信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn
wanghg.gr.xjtu.edu.cn

本章主要内容

1. 双边Z变换及其收敛域ROC。

2. ROC的特征，各类信号的ROC，零极点图。

3. Z变换的性质，常用信号的Z变换。

4. Z反变换，利用部分分式展开进行反变换。

5. 用Z变换表征LTI系统，系统函数，LTI系统的Z变换分析法。

6. 单边Z变换，增量线性系统的分析。

9.0 引言：(Introduction)

在第5章，已讨论过复指数信号是一切LTI系统的特征函数 $z^n \to h(n) \to H(z)z^n$ 其中

$$H(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} h(n)z^n$$

当 $z = e^{j\omega}$ 时，上式就是离散时间傅立叶变换。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

本章讨论更一般的情况（即 $z = re^{j\omega}$ 时），称为 z 变换。

Z 变换与拉氏变换相对应，也是离散时间傅立叶变换的推广。

Z 变换的许多性质及其分析方法和基本思想都与拉氏变换有相似之处。 当然，Z 变换与拉氏变换也存在着一些重要的差异。

9.1 双边 Z 变换：(The Z-Transform)

一．定义:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$ **其中** $z=re^{j\omega}$**是一个复数。**

二．z变换与离散时间傅立叶变换的关系：

$$X(z)=X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}=F[x(n)r^{-n}]$$

这表明：$x(n)$**的 Z 变换就等于对**$x(n)r^{-n}$**做DTFT。**

因此，Z 变换是对DTFT的推广。

当$z=e^{j\omega}$ 即 $r=1$ 时， Z变换就成为离散时间傅立叶变换，故：**DTFT是 Z 变换的特例**。

由于 $r=1, z=e^{j\omega}$ 在Z平面上是单位圆，因此也可以说：**DTFT是在单位圆上所做的 Z 变换**。

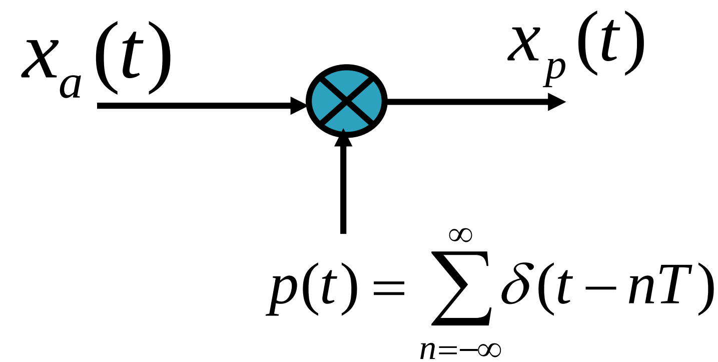
所以，**Z变换是离散时间傅立叶变换的推广，它的适用范围更广，收敛性更强**。

三．Z 变换与拉氏变换的关系：

设 $x(n)$是对连续时间信号 $x_a(t)$ 理想采样后而得到的序列。

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$x(n)=x_a(nT)$$



对 $x_p(t)$ 做拉氏变换有：

$$X_p(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-snT}$$

对 $x(n)$做 z 变换有： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)z^{-n}$

$$\therefore \ X(z)\big|_{z=e^{sT}} = X_p(s)$$

这表明：采样信号的拉氏变换与采样所得序列的z变换之间，本质上是一种映射关系。即通过$z=e^{sT}$ **将s平面上的** $X_p(s)$ **映射成 z 平面上的** $X(z)$ **。**

