信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn
wanghg.gr.xjtu.edu.cn

本章主要内容

1. 双边Z变换及其收敛域ROC。

2. ROC的特征，各类信号的ROC，零极点图。

3. Z变换的性质，常用信号的Z变换。

4. Z反变换，利用部分分式展开进行反变换。

5. 用Z变换表征LTI系统，系统函数，LTI系统的Z变换分析法。

6. 单边Z变换，增量线性系统的分析。

1. 线性： $ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(z)+bX_2(z)$

2. 时移： $x(n-n_0)\leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

3. 频移： $x(n)e^{j\omega_0 n}\leftrightarrow X(z\cdot e^{-j\omega_0})$

4. Z域尺度变换 $z_0^{\ n}x(n)\leftrightarrow X(z/z_0)$

5. 时域反转： $x(-n)\leftrightarrow X(z^{-1})$

6. 时域内插: $x_k(n)\leftrightarrow X(z^k)$

7. 共轭对称性： $x^*(n)\leftrightarrow X^*(z^*)$

8. 卷积性质： $x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$

9. Z域微分： $nx(n)\leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

10. 初值定理： 若$x(n)$ 是因果信号， $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$

11. 终值定理：若$x(n)$ 是因果信号，$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$

9.4 常用信号的z变换：
(Some Common Z-Transform Pairs)

目的在于利用z变换的性质从简单信号的z变换导出常用信号的z变换对。

1. $x(n)=\delta(n-m)$

$\because \delta(n)\leftrightarrow 1$ **ROC：整个z平面**

$\therefore \delta(n-m)\leftrightarrow z^{-m}$ **ROC：整个有限z平面**

- **当** $m>0$ **时，包括** $|z|=\infty$ **，不包括Z=0。**
- 当$m<0$时，包括 **z=0**，不包括$|z|=\infty$ 。

2. $x(n) = -u(-n-1)$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$u(n-1) \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{1-z} = -\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| < 1$$

$$\therefore x(n) = -u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| < 1$$

3. $x(n)=a^n u(n)$

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}\qquad |z|>1$$

$$a^n x(n)\leftrightarrow X(z/a)$$

$$a^n x(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|>|a|$$

4. $x(n)=na^n u(n)$　　**由z域微分性质，有:**

$$na^n u(n)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}\qquad |z|>|a|$$

5. $x(n)=\cos\omega_0 n\cdot u(n)$

$$\because x(n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})u(n)$$

$u(n)\leftrightarrow U(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$　　**根据频移特性，**

$$\therefore X(z)=\frac{1}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})+U(ze^{j\omega_0})\right]$$

$$=\frac{1/2}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1/2}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}\qquad |z|>1$$

6. $x(n) = r^n \cos\omega_0 n \cdot u(n)$

由Z域尺度变换特性，只需将上例中 $z \Rightarrow z/r$ **即可**

$$\therefore X(z) = \frac{1 - r\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \qquad |z| > r$$

例 1：求 $x(n)=|n-1|u(-n)$ 的Z变换与收敛域；

解：
$$x(n)=|n-1|u(-n)=(-n+1)u(-n)$$

$$x_1(n)=u(-n)\leftrightarrow U(z^{-1})=\frac{1}{1-z}\quad |z|<1$$

$$nx_1(n)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X_1(z)=\frac{-z}{(1-z)^2}\quad |z|<1$$

所以

$$-nx_1(n)+x_1(n)\leftrightarrow -\frac{-z}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1-z)}=\frac{1}{(1-z)^2}\quad |z|<1$$

9.5 z反变换：(The Inverse z-Transform)

一. z反变换：

$x(n)$ 的z变换就是对 $x(n)r^{-n}$ 做DTFT，由DTFT的反变换有:

$$x(n)r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})r^{n}e^{j\omega n}d\omega$$

令 $z = re^{j\omega}$ $\qquad dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$

当ω从$0 \to 2\pi$ 时，Z 沿着ROC内半径为 r 的圆周变化一周。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(z)z^{n-1}dz$$

