西安交通大学电子与信息工程学院研究生课程

《等离子体电子学》

第二章 带电粒子输运的唯象描述

主讲人：王洪广

2018-04-25

带电粒子输运的唯象描述

● 带电粒子输运

□ 输运过程

- 又称弛豫过程，是非热力学平衡态等离子体的重要物理过程（空间密度分布的变化）
- 运动的趋势：热力学平衡态

□ 迁移

外加电磁场作用下等离子体在某个方向获得的净运动（其速度一般用平均速度来描述）

□ 扩散

等离子体中某种成分的粒子的数密度分布不均匀时，由于粒子间的碰撞，这种成分的粒子将会从密度高的地方向密度低的地方迁移，使得各处的密度差别逐渐消失

□ 唯象

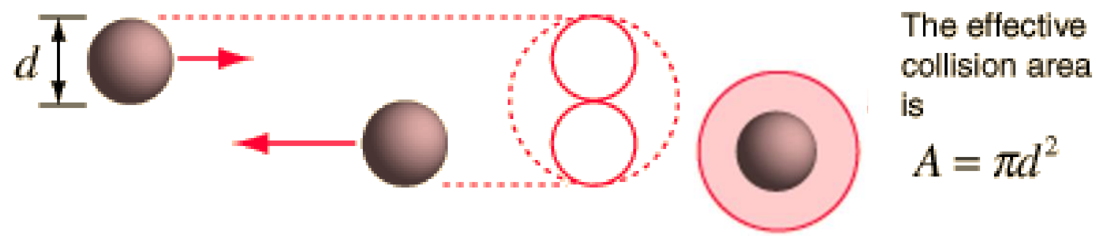
- 解释物理现象时，不用其内在原因，而是用概括试验事实而得到的物理规律
- 物理学研究分为三个阶段：实验、唯象理论、理论架构（杨振宁）

带电粒子输运的唯象描述

- 带电粒子输运的微观过程-碰撞

□ 碰撞截面Q

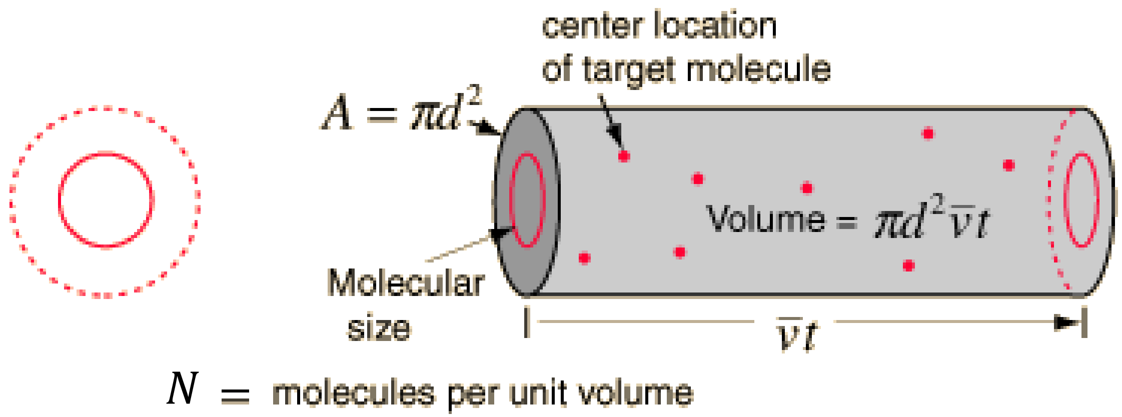
≈$A=\pi d^2$



□ 平均自由程λ

=1/(QN)