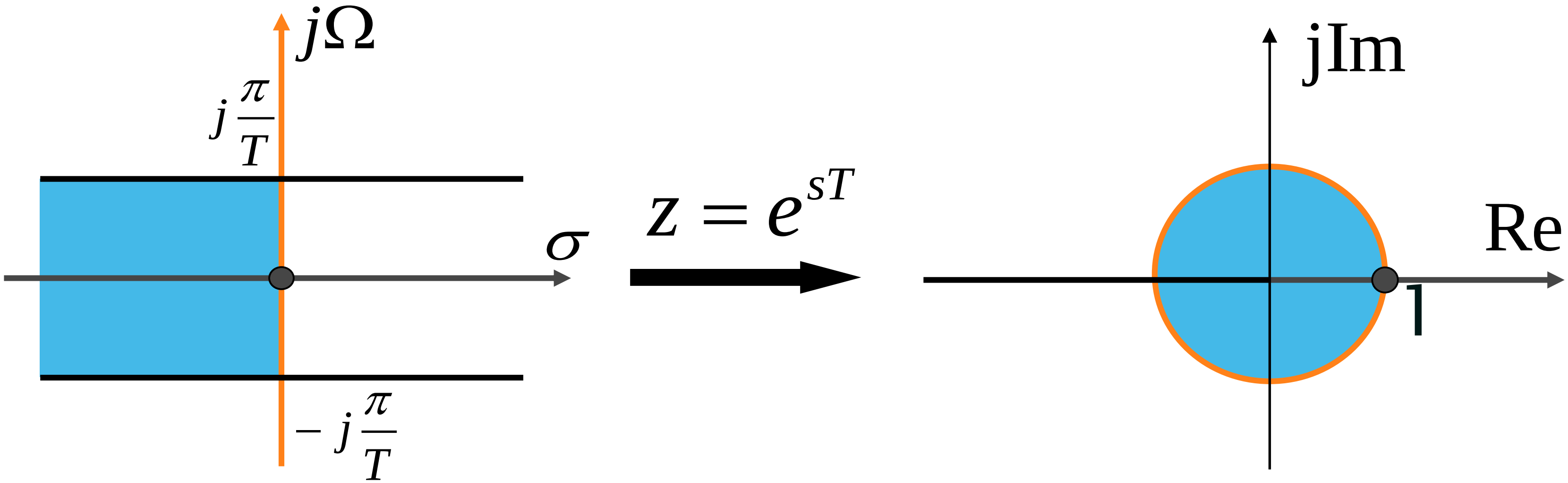
由 $z=e^{sT}$**,** $s=\sigma+j\Omega$**，将 z 改写为** $z=re^{j\omega}$,

$$\therefore r=e^{\sigma T}, \omega=\Omega T$$

显然 $\sigma<0, r<1; \quad \sigma>0, r>1; \quad \sigma=0, r=1$

$$-\pi \le \omega \le \pi, \quad -\frac{\pi}{T} \le \Omega \le \frac{\pi}{T} \qquad \omega=0, \quad \Omega=0$$

此映射关系如图所示：



四．Z 变换与DFT的关系：

如果 $x(n)$ 是有限长序列，长度为N，则其Z变换为：

$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$ 对 $X(z)$ 在单位圆上采样可得：

$$X(z)\big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

对 $x(n)$ 做N点DFT有：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad \therefore X(k) = X(z)\big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

这表明：有限长序列的DFT就是对该序列的 z 变换在单位圆上以 $\frac{2\pi}{N}$ 为间隔采样所得的样本。这是必然的。因为在单位圆上的z变换就是DTFT，也就是 $x(n)$ 的频谱。对 z 变换在单位圆上均匀采样，就是对信号的频谱采样，这就是DFT与频域采样的关系。

7.2 Z 变换的收敛域:

(The ROC for the Z-Transform)

一. Z 变换的收敛问题:

由于z变换是一个无穷级数，与DTFT一样存在着收敛的问题，这意味着:

1. 并非任何信号的 Z 变换都存在。

2. 并非 Z 平面上的任何复数都能使 $X(z)$ 收敛。

3. Z 平面上那些能使 $X(z)$ 收敛的点的集合就构成了 $X(z)$ 的ROC。

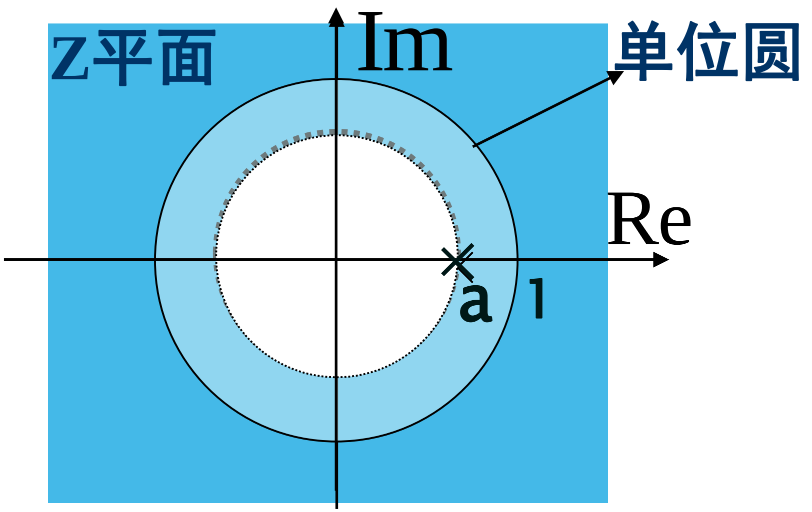
几个具体的例子:

例1. $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$ $|z|>|a|$**时收敛**

当$|a|<1$**时** $x(n)$**的DTFT存在。**

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\quad |z|>|a|$$



此时，ROC包括了单位圆。

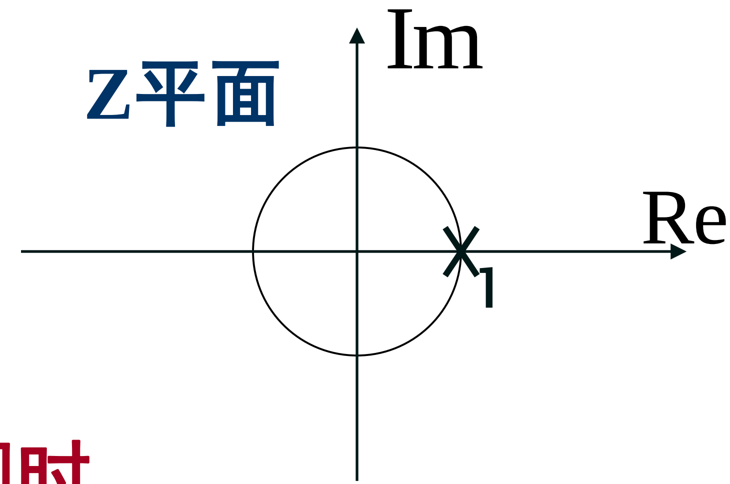
例2. $x(n)=u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$ $|z|>1$

此时，ROC不包括单位圆，

所以不能从 $X(z)$ 简单通过将

$z \rightarrow e^{j\omega}$ 得到 $X(e^{j\omega})$。



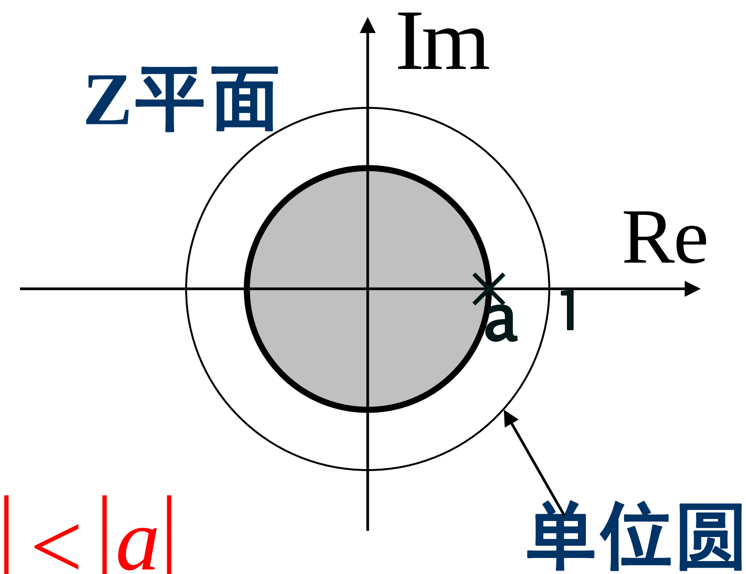
当 $X(z)$ 的收敛域包括单位圆时

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

例3. $x(n) = -a^n u(-n-1)$

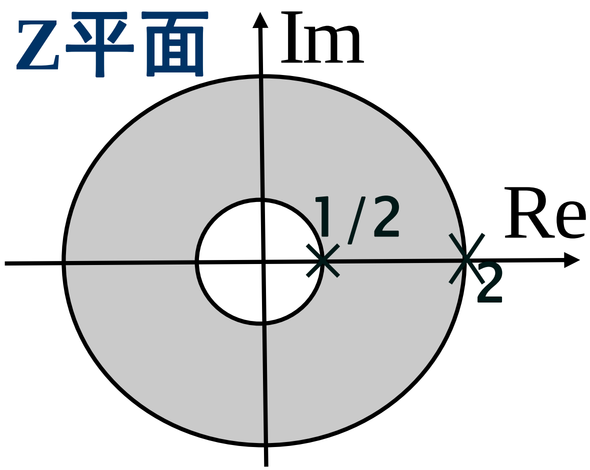
$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$



$$|z| < |a|$$

以上实例说明，不同的信号可能具有相同的z变换式，只是ROC不同，因此ROC是至关重要的。只有 z 变换式连同相应的ROC，才能与信号建立一一对应的关系。



例4. $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-2^n u(-n-1)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