其中 C 是 ROC 中逆时针方向的圆周。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

z反变换表明：信号可以在z域分解为复指数信号的线性组合，这些复指数分量分布在一个圆周上，每个复指数分量的幅度为 $\frac{1}{2\pi j}\frac{X(z)}{z}dz$ 。

二. 反变换的求取：

1. 部分分式展开法： 当$X(z)$是有理函数时, 可表示为

$$X(z)=A_0+\sum_i \frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}$$

假定分子与分母同阶

步骤： 1. 求出 $X(z)$ 的所有极点 a_i；

2. 将$X(z)$ 展开为部分分式；

3. 根据总的ROC，确定每一项的ROC；

4 .利用常用变换对和Z变换的性质，求出每一项的反变换。

例1：$X(z)=\dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$ $\qquad \dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

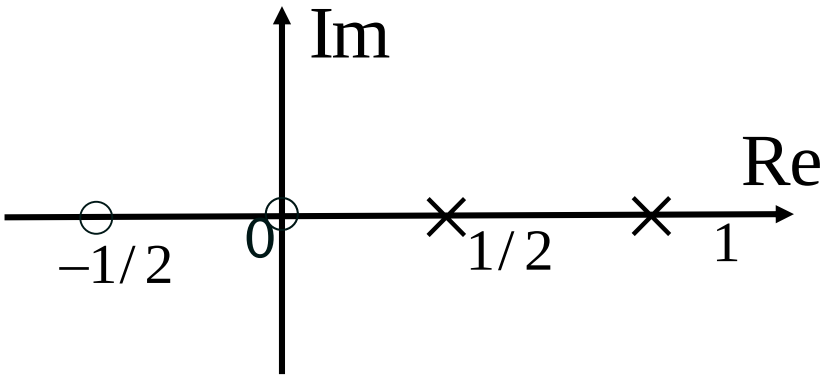
第一项的ROC：$|z|>1/4$

第二项的ROC：$|z|<1/3$

$$\therefore x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)-2(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$$

例2:

$$X(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$



$|z|>1\ldots \qquad x(n)=[3-2(\frac{1}{2})^{n}]u(n)$

$|z|<\frac{1}{2} \qquad x(n)=2(\frac{1}{2})^{n}u(-n-1)-3u(-n-1)$

$\frac{1}{2}<|z|<1 \qquad x(n)=-3u(-n-1)-2(\frac{1}{2})^{n}u(n)$

2. 幂级数展开法:（长除法）

由 $X(z)$的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z)=\cdots+x(-n)z^{n}+\cdots+x(-1)z+$$

$$x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$$

展开式中z^{-n} 项的系数即为$x(n)$ 。当$X(z)$ 是有理函数时，可以通过长除的方法将其展开为幂级数。

- 由于右边序列的展开式中应包含无数多个Z的负幂项，所以要按降幂长除。
- 由于左边序列的展开式中应包含无数多个Z的正幂项，所以要按升幂长除。
- 双边序列则先要将其分成两部分，分别对应信号的右边和左边部分，再分别按上述原则长除。

例. $$X(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

第一项的ROC：$|z|<1/2$

第二项的ROC：$|z|>1/3$

对前一项按升幂长除，后一项按降幂长除。

$$
\begin{array}{r|l}
 & -12z-24z^2-48z^3-\cdots \\
\hline
-\frac{1}{2}z^{-1}+1 & 6 \\
 & \underline{6-12z} \\
 & \quad 12z \\
 & \underline{\quad 12z-24z^2} \\
 & \qquad 24z^2 \\
 & \underline{\qquad 24z^2-48z^3} \\
 & \qquad\qquad 48z^3
\end{array}
$$

$$\boxed{-6(\frac{1}{2})^n u(-n-1)}$$

$$
1-\frac{1}{3}z^{-1}\overline{\Big)\ 5\qquad\qquad}^{\,5+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{5}{9}z^{-2}+\cdots}
$$