N: 靶粒子数密度



□ 碰撞频率ν

单位时间的碰撞次数

=<v>/λ=QNv

<v>: 入射粒子平均速度

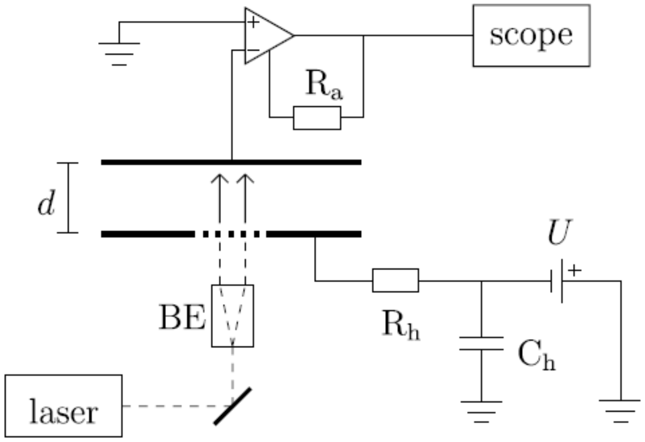
行进距离

$$\text{平均自由程}\ \lambda=\frac{\bar{v}t}{\underline{\pi d^2\bar{v}t}N}=\frac{1}{\pi d^2 N}$$

作用体积　　背景气体分子/原子密度

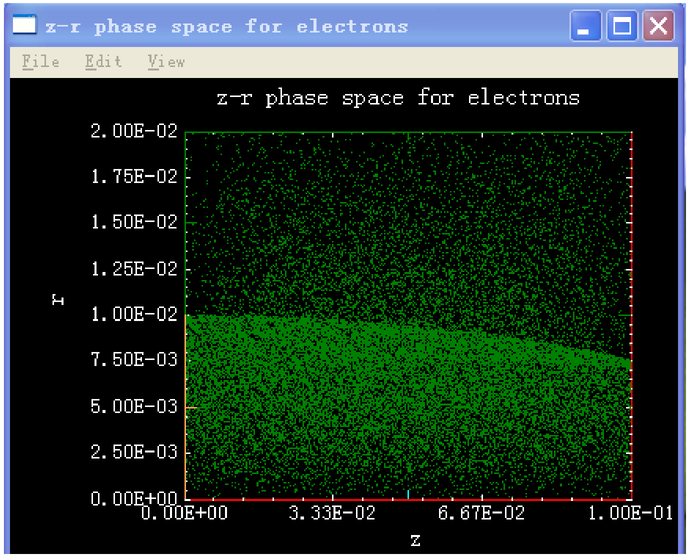
带电粒子输运的唯象描述

- 输运的唯象描述方法：电子群
  - 蜂群 (Swarm)
    - 集体效应
  - 电子群
    - 低温等离子体中，离子质量大，可视为静止
    - 低密度等离子体中，电子密度远小于气体分子密度



