阶数时, 称为有理真分式。可直接将其展开成部分分式。当 $N(s)$ 的阶数大于或等于 $D(s)$ 的阶数时, 先长除, 再将余式展开成部分分式。

各分式均只有一个极点，其ROC不是该极点的右边就是它的左边。确定的原则是**各分式ROC的公共部分应符合 $X(s)$ ROC的要求。**

此时， $X(s)$ 可展开为
$$X(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}$$

对其每一项分别做反变换即可得到 $x(t)$ 。

部分分式展开法是做拉氏反变换的主要方法。

例1: $X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \quad ROC: -2 < \text{Re}\{s\} < -1$

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$
$$= \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

例: $X(s) = \frac{8s - 16}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$ $(\sigma > -1)$

$$X(s) = \frac{8s - 16}{(s + 1)(s + 3)(s + 5)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 3} + \frac{C}{s + 5}$$

$$A = X(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{8s - 16}{(s + 3)(s + 5)} \Big|_{s=-1} = -3$$

$$B = X(s)(s + 3) \Big|_{s=-3} = \frac{8s - 16}{(s + 1)(s + 5)} \Big|_{s=-3} = 10$$

$$C = X(s)(s+5) \Big|_{s=-5} = \frac{8s-16}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-5} = -7$$

$$X(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{10}{s+3} + \frac{-7}{s+5} \quad (\sigma > -1)$$

$\sigma > -1$ $\sigma > -3$ $\sigma > -5$

$$\therefore x(t) = (-3e^{-t} + 10e^{-3t} - 7e^{-5t})u(t)$$

当 $X(s)$ 有复数极点、重阶极点时，部分分式的展开见教材附录。

8.6 连续时间LTI系统的复频域分析： (Continuous-Time LTI System Analysis in s-Domain)

一. 复频域分析法：

$$\begin{array}{ccc} y(t) = x(t) * h(t) \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ Y(s) = X(s)H(s) \end{array} \quad \text{ROC: 包括 } R1 \cap R2$$

ROC: R1 R2

若系统稳定, $H(s)$ 的ROC包括 $j\Omega$ 轴, 当 $s=j\Omega$ 时,
即有 $Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$

这就是频域分析法。 $H(j\Omega)$ 是系统的频率响应。

$H(s)$ 称为**系统函数或转移函数**。

$$H(s) \leftrightarrow h(t); \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

二. 系统函数的计算:

1. 由LCCDE描述的系统:

对微分方程
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

两边做拉氏变换
$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \text{ 是一个关于 } s \text{ 的有理函数。}$$

由方程得到的 $H(s)$ ，并未给定ROC，需要借助于系统的因果性或稳定性来确定ROC。

- 如果系统稳定，则 $H(j\Omega)$ 存在， $H(s)$ 的ROC必定包含 $j\Omega$ 轴。
 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- 如果系统是因果的，则 $h(t)$ 是右边信号， $H(s)$ 的ROC必为最右边极点的右边。

- 对系统函数是有理函数的因果、稳定系统，其 $H(s)$ 的全部极点必须在 s 平面的左半平面。
- 若系统函数是非有理函数，此结论的逆命题不一定成立。如： $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$ $\sigma > -1$ ，ROC是最右边极点的右边，但 $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$ 系统是非因果的。

2. 由零极点图描述的系统:

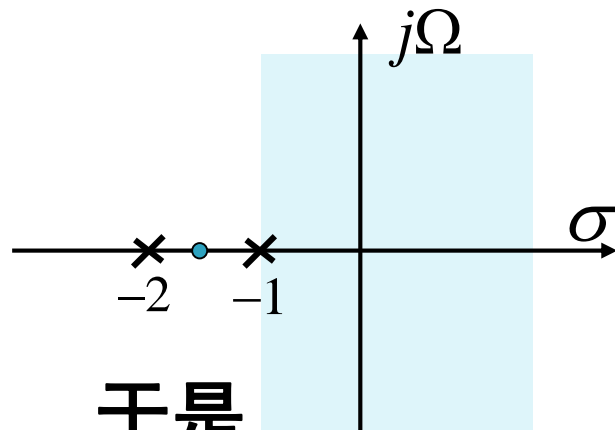
可由零极点图得出 $H(s)$ ，最多差一个常数因子，如果 $H(0)$ 已知，则该常数可以确定。

$H(s)$ 的ROC可由系统的因果性、稳定性确定。

例：某连续时间LTI因果系统的零极点图如下：

由零极点图可写出：

$$H(s) = M \frac{(s + \frac{3}{2})}{(s + 1)(s + 2)}$$



若已知 $H(0) = 1$ ，则可得 $M = 2$ ， 于是

$$H(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}$$

ROC: $(\sigma > -1)$

例2 判断下述因果系统是否稳定。

$$H_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

解： 1) 极点为 $s = -1$ 和 $s = -2$ ，都在 s 左半平面。

若激励为有界输入 $u(t)$ ，则其输出为

$$Y_1(s) = F(s)_1 H(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

$$y_1(t) = L^{-1}[Y_1(s)] = \left(\frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

显然输出也有界，系统稳定。

例2 判断下述系统是否稳定。

$$H_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$H_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

解： 2) 极点为 $s = \pm j\omega_0$ ，是虚轴上的一对共轭极点。

若激励为有界输入 $\sin(\omega_0 t)u(t)$ ，则其输出为

$$Y_2(s) = F(s)H_2(s) = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)} \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

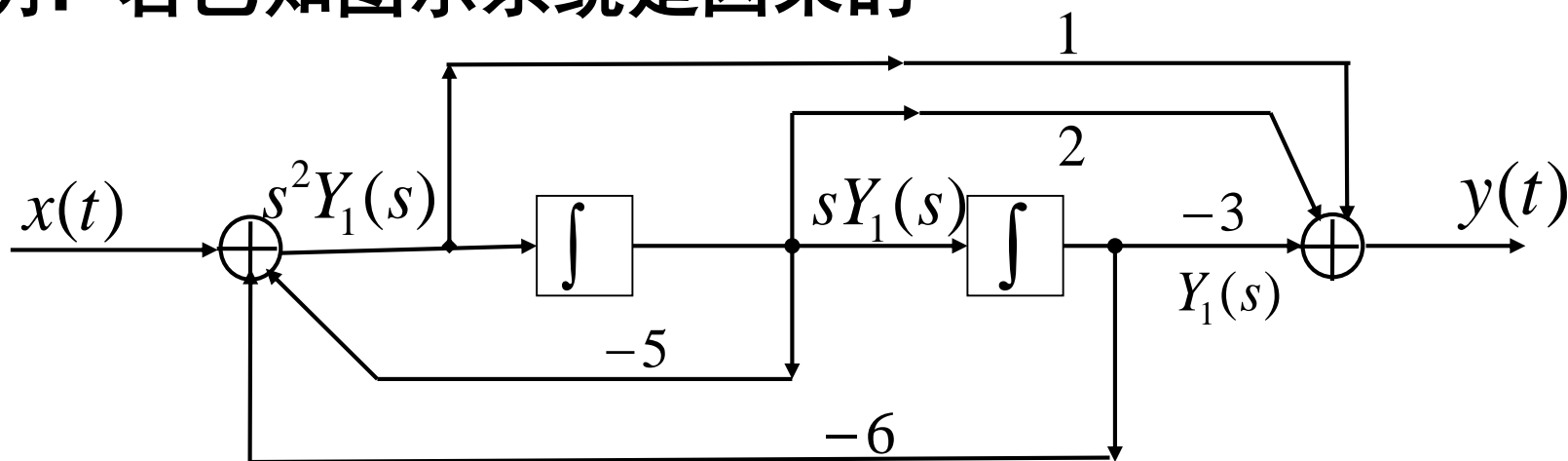
$$y_2(t) = L^{-1}[Y_2(s)] = \frac{1}{2} t \sin(\omega_0 t) u(t)$$

显然，输出不是有界信号，所以系统不稳定。

3. 由方框图描述的系统：

方框图与LCCDE是可以互相转换的，可以由方框图写出LCCDE进而得出 $H(s)$ ，也可直接由方框图写出 $H(s)$ 。然后再根据系统的因果、稳定性确定ROC。