$$
\underline{5-\frac{5}{3}z^{-1}}
$$

$$
\cdots\cdots\frac{5}{3}z^{-1}
$$

$$
\underline{\cdots\cdots\frac{5}{3}z^{-1}-\frac{5}{9}z^{-2}}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{5}{9}z^{-2}
$$

$$
\boxed{5(\frac{1}{3})^{n}u(n)}
$$

$$
\boxed{x(n)=-6(\frac{1}{2})^{n}u(-n-1)-5(\frac{1}{3})^{n}u(n)}
$$

幂级数展开法适用于求解非有理函数形式 $X(z)$ 的反变换。此时，只要能将 $X(z)$ 展开成幂级数，即可得到相应的反变换。

练习：

$$X(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$|z|<\frac{1}{3}$$

9.6 离散时间LTI系统的z域分析:（The Discrete-Time LTI System Analysis in the z-Domain)

一、 LTI系统的z域分析

由z变换的卷积性质有

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

ROC包括: $R_1 \cap R_2$

对 $Y(z)$ 做反变换即可得到输出响应 $y(n)$。

$H(z)$ **称为系统的系统函数。**

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$ 或 $$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

例. $x(n)=(-\frac{1}{2})^n u(n)$ $h(n)=\left[1+(-2)^n\right]u(n)$

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$ $|z|>\frac{1}{2}$

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1+2z^{-1}}=\frac{2+z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}$$ $|z|>2$

由$Y(z)=X(z)H(z)$ 可得:

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{2}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$$

$|z|>2$

$$=\frac{2/3}{1-z^{-1}}+\frac{4/3}{1+2z^{-1}}$$

$$\therefore\ y(n)=[\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(-2)^n]u(n)$$

二. 系统函数:

系统函数连同收敛域可以表征LTI系统，借助于系统函数的ROC可以确定系统的因果性，稳定性。

当系统函数是有理函数时,

1\. 如果系统是因果的，则 $h(n)=0, n<0$；可知 $H(z)$

的ROC一定是最外部极点的外部，且包括$|z| = \infty$。

2. 如果系统稳定，则$h(n)$绝对可和，也即$H(e^{j\omega})$存在，$H(z)$的ROC一定包括单位圆。

3. 因果稳定系统的$H(z)$的全部极点必须在单位圆内。

三. 系统函数的求得：

1. 由LCCDE描述的系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$ 对方程做z变换有

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

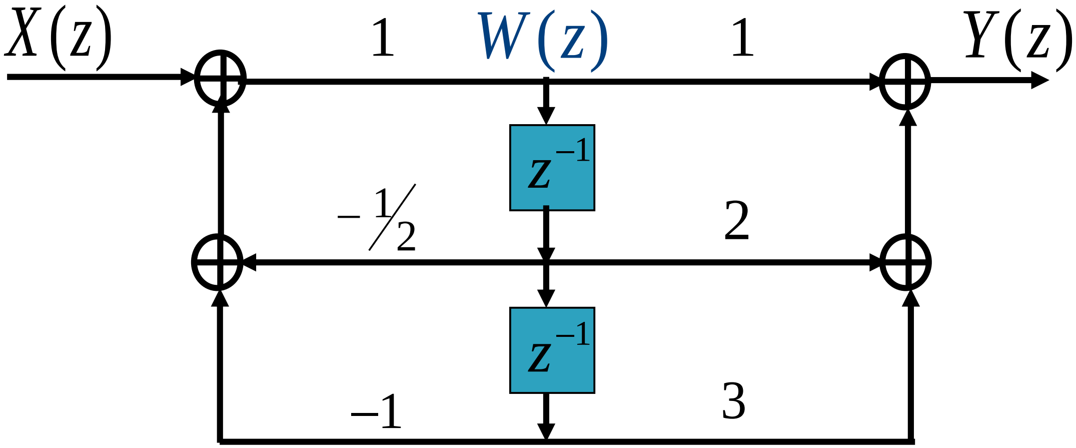
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$ 由**LCCDE**可以方便地求出$H(z)$。