电子群参数的脉冲汤生测量法
J. Phys. D: Appl. Phys. 2012, 45 485201

蜂群



电子的空间分布

带电粒子输运的唯象描述

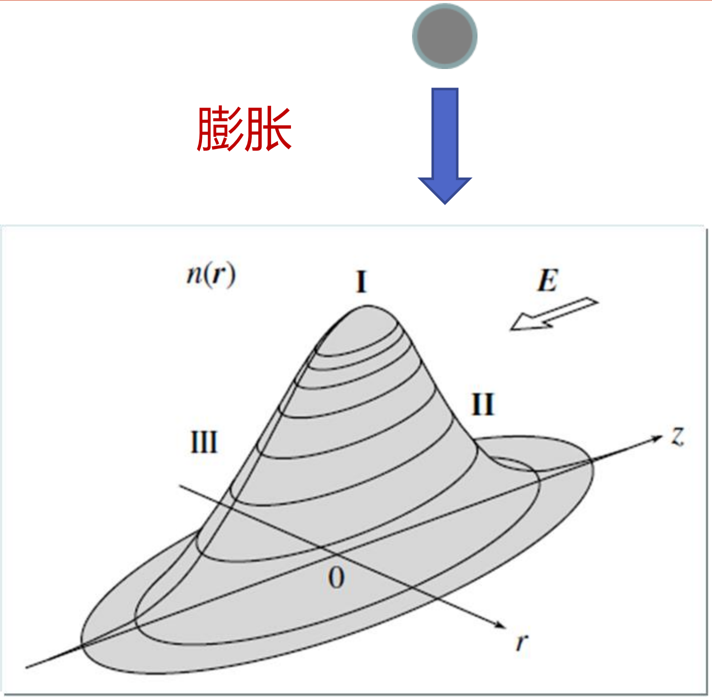
● 电子群输运相关参数

- 描述电子群输运的主要特征参量

迁移速度	扩散速度（扩散系数）
弹性碰撞系数	电离系数
激发系数	电子吸附系数
电子解吸附系数	复合系数

- 电子群输运参数受能量影响
  - 电子群的平均能量和能量分布由约化电场决定
  - 电子在两次碰撞间获得的能量正比于约化场强

膨胀



约化场强：电场强度与气体分子/原子数密度之比(E/N)

约化场强的单位：

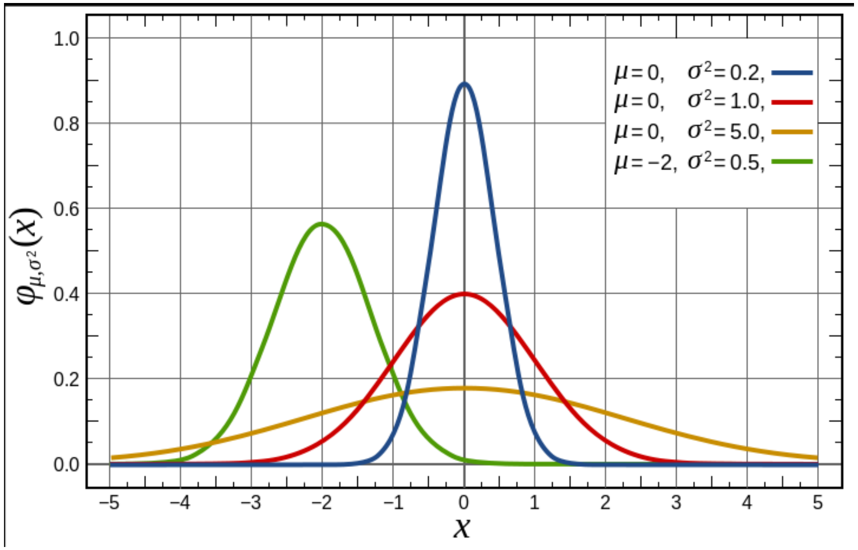
- Td(Townsend)
- 1 Td = 10^{-21} Vm^2 = 10^{-17} V cm^2
- 0℃、电场1V/cm、气压1Torr 对应的E/N约为2.823Td