例：若已知图示系统是因果的



$$Y(s) = -3Y_1(s) + 2sY_1(s) + s^2Y_1(s) \quad (1)$$

$$s^2Y_1(s) = X(s) - 5sY_1(s) - 6Y_1(s) \quad (2)$$

由 (2) 得
$$Y_1(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 5s + 6}$$

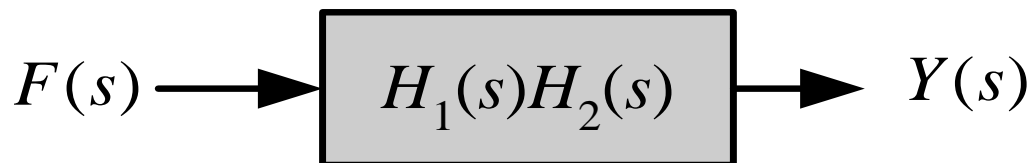
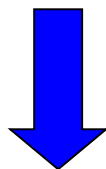
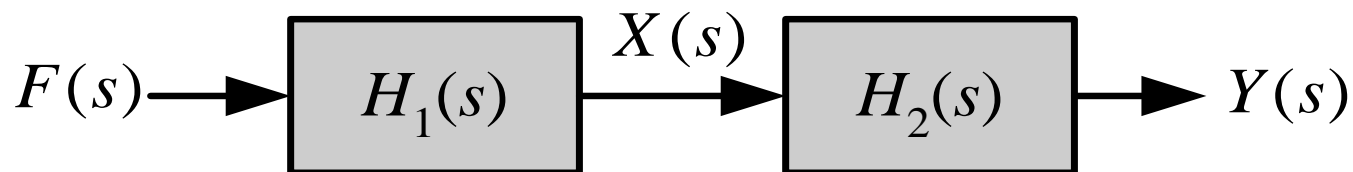
代入 (1) 得:
$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 5s + 6} \cdot X(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 5s + 6} \quad \sigma > -2$$

对于由方框图描述的系统，通常总是分别对两个加法器的输出端列写方程。然后设法消去所设的中间变量，得到一个输入—输出方程，进而可得出系统函数。

三. 系统的级联与并联结构

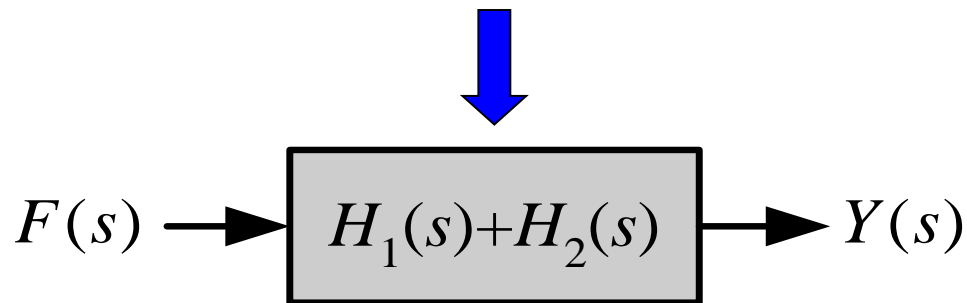
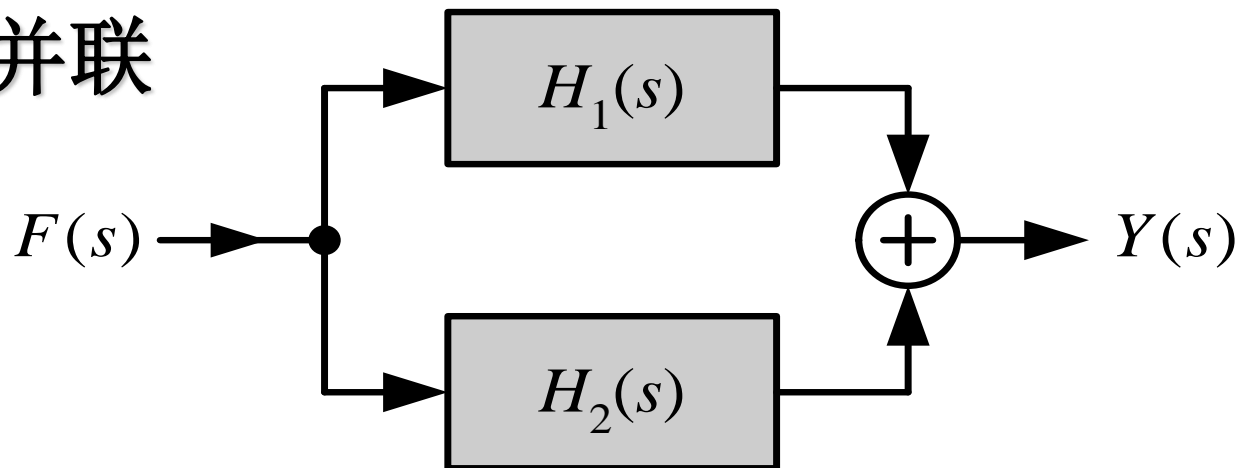
1. 系统的级联



$$Y(s) = H_2(s)X(s) = H_2(s)H_1(s)F(s)$$

三. 系统的级联与并联结构

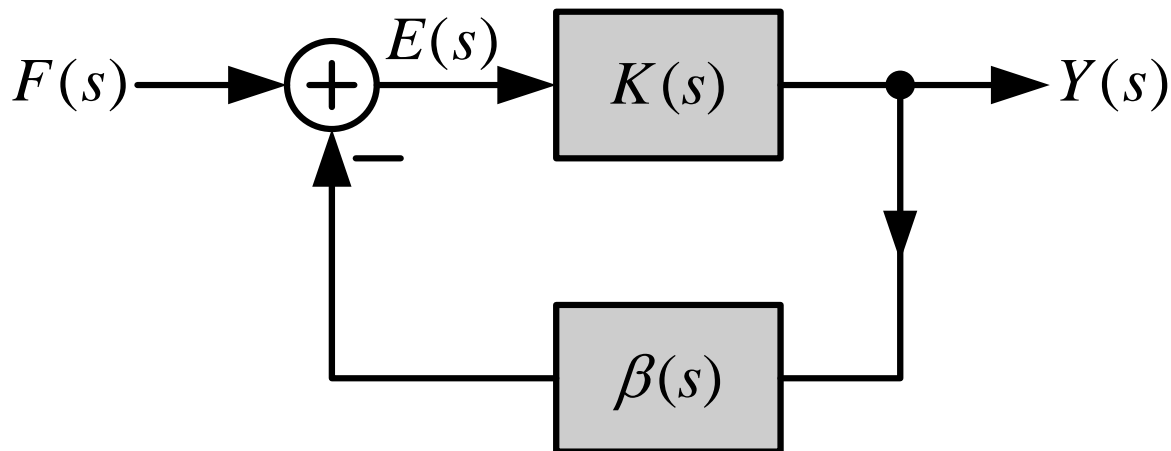
2. 系统的并联



$$Y(s) = H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) = [H_1(s) + H_2(s)]F(s)$$

三. 系统的级联与并联结构

3. 反馈环路



$$Y(s) = E(s)K(s)$$

$$E(s) = F(s) - \beta(s)Y(s)$$

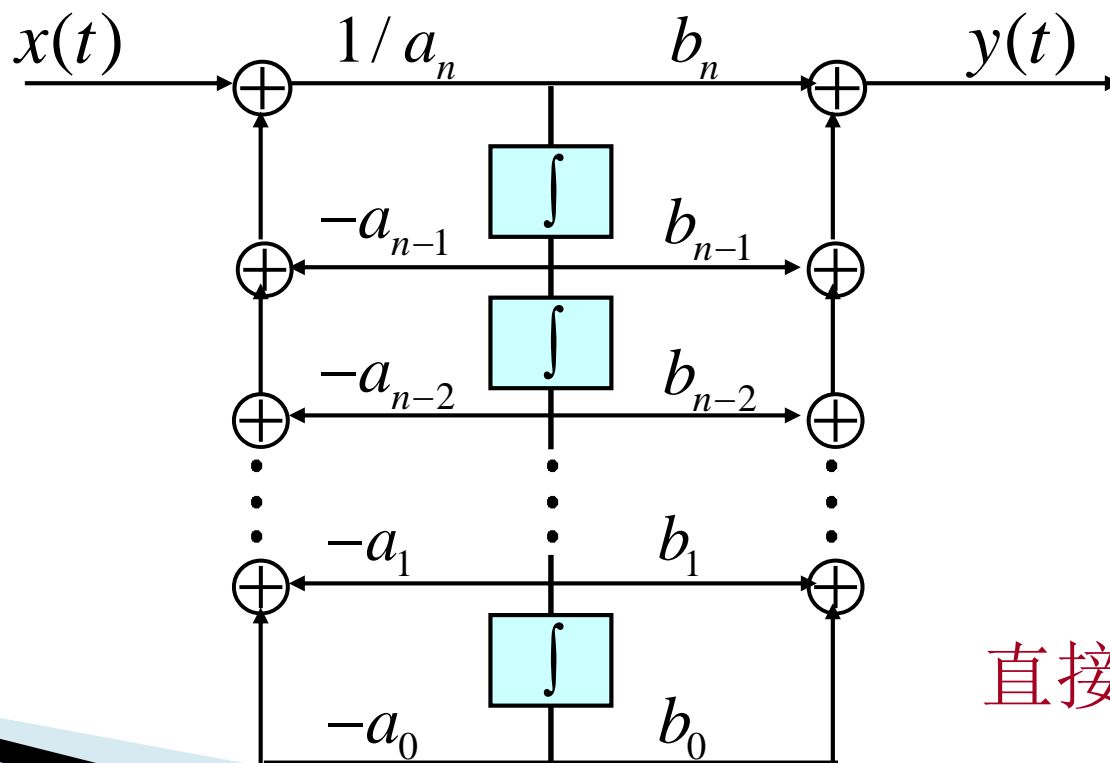
$$Y(s) = \frac{K(s)}{1 + \beta(s)K(s)} F(s)$$