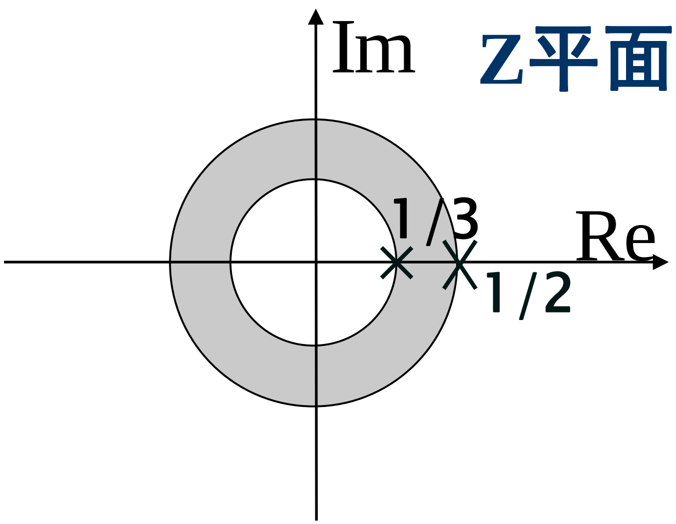
$$\mathrm{ROC}:\frac{1}{2}<|z|<2$$

一般情况下,$X(z)$ 的ROC是 Z 平面上一个以原点为中心的圆环。

例5. $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n) - (\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2})^n z^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$



ROC: $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$

若 $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z|>1/2$ $|z|<1/3$ **无公共区域**

表明该信号的z变换不存在。

例6. $x(n)=\delta(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$ **ROC为整个z平面。**

二. Z 变换的几何表示——零极点图:

如果 $X(z)$ 是有理函数:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=M\frac{\prod(z-z_i)}{\prod(z-z_p)}$$

z_i **称为零点**

z_p **称为极点**

在 z 平面上标出 $X(z)$ 的全部零极点，就构成了零极点图。它与实际的 $X(z)$ 最多只相差一个常数因子。

如果在零极点图上同时标出ROC，这就是 $X(z)$ 的几何表示，除了相差一个常数因子外，它与有理 z 变换是等价的。

三. ROC的特征:

由例子可以看出，ROC是由 $X(z)$ 的极点位置决定的，ROC有如下几个特征:

1. ROC是 z 平面上以原点为中心的环形区域。

由于 $Z[x(n)] = F[x(n)r^{-n}]$ ，对给定的 $x(n)$ ，Z变换收敛与否只取决于 r ，而与 ω 无关。

$|z| = r$ 是z平面上以原点为中心，r为半径的圆，所以ROC是以原点为中心的同心圆构成的环域。

2. ROC内无极点。

3.有限长序列的ROC是整个有限z平面，可能不包含 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 。

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} \qquad N_1 \le n \le N_2$$

a. 当 $N_1<0, N_2>0$ 时和式中既有 z 的正幂项，又有 z 的负幂项。ROC不包括 z＝0和$|z|=\infty$ 。

b. 当$N_1 \ge 0$ 时，和式中只有 z 的负幂项，ROC不包括z＝0，但包括$|z|=\infty$ 。

c. 当$N_2<0$ 时，和式中只有 z 的正幂项，ROC不包括$|z|=\infty$ ，但包括z＝0。

4. 右边序列的ROC是最外部极点的外部，但可能不包括$|z|=\infty$。

设$x(n)$是右边序列，$n<N_1$ 时，$x(n)=0$

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x(n)z^{-n},\quad N_1\le n\le\infty$$

由$|z|=r_0\in \mathrm{ROC}$有 $\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|<\infty$，若 $r_1>r_0$

则 $$\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_1^{-n}\right|=\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot(\frac{r_0}{r_1})^n$$

$$\le\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot(\frac{r_0}{r_1})^{N_1}<\infty \qquad \therefore |z|=r_1\in \mathrm{ROC}$$