但由方程并不能确定**ROC**，需要依据系统的因果性，稳定性决定。当方程具有一组全部为零的初始条件时，系统是线性、因果、时不变的。

2. 由方框图描述的系统：

当系统由方框图描述时，可根据方框图列出相应的方程，进而求得$H(z)$。

例.



$$W(z)=X(z)-\frac{1}{2}z^{-1}W(z)-z^{-2}W(z)$$

$$Y(z)=W(z)+2z^{-1}W(z)+3z^{-2}W(z)$$

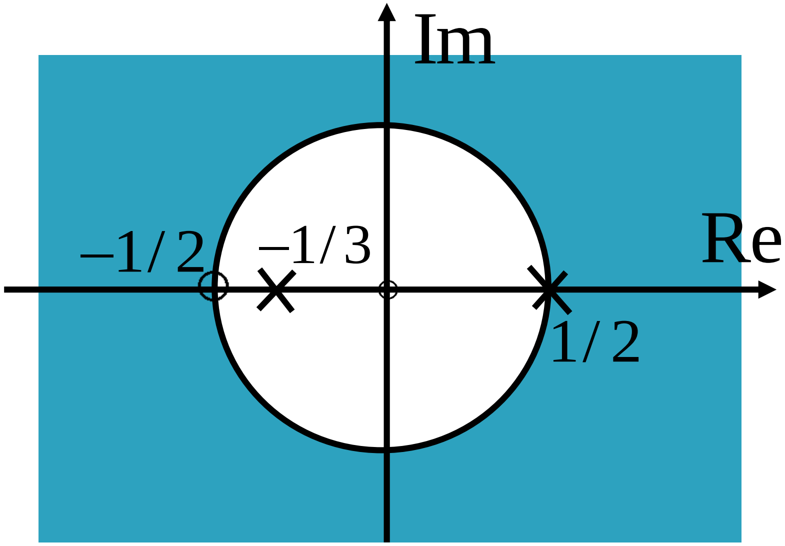
$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$y(n)+\tfrac{1}{2}y(n-1)+y(n-2)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$$

3. 由零极点图描述的系统：

根据零极点图及ROC可写出一个有理函数的 $H(z)$，最多和实际的 $H(z)$相差一个常数 H_0。

例. 已知系统的零极点图。



由零极点图可以写出：

$$H(z)=H_0\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$|z|>\frac{1}{2}$$

注意原点处的零点。

9.8 单边z变换:（The Unilateral z-Transform)

一. 定义:

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \text{ —— } x(n)\text{的单边z变换}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}\chi(z)z^{n-1}dz$$

显然，当$x(n)$ 是因果信号时，单边z变换与双边z变换相同。因此，单边z变换就是对因果信号所做的双边z变换。

如果信号是非因果的，则$\chi(z)$与$X(z)$ 不同。

例1: $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\chi(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

显然 $\chi(z)=X(z)$

例2. $x(n)=a^{n+1}u(n+1)$ **则** $X(z)=\dfrac{z}{1-az^{-1}}$

ROC: $|z|>|a|$ **但不包括** $|z|=\infty$

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}z^{-n}=\frac{a}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

显然$\chi(z) \neq X(z)$。这是因为$x(n)$在$n<0$的部分对双边Z变换起作用，而对单边Z变换不起作用所致。

由于单边z变换的定义式中只包括z的负幂项，不含有z的正幂项，因而单边z变换的ROC与因果信号双边z变换的ROC特性相同。即一定是$\chi(z)$最外部极点的外部并且包括$|z|=\infty$，不可能有其它情况。故对单边z变换不再强调ROC。