$$H(s) = \frac{K(s)}{1 + \beta(s)K(s)}$$

三. 系统的级联与并联结构

N 阶LTI连续时间系统的系统函数为

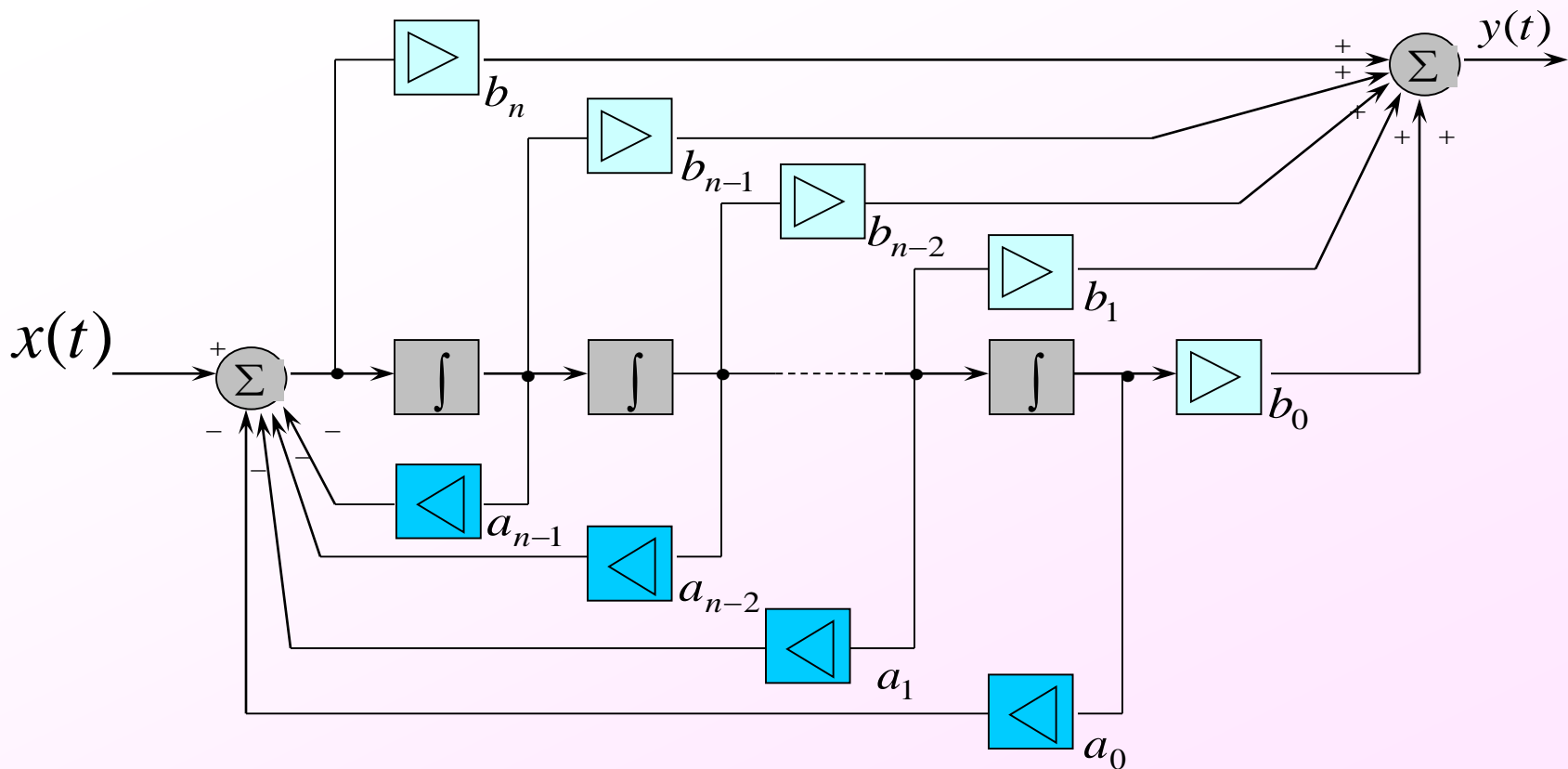
$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$



直接II型

三. 系统的级联与并联结构

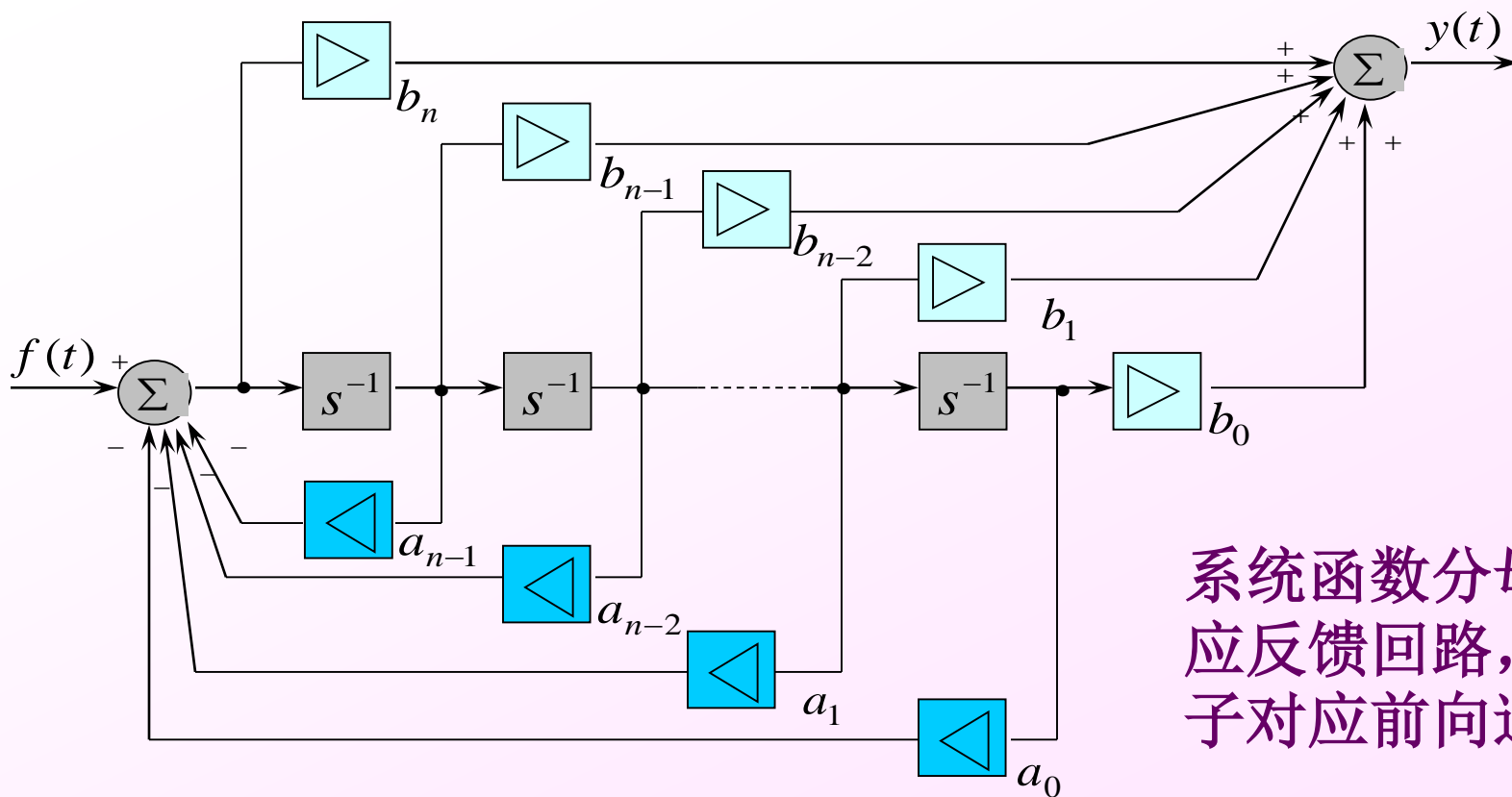
1. 直接型结构



三. 系统的级联与并联结构

直接型结构框图规律

$$H(s) = \frac{b_n + b_{n-1}s^{-1} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n}}$$