当 $N_1 < 0$ 时，由于$X(z)$ 展开式中有若干个 Z 的正幂项，此时$|z|$不能为 ∞。

5. 左边序列的ROC是最内部极点的内部，但可能不包括$z=0$。

若 $r_0 \in \mathrm{ROC}$　$r_1 < r_0$　　，则

$$\sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_1^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$

$$\le \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1} < \infty \qquad \therefore r_1 \in \mathrm{ROC}$$

当 $N_1 > 0$ 时，由于$X(z)$　的展开式中包括有若干Z

的负幂项，此时 Z 不能为零。

6. 双边序列的 Z 变换如果存在，则ROC必定是一个环形区域。

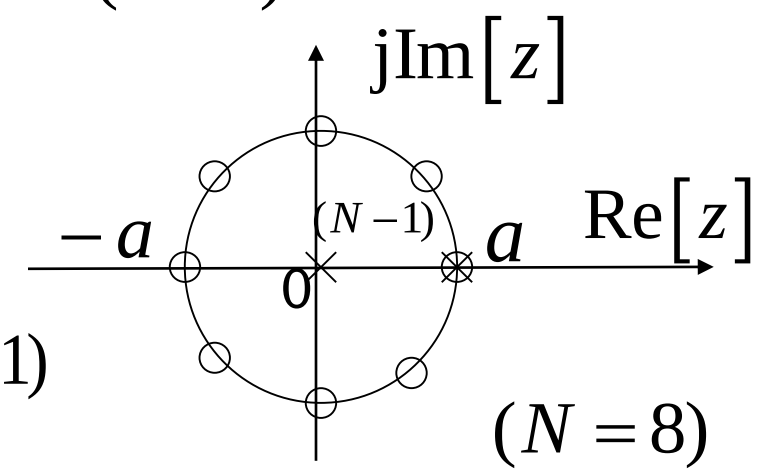
例1. $x(n) = \begin{cases} a^n, 0 \le n \le N-1, & a > 0 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}} = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)} \qquad \mathrm{ROC}: |z| > 0$$

极点： $z = a$ **（一阶）**

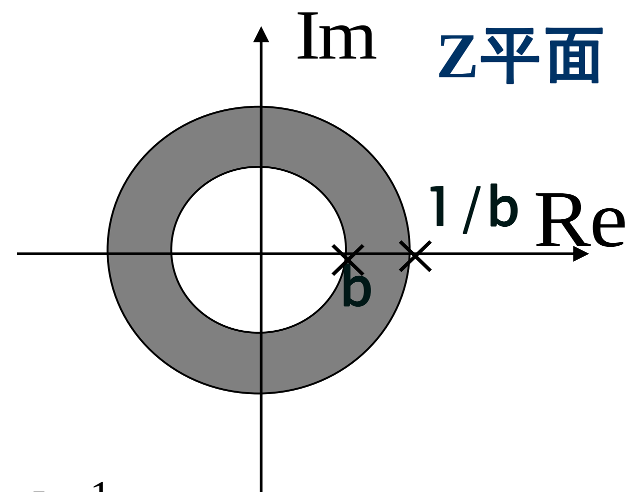
$z = 0$ **（N－1阶）**

零点： $z = ae^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad (k = 0, 1 \cdots N-1)$



在 $z=a$处，零极点抵消，在有限z平面内无极点。

例2. $x(n)=b^{|n|}, b>0$



$$x(n)=b^{n}u(n)+b^{-n}u(-n-1)$$

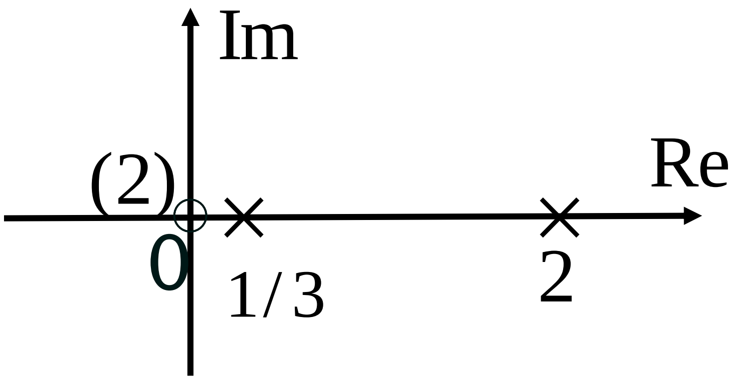
$$b^{n}u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-bz^{-1}},|z|>b$$

$$b^{-n}u(-n-1)\leftrightarrow-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},|z|<b^{-1}$$