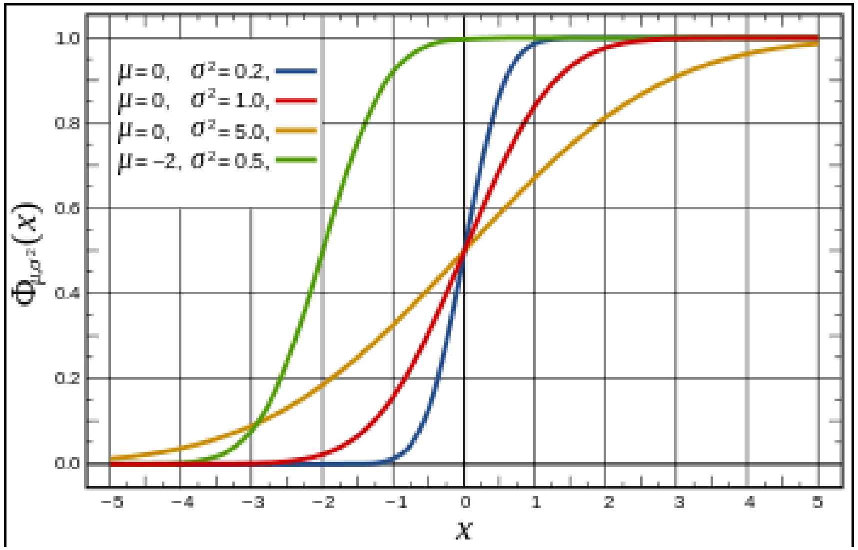
带电粒子输运的唯象描述

- 带电粒子的实空间分布
  - 高斯分布（Gaussian distribution）
    - 又称正态分布
    - μ为均值， σ 为标准差
    - μ = 0， σ = 1, 标准正态分布

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  - 等离子体在空间的分布
    - 空间局部为高斯分布
    - 类似一个无穷小点上产生的许多粒子向四周扩散

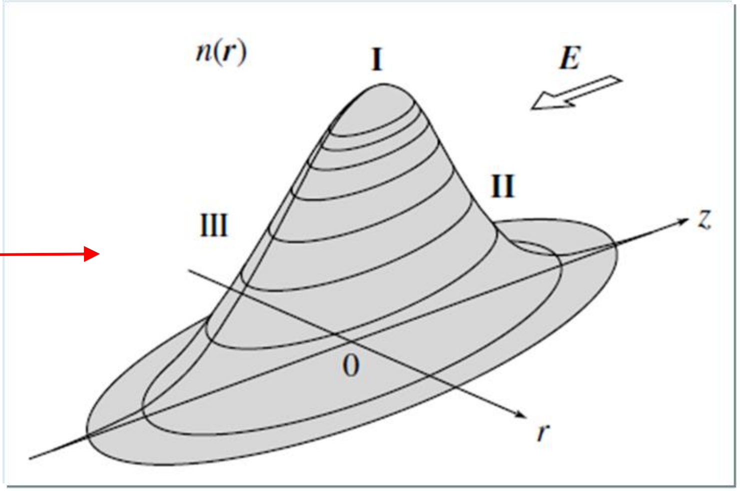




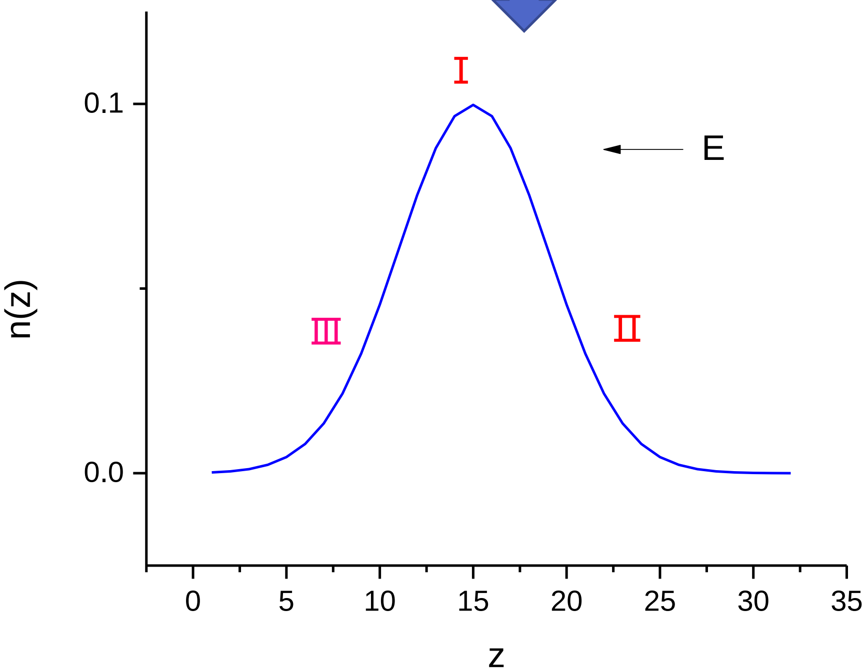
带电粒子输运的唯象描述

● 电子群实空间输运参数求解的假设

- 在外场作用下，电子群的空间分布会轻微偏离高斯分布



- 假设：
    - 一维化：输运参数在空间均匀，只有z方向存在外加电场
    - 碰撞简化：只发生弹性碰撞、且假设电子碰撞率Rm与其运动速率无关
    - 稳态假设：电子群的平均速度保持不变
    - 微扰假设：外电场对速度的影响是小量