系统函数分母对应反馈回路，分子对应前向通路

三. 系统的级联与并联结构

2. 级联型结构

将系统函数分解为一阶或二阶相乘的形式

$$H(s) = H_1(s) H_2(s) \dots H_n(s)$$

画出每个子系统直接型模拟流图，然后将各子系统级联。

三. 系统的级联与并联结构

3. 并联型结构

将系统函数分解为一阶或二阶相加的形式

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \dots + H_n(s)$$

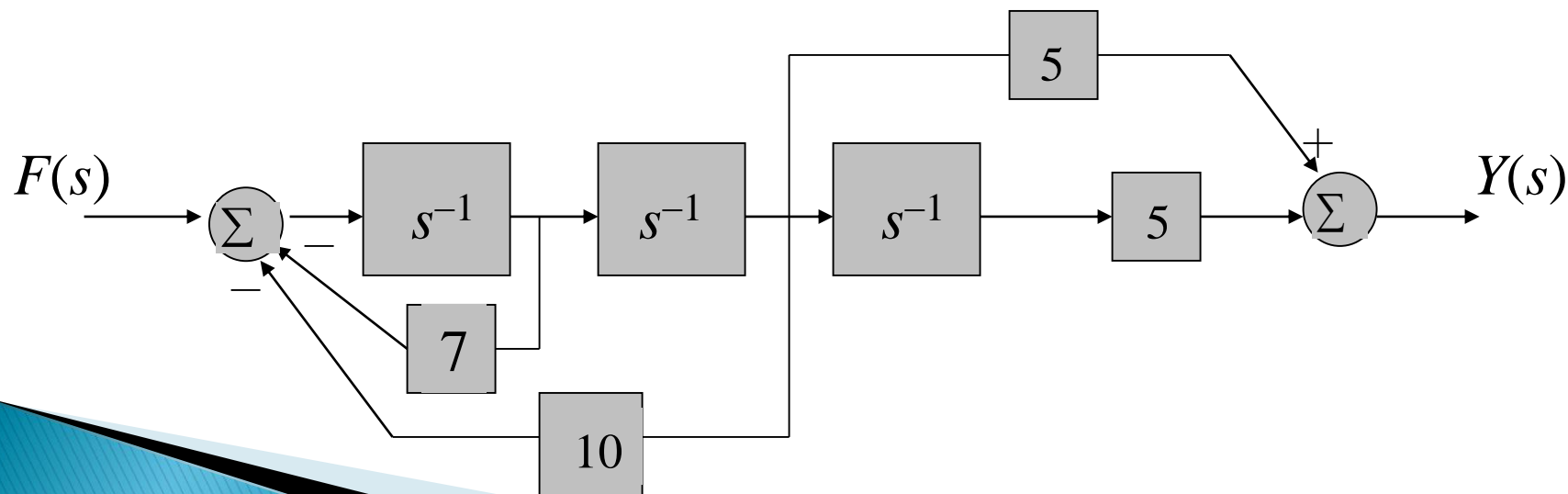
画出每个子系统直接型模拟流图，然后将各子系统并联。

例 画出系统的模拟方框框图

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

解： 1) 直接型框图

$$H(s) = \frac{5s^{-2} + 5s^{-3}}{1 + 7s^{-1} + 10s^{-2}}$$



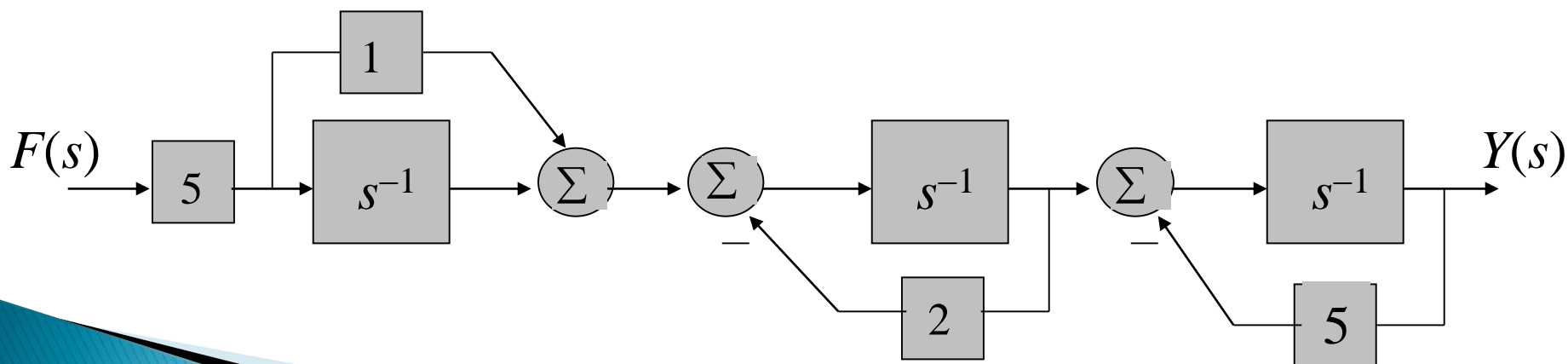
例 画出系统的模拟方框框图

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

解： 2) 级联式

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s} \times \frac{1}{s + 2} \times \frac{1}{s + 5}$$

$$H(s) = (5 + 5s^{-1}) \times \frac{s^{-1}}{1 + 2s^{-1}} \times \frac{s^{-1}}{1 + 5s^{-1}}$$