在$b>1$时，两部分收敛域无公共部分，表明此时$X(z)$不存在。

$0<b<1$时，ROC为 $b<|z|<1/b$

例3. $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$



$$\left.\begin{array}{l}\text{极点：}\quad z_1=1/3,\ z_2=2\\ \text{零点：}\quad z=0\quad\text{（二阶）}\end{array}\right\}$$

在有限Z平面上极点总数与零点总数相同。

若其ROC为：

① $|z|>2$ 则 $x(n)$为右边序列，且是因果的，但其傅立叶变换不存在。

② $|z| < 1/3$ 时 $x(n)$是左边序列，且是反因果的，

其傅立叶变换不存在。

③ $1/3 < |z| < 2$ 时 $x(n)$ 是双边序列，但其傅立叶变换

存在。

ROC是否包括 $|z| = \infty$ 是 $x(n)$是否因果的标志。

ROC是否包括 $z = 0$，是$x(n)$ 是否反因果的标志。

ROC包括单位圆，是 $x(n)$ 傅立叶变换存在的充分

必要条件。

9.3 Z变换的性质: (Properties of the Z-Transform)

Z变换的许多性质与DTFT的性质相似，其推论方法也相同。主要讨论其ROC的变化，借以揭示信号在时域与在 Z 域的特性之间的关系。

1. 线性:

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_1$

$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_2$

则 $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$

ROC：包括 $R_1 \cap R_2$

如果在线性组合过程中出现零极点相抵消，则ROC可能会扩大。

2. 时移：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(n-n_0) \leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

$\mathrm{ROC}: R$ 但在 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 可能会有增删。

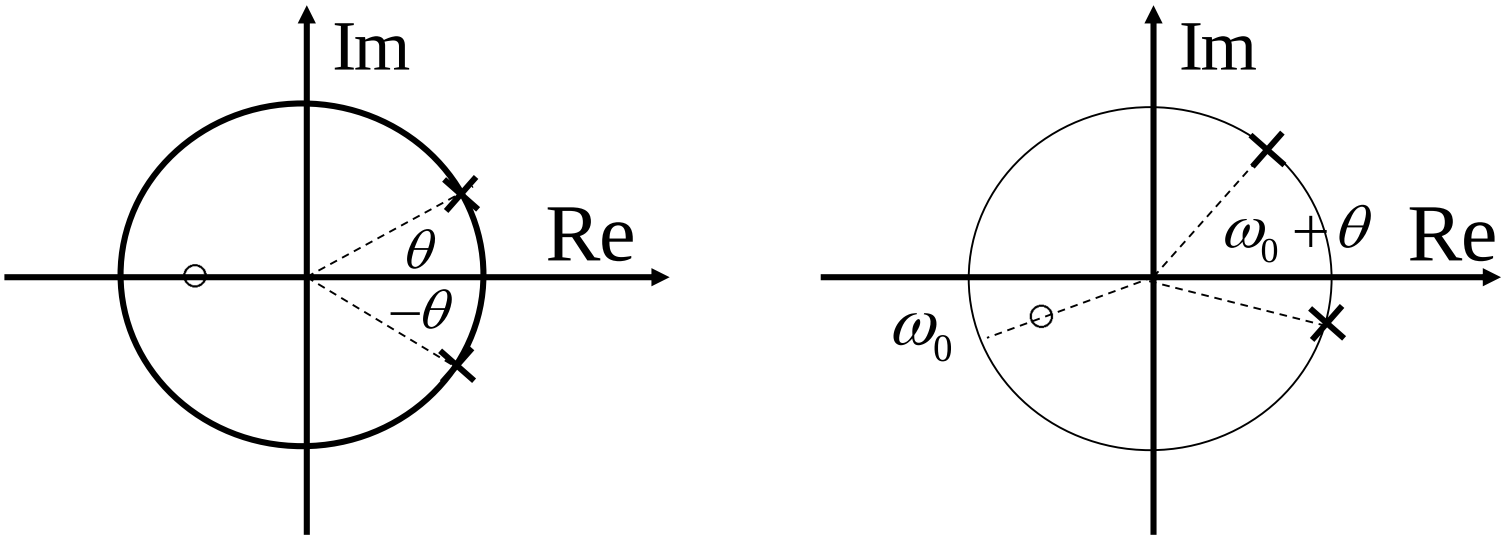
- 由于信号的时移有可能会改变其因果性，故ROC在 $z=0$，或 $|z|=\infty$ 有可能改变。