带电粒子输运的唯象描述

- 实空间输运参数求解-动量守恒

  - 输运参数（迁移速度、扩散系数）的近似求解

- v_d: 迁移速度
- D: 扩散系数
- R_m: 碰撞率
- n: 电子密度

外加电场使电子产生与场相反方向的净流量Γ

$$\boldsymbol{\Gamma} = n\boldsymbol{v}_0 = n\boldsymbol{v}_d - D\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

动量守恒

各向同性假设、一维假设

$$\frac{d}{dt}(mnv_z\boldsymbol{k}) = e(-\boldsymbol{E})n - \boxed{mn\left(\boldsymbol{v}_d - \frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)R_m,}$$

阻尼

稳态 $\frac{dv_z}{dt} = 0$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = v_z \frac{\partial n}{\partial z}.$$

$$0 = (-e\boldsymbol{E} - m\boldsymbol{v}_d R_m)\, n,$$

$$0 = (mv_z^2 - mDR_m)\frac{\partial n}{\partial z}.$$

$$\frac{v^2}{3} \approx v_z^2$$

$$\boldsymbol{v}_d = -\frac{e\boldsymbol{E}}{mR_m}.$$

估算式

$$D = \frac{v^2}{3R_m}.$$

带电粒子输运的唯象描述

- 实空间输运参数求解-能量守恒

电子的平均能量$\langle\varepsilon_m\rangle$：
- 电子平均能量
- 与实验测量E/N相关

□ z方向电场对平均动能和碰撞率的影响

求$R_m(\langle\varepsilon_m\rangle)$

根据能量守恒，总动能的变化：

$$\frac{d}{dt}(n\langle\varepsilon_m\rangle) = \underbrace{e(-\mathbf{E})n\cdot\left(\mathbf{v}_d - \frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\mathbf{k}\right)}_{\text{单位时间从外电场获得的能量}} - \underbrace{n\frac{2m}{M}\langle\varepsilon_m\rangle R_m}_{\text{与中性粒子弹性碰撞的能量转移}},$$

$$v_d = -\frac{eE}{mR_m}.$$

$$D = \frac{v^2}{3R_m}.$$

$$\frac{e^2E^2}{mR_m} - \frac{2eE\langle\varepsilon_m\rangle}{3mR_m}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{2m}{M}\langle\varepsilon_m\rangle R_m = 0.$$

带电粒子输运的唯象描述

- 实空间输运参数求解--能量守恒

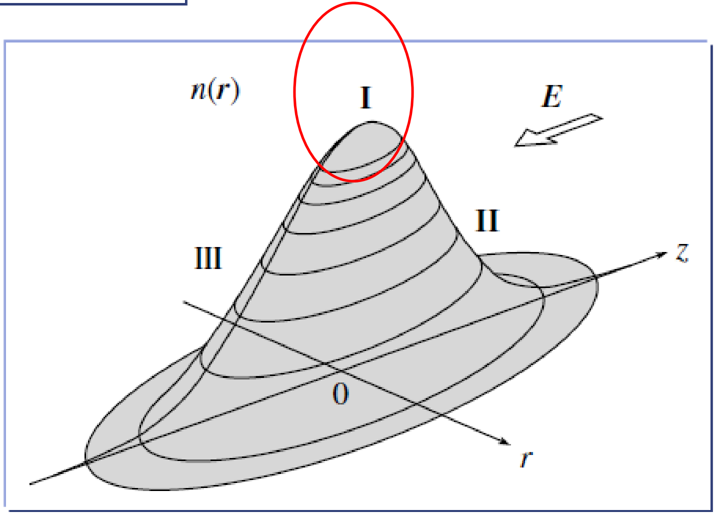
  - z方向电场对平均动能和碰撞率的影响(续)