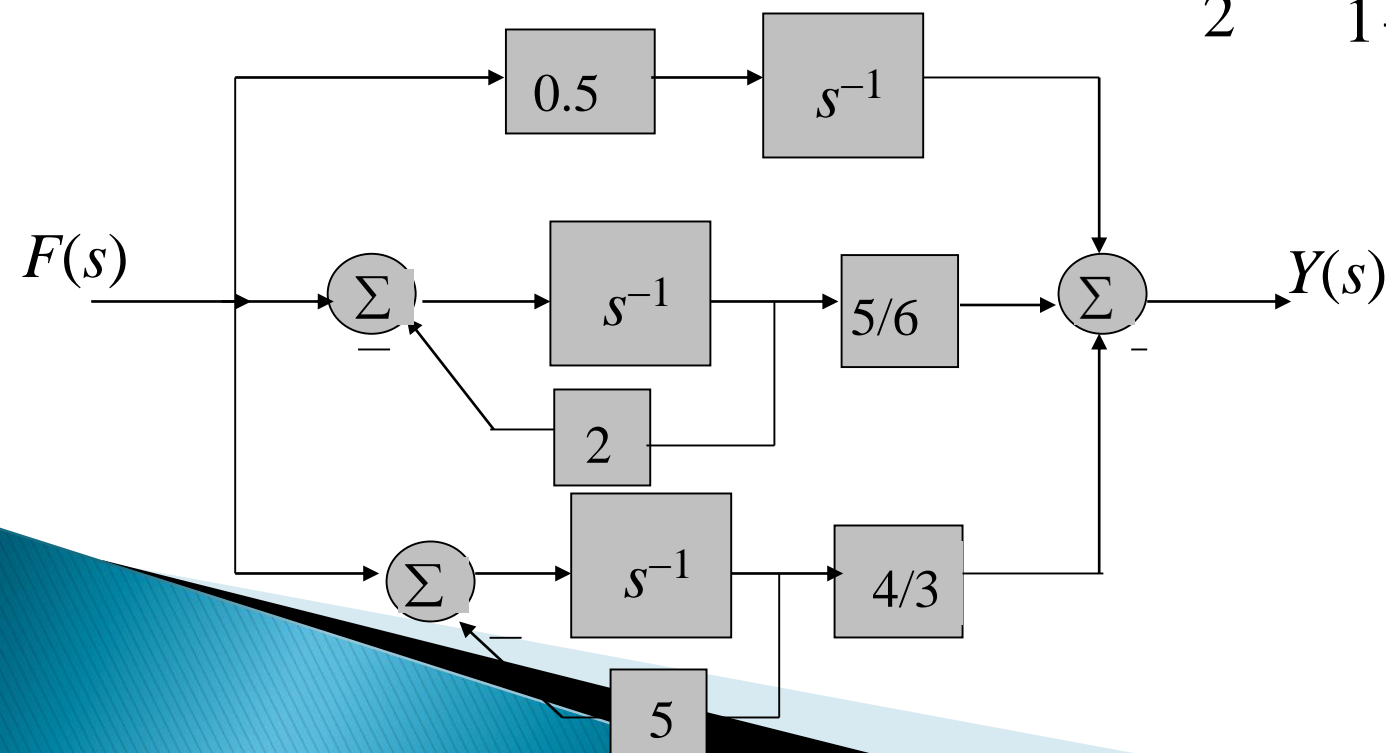
例 画出系统的模拟方框框图

$$H(s) = \frac{5s + 5}{s^3 + 7s^2 + 10s}$$

解： 3) 并联式

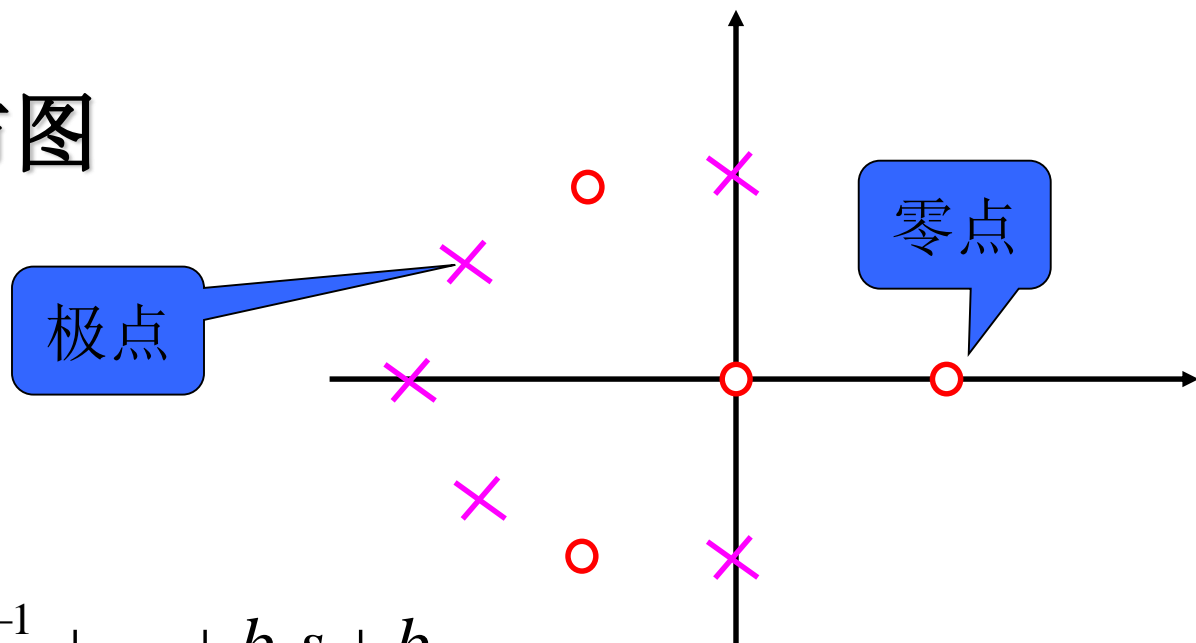
$$H(s) = \frac{1}{2s} + \frac{5}{6s+12} - \frac{4}{3s+15}$$

$$H(s) = \frac{s^{-1}}{2} + \frac{(5/6)s^{-1}}{1+2s^{-1}} - \frac{(4/3)s^{-1}}{1+5s^{-1}}$$



8.7 零极点与时域特性

● 零极点分布图

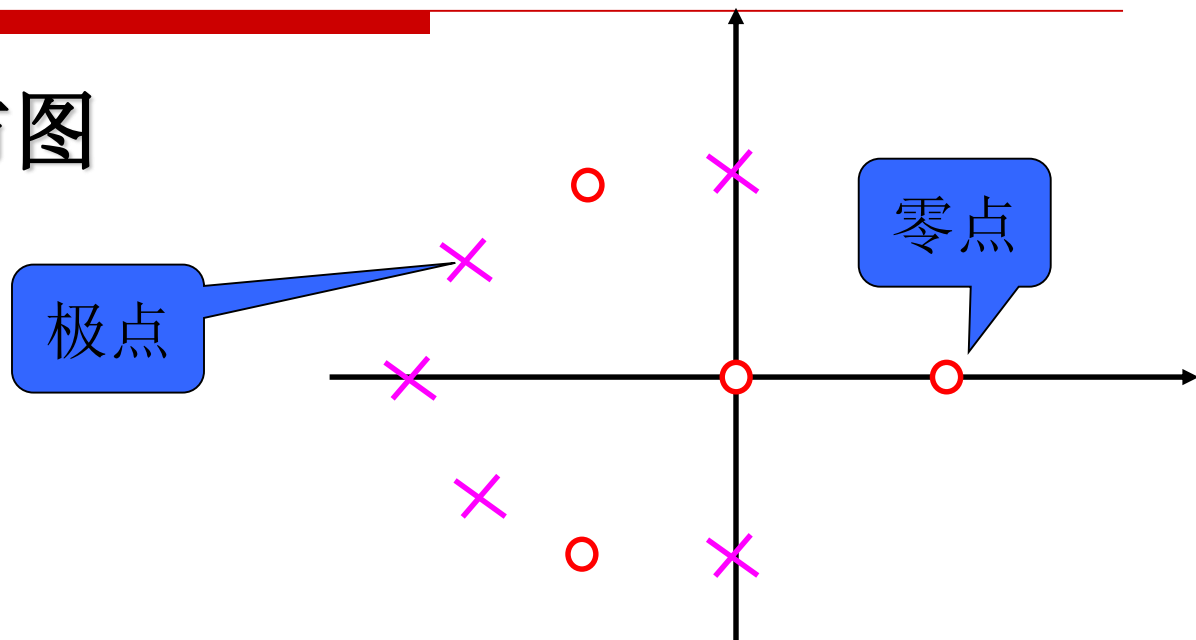


$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$= b_m \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}$$