3. 频移：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(z \cdot e^{-j\omega_0}) \qquad \mathrm{ROC}: R$

零极点位置将旋转一个角度 ω_0。



当 $\omega_0 = \pm\pi$ **时，有** $x(n)(-1)^n \leftrightarrow X(-z)$ **零极点旋转** 180°

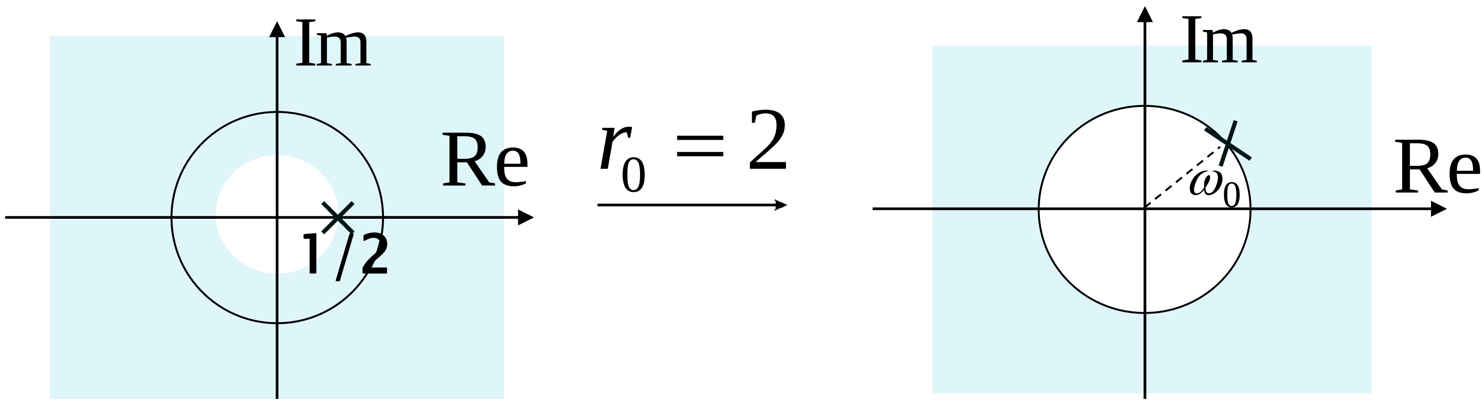
4. Z域尺度变换： 若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \mathrm{ROC}: R$

则 $z_0{}^n x(n) \leftrightarrow X(z/z_0) \quad \mathrm{ROC}: |z_0| R$

$\because |z| \in R$时 $X(z)$ 收敛，则 $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| \in R$ 时，$X(z/z_0)$ 收敛，

$\therefore |z| \in |z_0| R$ **当 $z_0 = e^{j\omega_0}$时，即为移频特性。**

若z_0是一般复数$z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$则 $X(z/z_0)$ 的零极点不仅要将$X(z)$的零极点逆时针旋转一个角度 ω_0 ，而且在径向有 r_0倍的尺度变化。因此，ROC也有一个 $|z_0|$ 的尺度变换。



5. 时域反转：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ $\quad$ $\mathrm{ROC}: R$

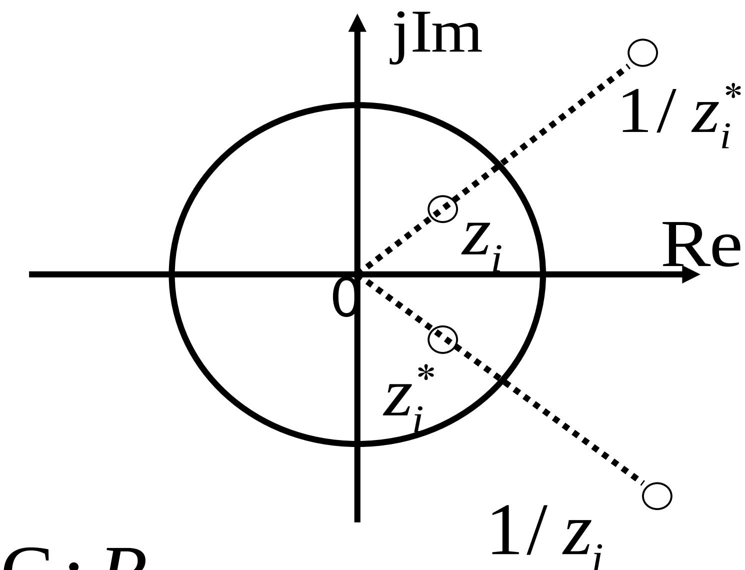
则 $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$ $\quad$ $\mathrm{ROC}: 1/R$ （收敛域边界倒置）