    将碰撞率修正为函数$R_m(\langle\varepsilon_m\rangle)$

    特定电子数密度分布条件下（如高斯分布的顶点，I区） $\partial n/\partial z = 0$

$$\frac{e^2E^2}{mR_m} - \frac{2eE\langle\varepsilon_m\rangle}{3mR_m}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{2m}{M}\langle\varepsilon_m\rangle R_m = 0.$$

$$\langle\varepsilon_{m0}\rangle = \langle\varepsilon_m\rangle|_{\frac{\partial n}{\partial z}=0} = \frac{M}{2m^2}\left(\frac{eE}{R_m}\right)^2.$$



带电粒子输运的唯象描述

- 实空间输运参数求解-能量守恒

  - z方向电场对平均动能和碰撞率的影响(续)

特定电子数密度分布条件下（除顶点以外的其它点） $\partial n/\partial z \neq 0$

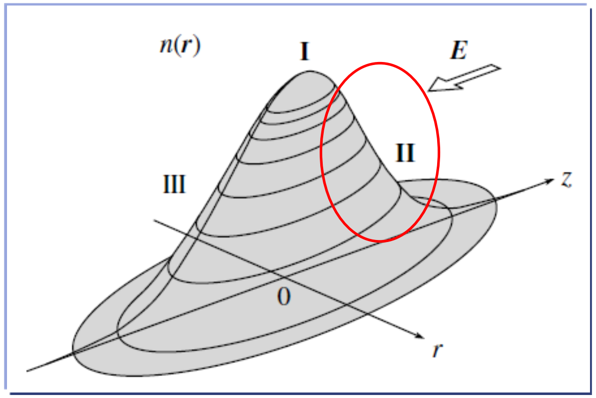
在高斯分布的负梯度区（II区） $\langle \varepsilon_m \rangle = \langle \varepsilon_{m0} \rangle + \Delta\varepsilon.$

$$\frac{e^2 E^2}{m R_m} - \frac{2e\,E\,\langle \varepsilon_m \rangle}{3m R_m}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{2m}{M}\langle \varepsilon_m \rangle R_m = 0.$$

碰撞率R_m与电子平均能量相关，泰勒展开

$$R_m(\langle \varepsilon_m \rangle) = R_{m0} + \frac{\partial R_m}{\partial \varepsilon}|_0 \Delta\varepsilon,$$

$$\langle \varepsilon_m \rangle = \langle \varepsilon_{m0} \rangle \left[1 - \frac{2\langle \varepsilon_{m0} \rangle}{3eE\left(1 + 2\frac{\partial R_m}{\partial \varepsilon}|_0 \frac{\langle \varepsilon_{m0} \rangle}{R_{m0}}\right)}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\right].$$



带电粒子输运的唯象描述

- 扩散系数的各向异性修正（三维化）

  - 当电子群中存在密度梯度时，电子与中性粒子的碰撞产生扩散

- D_L: 纵向扩散系数
- D_T: 横向扩散系数

一维情况

$$\Gamma = nv_0 = nv_d - D\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

三维情况

$$\Gamma = nv_d\boldsymbol{k} - D_0\left(\frac{\partial n}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial n}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) - D_0\left(1 - \frac{\xi}{1+2\xi}\right)\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

Cartesian coordinates $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ ⟷ unit vectors $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$

$$\langle\varepsilon_m\rangle = \langle\varepsilon_{m0}\rangle\left[1 - \frac{2\langle\varepsilon_{m0}\rangle}{3eE\left(1 + 2\frac{\partial R_m}{\partial\varepsilon}|_0\frac{\langle\varepsilon_{m0}\rangle}{R_{m0}}\right)}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\right].$$