零极点与时域特性

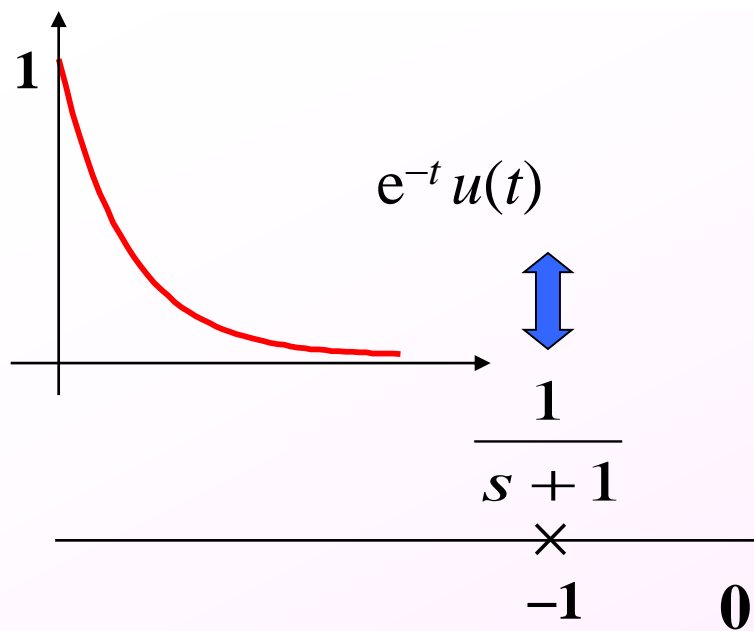
● 零极点分布图



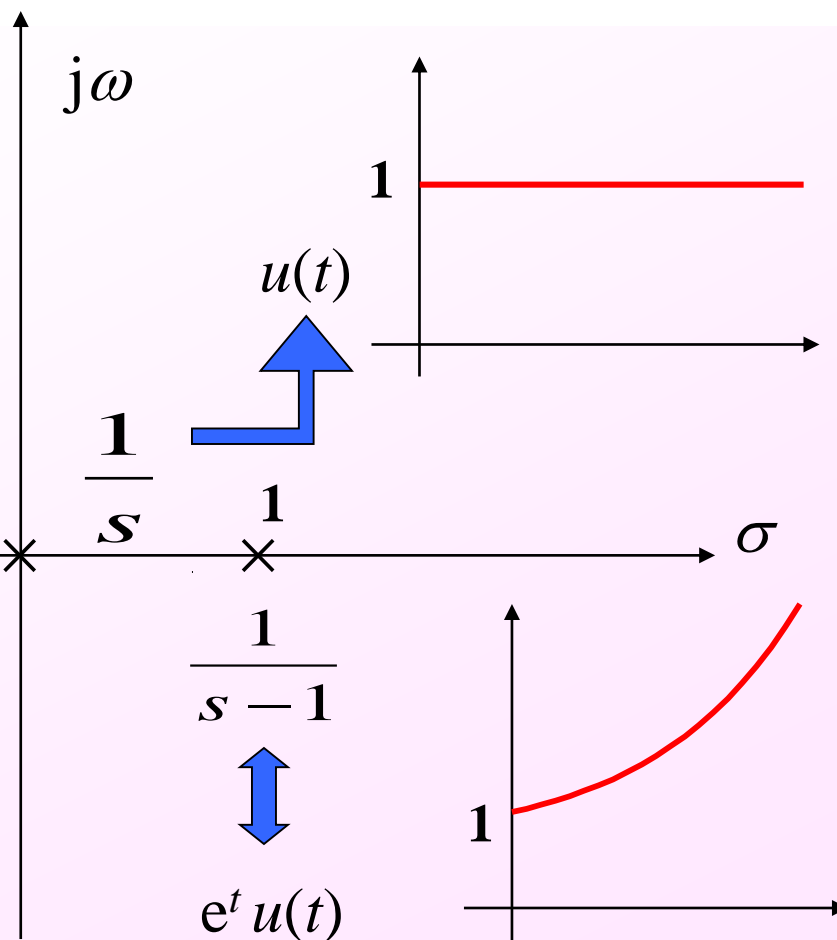
$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} u(t)$$

零极点与时域特性

● $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系

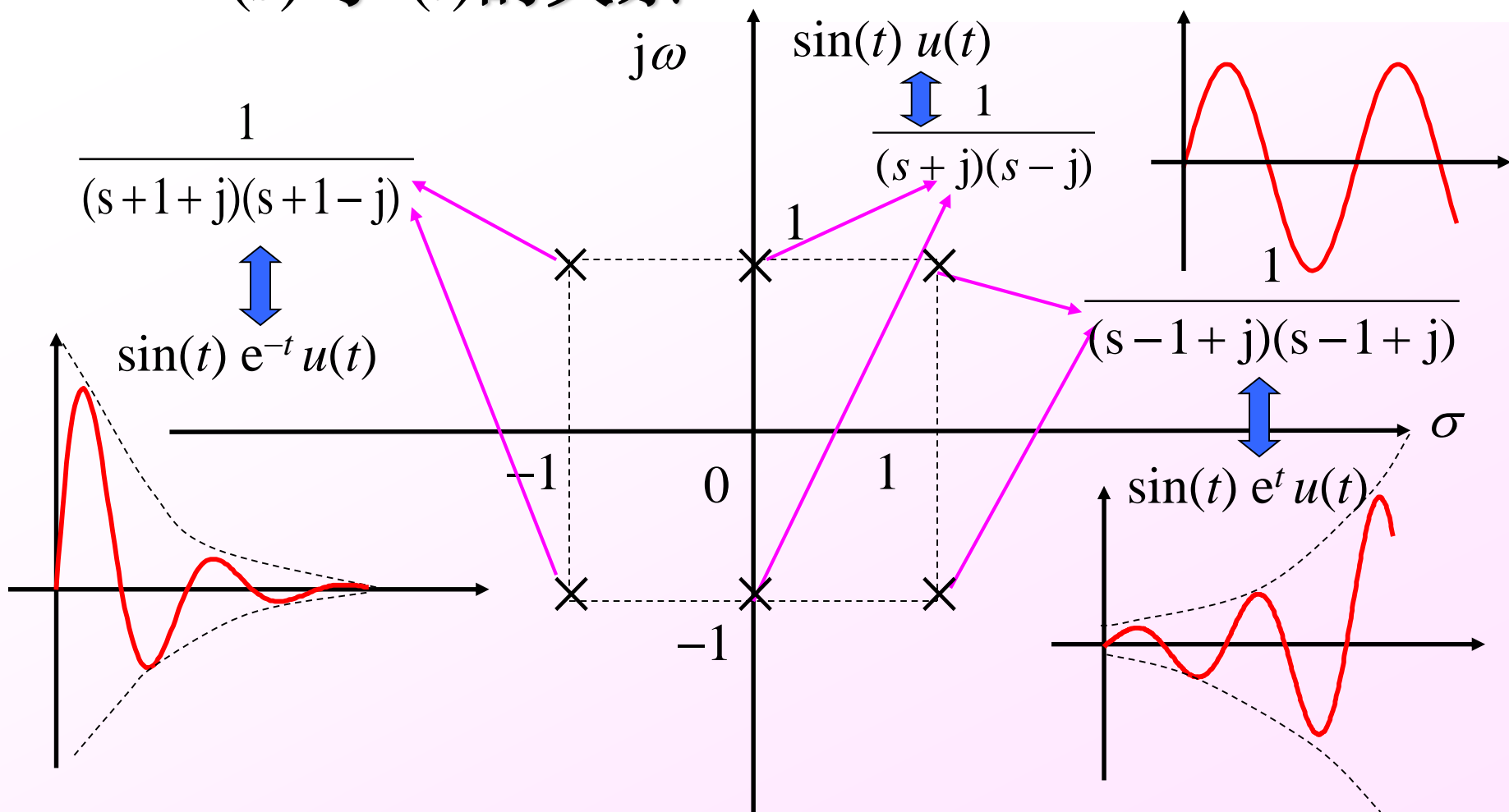


1) 位于 σ 轴的单极点



零极点与时域特性

● $H(s)$ 与 $h(t)$ 的关系



2) 共轭单极点

8.8 零极点与系统的频域特性

频率响应是指系统在正弦信号激励之下稳态响应随信号频率的变化情况。

系统稳定时，令 $H(s)$ 中 $s = j\omega$ ，则得系统频率响应

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\phi(\omega)$$

幅度响应

相位响应

零极点与系统频响特性

● 系统频率响应

对于零极增益表示的系统函数

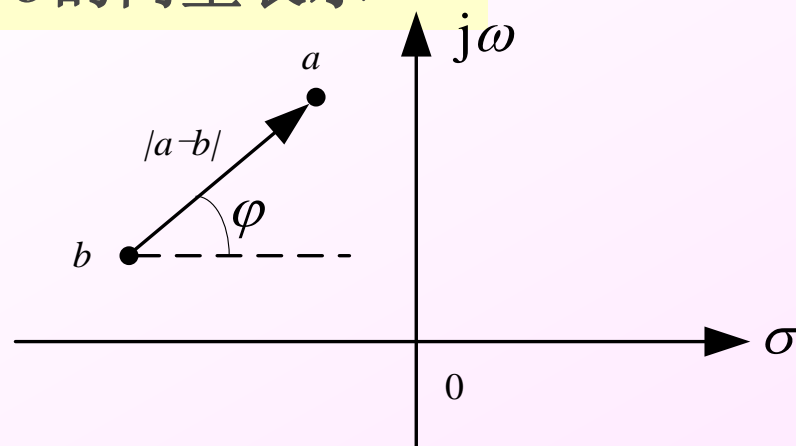
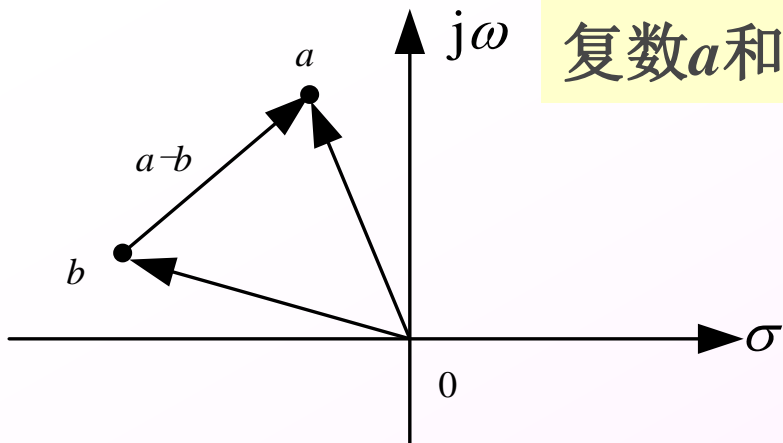
$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