正由于$x(n)$的单边z变换就是 $x(n)u(n)$ 的双边z变换，当信号的因果性不改变时，双边z变换的性质就是单边z变换的性质。

只有移位特性例外，因为时域的移位可能会改变信号的因果属性。

二. 单边Z变换的移位性质：

若 $x(n) \leftrightarrow \chi(z)$

则 $x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}\chi(z) + x(-1)$

证明: $$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)z^{-(m+1)}$$

$$= x(-1) + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z^{-1}\chi(z) + x(-1)$$

同理可得:

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}\chi(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

$$x(n+1) \leftrightarrow z\chi(z) - zx(0) \quad -----$$

证明： $$\sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)} - x(0)z = z\chi(z) - zx(0)$$

同理可得：

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2\chi(z) - z^2x(0) - zx(1) \quad ----$$

单边Z变换在将LCCDE变换为代数方程时，可以自动将方程的初始条件引入，因而在解决增量线性系统问题时特别有用。

利用单边Z变换分析增量线性系统：

利用单边z变换可以方便地分析增量线性系统

例1： $y(n)+3y(n-1)=x(n),$

$x(n)=u(n),\qquad y(-1)=1$

对方程做单边z变换，并引入初始条件可得：

$$\Upsilon(z)+3[z^{-1}\Upsilon(z)+y(-1)]=\chi(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$\Upsilon(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}[\chi(z)-3]$$

$$=\underbrace{\frac{\chi(z)}{1+3z^{-1}}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}=H(z)\chi(z)+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\frac{1/4}{1-z^{-1}}-\frac{9/4}{1+3z^{-1}}$$

$$\therefore y(n)=[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}(-3)^{n}]u(n)=\frac{1}{4}[1-9(-3)^{n}]u(n)$$

$$=\frac{1}{4}[1-(-3)^{n+2}]u(n)$$

强迫响应　　自然响应

例2： $y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$

$$x(n)=u(n) \qquad y(-1)=1 \qquad y(-2)=\frac{1}{2}$$

对方程两边做单边**z**变换，并引入初始条件：

$$\Upsilon(z)-3[z^{-1}\Upsilon(z)+y(-1)]+2[z^{-2}\Upsilon(z)+z^{-1}y(-1)$$
$$+y(-2)]=\chi(z)$$

$$\chi(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Upsilon(z)=\frac{\chi(z)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{-3y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

零状态响应　　　　零输入响应

代入初始条件得：

$$\Upsilon(z)=\frac{2-2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{1}{(1-z^{-1})(1-3z^{-1}+2z^{-2})}$$

$$=\frac{2}{1-2z^{-1}}+\frac{-3}{1-z^{-1}}+\frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}+\frac{4}{1-2z^{-1}}$$

$$y(n)=2(2)^{n}u(n)+[-3-n+4(2)^{n}]u(n)$$

这里用到了以下关系：

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$nu(n)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)=-z\frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^{2}}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

例3: $$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{1}{2}y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

$$x(n)=(-1)^n u(n), \qquad y(-1)=1, y(-2)=1$$

对方程两边做单边z变换有:

$$\Upsilon(z)-\frac{1}{2}\left[z^{-1}\Upsilon(z)+y(-1)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[z^{-2}\Upsilon(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]$$

$$=\chi(z)+z^{-1}\chi(z)+x(-1)$$

$$\Upsilon(z) = \frac{(1+z^{-1})\chi(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} +$$

$$\chi(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}y(-1)(1+z^{-1}) + \frac{1}{2}y(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$= \frac{2+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{5/3}{1-z^{-1}} + \frac{1/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y(n) = \left[\frac{5}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n}\right]u(n)$$

本章小结: (Summary)

1. 离散时间信号的双边z变换表示，及其与DTFT的关系，与拉氏变换的关系，与DFT的关系。

2. 双边z变换的收敛域及其特征，收敛域和信号种类的关系。

3. 双边z变换的性质。

4. 离散时间LTI系统的z变换分析。系统特性与系统函数收敛域的关系。

5. 单边z变换及其性质。

6. 利用单边z变换分析增量线性系统。