信号在时域反转，会引起 $X(z)$ 的零极点分布按倒量对称发生改变。如果 z_i 是 $X(z)$ 的零/极点，则 $1/z_i$ 就是 $X(z^{-1})$ 的零/极点。

即：$X(z)$与$X(z^{-1})$的**零极点呈共轭倒量对称。**

例：$X(z)$的ROC为 $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$

则$X(z^{-1})$的ROC为 $\frac{2}{3}<|z|<2$



6. 时域内插:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ROC: R

$$x_k(n)=\begin{cases} x(n/k) & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

（在序列的每两点之间插入k-1个零）

则 $x_k(n) \leftrightarrow X(z^k) \qquad \mathrm{ROC}: R^{1/k}$

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) z^{-rk} = X(z^k)$$

7. 共轭对称性：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad \mathrm{ROC}: R$

当$x(n)$是实信号时，$x^*(n) = x(n)$，于是有

$$X(z) = X^*(z^*)$$

表明：如果$X(z)$有复数零极点，必共轭成对出现。

8. 卷积性质：

$$x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad \text{ROC包括 } R_1\cap R_2$$

如果在相乘时出现零极点抵消的情况，则ROC可能会扩大。

$$x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)X_2(z)z^{-m}=X_1(z)X_2(z)$$

卷积性质是LTI系统Z变换分析法的理论基础。

9. Z域微分： $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ROC: R

$$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad \text{ROC}: R$$

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数$X(z)$的反变换或具有高阶极点的 $X(z)$ 的反变换。

例1. $X(z) = \ln(1+az^{-1}) \qquad |z| > |a|$

$$\because \frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \leftrightarrow a(-a)^{n-1}u(n-1) = nx(n)$$

$$\therefore x(n) = \frac{a}{n}(-a)^{n-1}u(n-1) = -\frac{1}{n}(-a)^{n}u(n-1)$$

例2： $X(z)=\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ $\quad |z|>|a|$

$$\because a^n u(n) \leftrightarrow \hat{X}(Z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=-\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$-z\frac{d\hat{X}(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\therefore x(n)=na^n u(n)$$

10. 初值定理：

若 $x(n)$ 是因果信号，$x(n) \leftrightarrow X(z)$，且 $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ 存在，则：$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$

证明： $X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$

当 $z\to\infty$ 时有：$\lim\limits_{z\to\infty} X(z)=x(0)$

初值定理表明： 因果序列的 $X(z)$ 在 $z\to\infty$ 时为有限值。因此，当 $X(z)$ 是有理函数，且表示成关于z的多项式之比时，其分子多项式的阶数不能高于分母多项式的阶数。否则，$x(n)$ 将是非因果的。

推论：

$$z\left[X(z)-x(0)\right]=x(1)+x(2)z^{-1}+x(3)z^{-2}+\cdots$$

$$\therefore \quad x(1)=\lim_{z\to\infty} z\left[X(z)-x(0)\right]$$

$$\vdots$$

$$x(n)=\lim_{z\to\infty} z^{n}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(k)z^{-k}\right]$$

这样即可递推出 $x(n)$ 的任何一点的值。

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

证明：

$\because x(n)=0,\ n<0,\ X(z)$ **除了在** $z=1$ **可以有单阶极点外，其它极点均在单位圆内，**

$\therefore (z-1)X(z)$ **在单位圆上无极点。**

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}\sum_{n=-1}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=-1}^{m}\left[x(n+1)-x(n)\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+\cdots+x(m+1)-x(m)]$$

$$= \lim_{m \to \infty} x(m+1) = \lim_{n \to \infty} x(n)$$

这表明：如果$x(n)$有终值存在，则其终值等于$X(z)$在$z=1$处的留数。

$$\lim_{z \to 1}(z-1)X(z) = \mathrm{Res}[X(z),1]$$

终值定理对$X(z)$的极点位置的要求，其实就是为了保证信号确实具有终值。