当系统稳定时，令 $s=j\omega$ ，则得

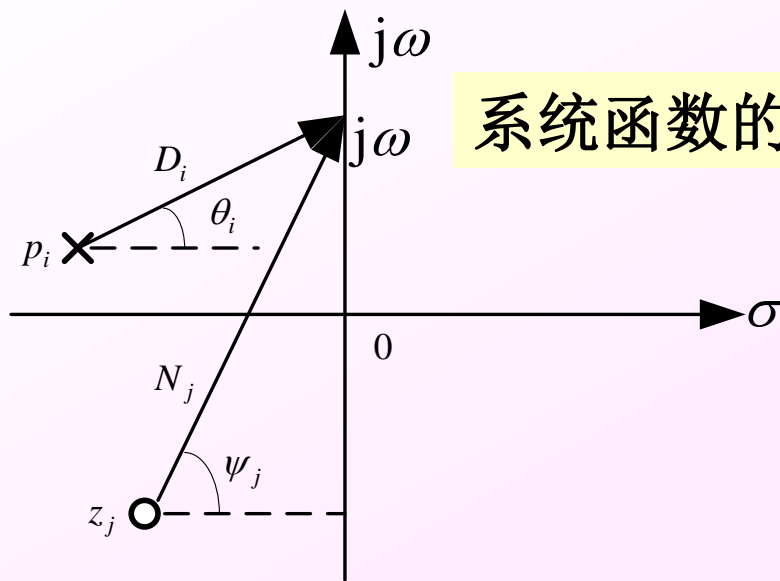
$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$

零极点与系统频响特性

复数 a 和 b 及 $a-b$ 的向量表示



系统函数的向量表示



$$(j\omega - z_j) = N_j e^{j\varphi_j}$$

$$(j\omega - p_i) = D_i e^{j\theta_i}$$

例1 已知 $H(s) = \frac{1}{s+1}$ ，求系统的频率响应。

解:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$|H(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{D_0} = 1$$

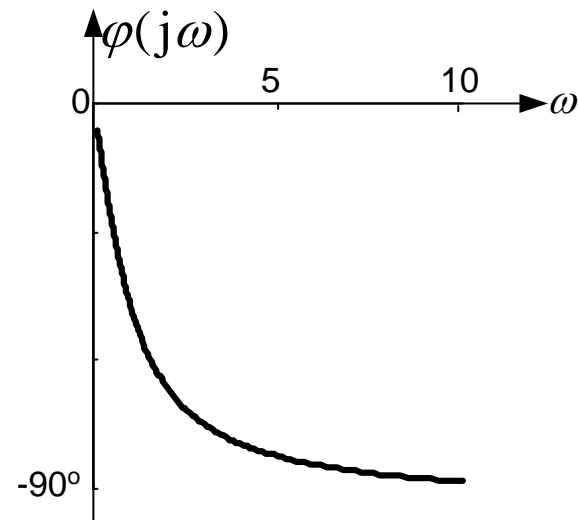
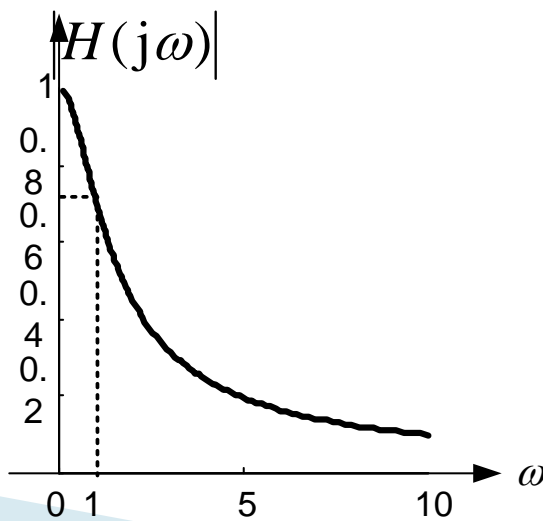
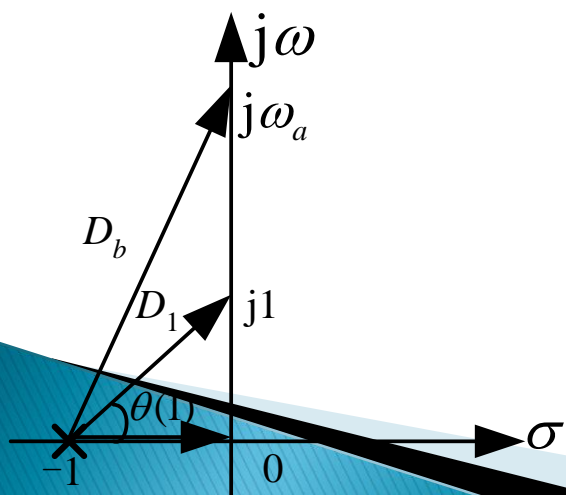
$$\varphi(j\omega)|_{\omega=0} = 0 - \theta_0 = 0$$

$$|H(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(j\omega)|_{\omega=1} = 0 - \theta_1 = -\arctan 1 = -45^\circ$$

$$|H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{1}{D_\infty} = 0$$

$$\varphi(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 - \theta_\infty = -90^\circ$$



8.9 单边拉氏变换：

(The Unilateral Laplace Transform)

一. 定义： $\chi(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ —— 单边拉氏变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+j\infty} \chi(s)e^{st} ds$$

单边拉氏变换与双边拉氏变换的区别仅在于积分下限。下限可以取 0 、 0^+ 、 0^- 。习惯上通常取 0^- ，这样可以包括 $x(t)$ 在 $t=0$ 有奇异函数的情况。

单边拉氏变换与双边拉氏变换的关系：

- 1) 单边拉氏变换是双边拉氏变换的特例，即：因果信号的双边拉氏变换。
- 2) 若两个信号在 $t > 0$ 时相同，但 $t < 0$ 时不同，就会有相同的单边拉氏变换和不同的双边拉氏变换。
- 3) ROC: 由于单边拉氏变换就是因果信号的双边拉氏变换，所以ROC一定是最右边极点的右边，可以不必特殊强调。

二. 单边拉氏变换的性质:

除了时域微分、时域积分及时延性质略有不同外，其余性质均与双边拉氏变换相同。

1. 时域微分: (Differentiation in the Time Domain)

若 $x(t) \leftrightarrow \chi(s)$ 则 $x'(t) \leftrightarrow s\chi(s) - x(0^-)$

证:
$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$
$$= s\chi(s) - x(0^-)$$

同理依次可推得:

$$x''(t) \leftrightarrow s^2 \chi(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$x'''(t) \leftrightarrow s^3 \chi(s) - s^2 x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$$

2. 时域积分: (Integration in the Time Domain)

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} \chi(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

证明:

$$\because \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$$

$$\therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau \cdot \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} \left(\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau - \frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \frac{1}{s} \chi(s)$$

3. 时延性质: (Time Shifting)

当 $x(t)$ 是因果信号时, 单边拉氏变换的时延特性与双边拉氏变换时一致。

若 $x(t)u(t) \leftrightarrow \chi(s)$ 即单边变换 $x(t) \leftrightarrow \chi(s)$

则 $x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow \chi(s)e^{-st_0}$ ($t_0 > 0$)

$x(t)$ 不是因果信号时,

$$\begin{aligned}x(t-t_0) &\leftrightarrow \int_{0^-}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st} dt = \int_{-t_0}^{\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\&= \int_{-t_0}^{0^-} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau + \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\&= \chi(s)e^{-st_0} + \int_{0^-}^{t_0} x(t-t_0)e^{-st} dt\end{aligned}$$

利用单边拉氏变换分析增量线性系统:

- 单边拉氏变换特别适合于分析由LCCDE描述的增量线性系统。

例. 某LTI系统由微分方程描述

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = 2u(t)$$

$$y(0^-) = 3, \quad y'(0^-) = -5 \quad \text{求响应 } y(t)$$

解: 对方程两边做单边拉氏变换:

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \right] + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