(z方向)

回代到动量守恒方程

$$D_T = D_0 = \frac{v^2}{3R_m},$$

$$D_L = D_0\left(1 - \frac{\xi}{1+2\xi}\right),$$

$$\xi = \frac{\langle\varepsilon_{m0}\rangle}{R_{m0}}\frac{\partial R_m}{\partial\varepsilon}\bigg|_0.$$

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-速度空间分布

  - 概率分布g(v)

    - g(v)dv：粒子速度处于v到v+dv间的概率

      球坐标系中： $dv = v^2 sin\theta d\theta d\varphi$

    - 热平衡状态，速度满足Maxwellian分布

$$g_M(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

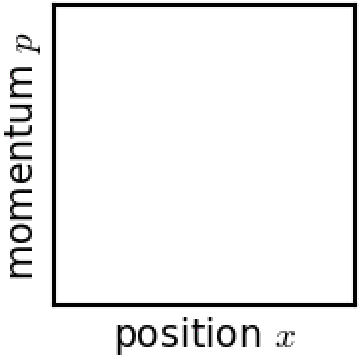
  - 相空间分布函数g(v,r,t)

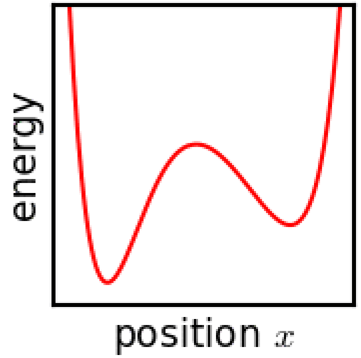
    - 描述粒子群在速度空间、实空间和时间上的发展

    - 顶层的宏观描述函数

相空间：

- 6维：x, y, z, v_x, v_y, v_z
- 速度：动量、能量





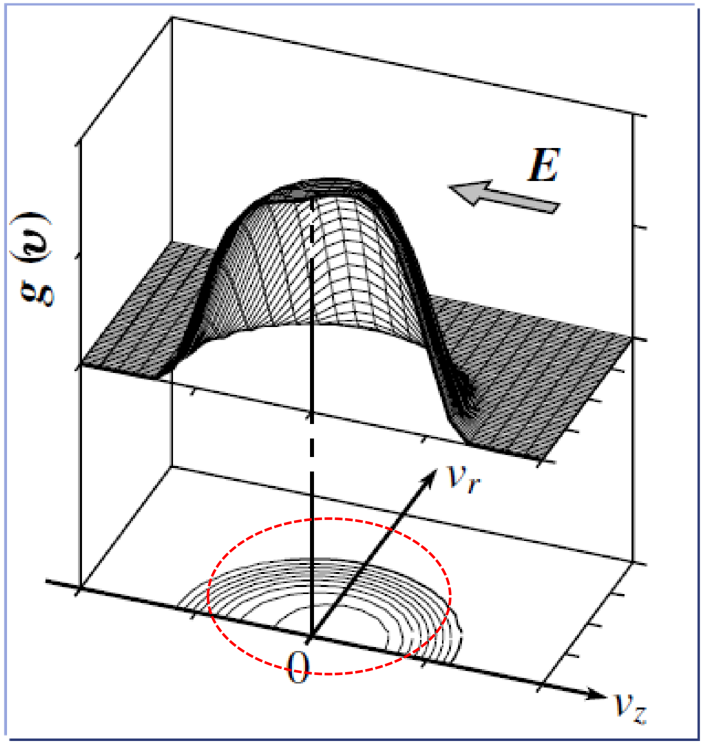
带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-近似条件
  - 低密度等离子体中，电子很难达到热平衡
    - 原因1：电子与中性粒子的碰撞概率低
    - 原因2：碰撞时，能量转换系数小
  - 输运参数在实空间均匀时，可以认为是准热平衡状态
    - 实空间的局部：输运参数均匀、准热力学平衡
    - 准热力学平衡的流体力学条件
      - 电子从外场获取的能量通过碰撞消耗，达到平衡
      - 电子群中，取决于能量分布的特性维持不变
  - 满足热平衡或上述准热平衡条件时，相空间分布函数g(v,r,t)可在实空间和速度空间分离
    - 满足条件时，称：空间弛豫均匀电子群
    - 等离子体过程初期或边界上，不满足条件，称：非局部/非弛豫电子群