代入 $y(0^-) = 3$, $y'(0^-) = -5$ 可得

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3(s+3)}{s^2+3s+2} + \frac{-5}{s^2+3s+2}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{2}{s(s^2+3s+2)}}_{\text{零状态响应}}$$

$$Y(s) = \frac{3s+4}{s^2+3s+2} + \frac{2}{s(s^2+3s+2)} = \frac{3s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)}$$

可得零输入响应:

$$Y_{zi}(s) = \frac{3s+4}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$y_{zi}(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

零状态响应:

$$Y_{zs}(s) = \frac{2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$y_{zs}(t) = (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

系统的全响应:

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$\therefore y(t) = (1 - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

其中，第一项为强迫响应，其它为自然响应。

- 对于由电路描述的系统，通常按以下步骤：

- 1) 由电路列出微分方程。

- 2) 对方程进行单边拉氏变换，带入初始条件求解。

- 对于由方框图描述的系统：

由系统框图求出系统函数 $H(s)$ ，再列出微分方程进行求解。

- 对于由 $h(t)$ 描述的系统：

由 $h(t) \rightarrow H(s) \rightarrow LCCDE$ 然后按微分方程描述系统的情况求解。

电路的s域模型

基尔霍夫电压、电流定律时域描述

$$\sum v(t) = 0$$

$$\sum i(t) = 0$$

频域描述

$$\sum V(s) = 0$$

$$\sum I(s) = 0$$

电路的s域模型

时域

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

复频域

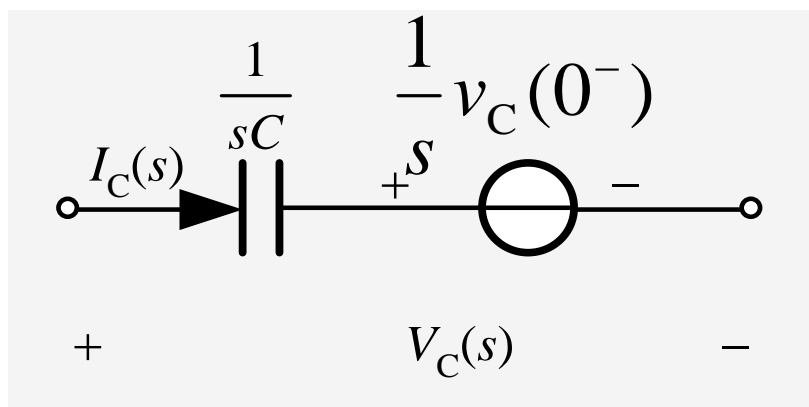
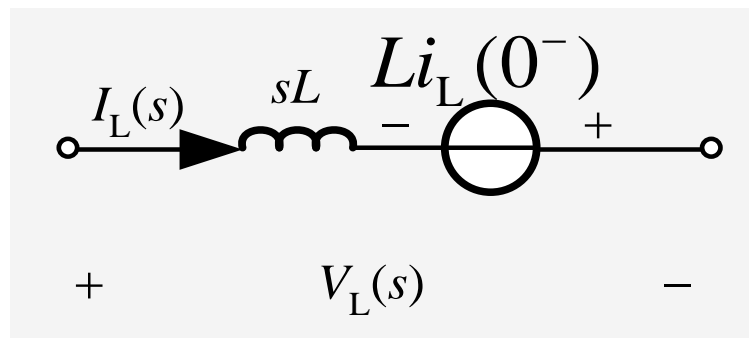
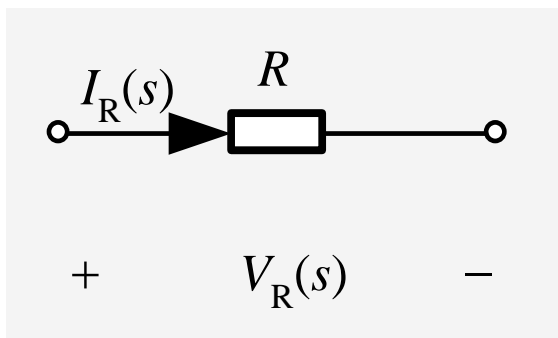
$$V_R(s) = RI_R(s)$$

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

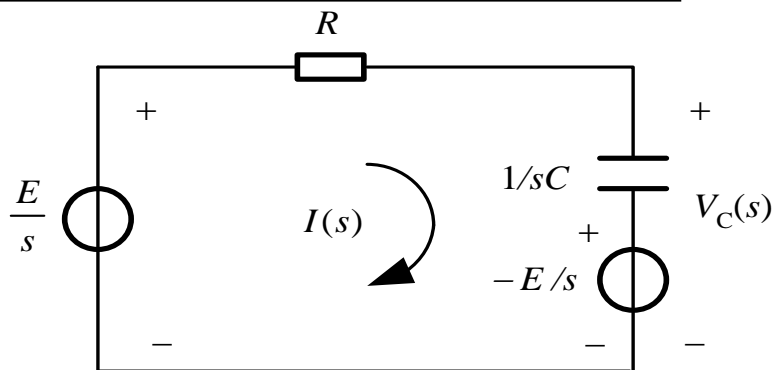
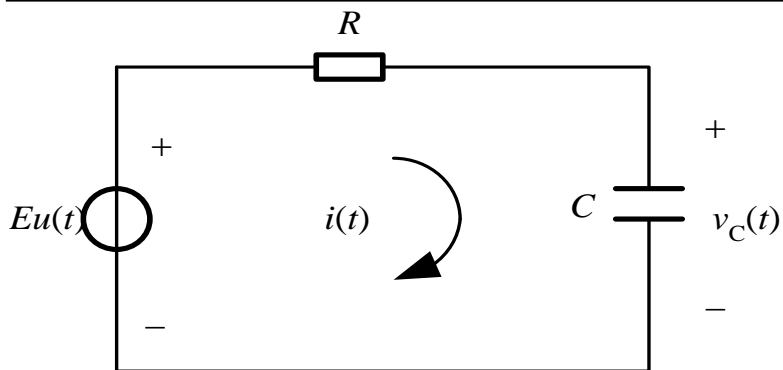
$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0^-)$$

二、电路的s域模型

- R、L、C串联形式的s域模型



例2 图示电路初始状态为 $v_C(0^-) = -E$, 求电容两端电压 $v_C(t)$ 。



解: 建立电路的s域模型

由s域模型写回路方程

$$\left(R + \frac{1}{sC}\right)I(s) = \frac{E}{s} + \frac{E}{s}$$

求出回路电流

$$I(s) = \frac{2E}{s\left(R + \frac{1}{sC}\right)}$$

电容电压为

$$V_C(s) = \frac{I(s)}{sC} - \frac{E}{s} = E\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

$$v_C(t) = E\left(1 - 2e^{-\frac{1}{RC}t}\right), t \geq 0$$

8.10 用于Matlab分析系统

1. 部分分式展开

有理多项式
$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

[r,p,k]=residue(num,den)

num=[b_m,b_{m-1},...,b₀]

den=[a_n,a_{n-1},...,a₀]

r 部分分式的系数 **p**为极点

k为余项（真分式时**k=0**）

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 6}{(s + 1)^3} = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

```
>> num=[1 4 6];den=[1 3 3 1];
```

```
>> [r, p, k]=residue(num,den)
```

```
r =
```

```
1.0000
```

```
2.0000
```

```
3.0000
```

```
p =
```

```
-1.0000
```

```
-1.0000
```

```
-1.0000
```

```
k = [ ]
```

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{(s + 1)^2} + \frac{3}{(s + 1)^3}$$

$$h(t) = (e^{-t} + 2te^{-t} + 6t^2e^{-t})u(t)$$

pzmap 零极点图
impulse 求冲激响应
freqs 求频率响应
laplace 拉普拉斯变换
ilaplace 拉普拉斯反变换

```
syms t s a b  
f1 = exp(-a*t)*sin(b*t)  
f1 = exp(-a*t)*sin(b*t)  
F1 = laplace(f1,t,s)  
pretty(F1)
```

$$f1 = \exp(-a t) \sin(b t)$$

$$F1 = \frac{b}{(a + s)^2 + b^2}$$

本章小结：（ Summary ）

- 拉氏变换是傅氏变换的推广，它可以将微分方程变换为代数方程，在LTI系统分析中特别有用。
- **ROC**是双边拉氏变换中十分重要的概念。
- 零极点图是拉氏变换的几何表示，广泛应用于工程实际中。
- 单边拉氏变换是双边拉氏变换的特例。
- 单边拉氏变换被广泛用于分析增量线性系统。