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-外场作用下的速度分布

  - 在稳态时，外场作用下
    - 电子速度分布满足准热平衡的轴对称分布
    - 轴向：电场方向，引起非对称，“顶部偏移”
    - 径向/横向：对称
  - 速度分布中含有迁移和扩散的信息
    - 电子的净迁移：正向和反向的差异造成
    - 正、反向速度相互对应：电子群实空间中，某一点的一些电子离开到其它区域，必然会有相邻区域的电子补充



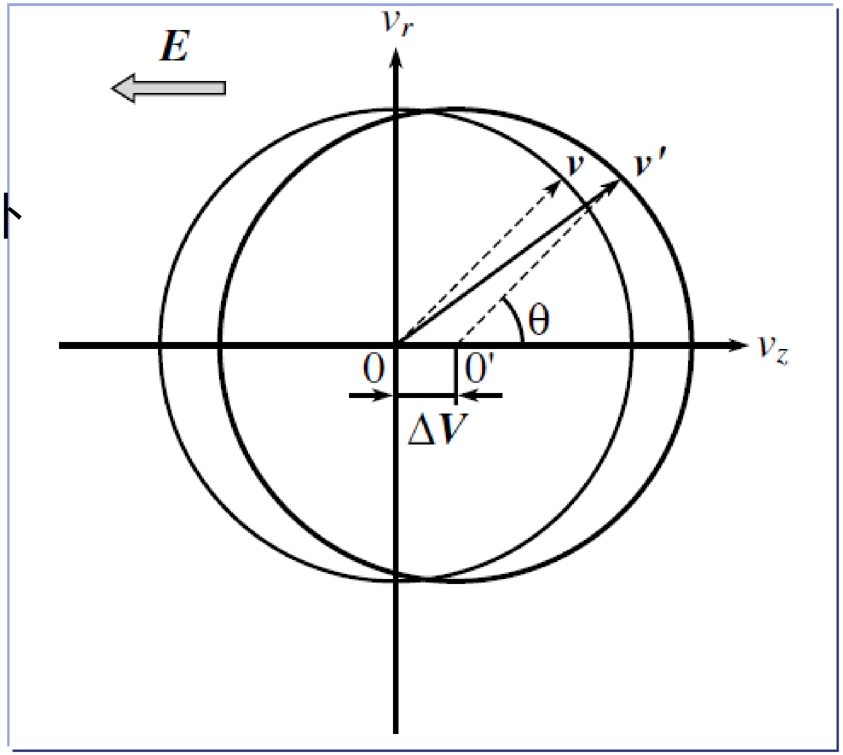
电子在速度空间满足的g(v)分布函数，沿z方向轴对称

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-非Maxwellian分布函数的近似求解

□ 电子速度分布

- 外电场E为-z方向
- 以各向同性$g_0(v)$作为初始分布（外加场作用下，还未达到准热平衡）
- 利用泰勒级数展开



$$|\, v \,| \gg |\, \Delta V \cos\theta \,|$$

$$v' - v \cong \Delta V \cos\theta$$

$$g(v') = g(v + \Delta V \cos\theta) \cong g_0(v) + \Delta V \cos\theta \frac{d g_0(v)}{d v},$$

式右第二项：

- Non-Maxwellian项
- 各向异性项

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-非对称速度分布函数的近似求解（续）

N: 中性粒子密度

Q_m: 弹性碰撞截面

利用电子动量守恒

$$\frac{\partial(\mathrm{nm}<\mathbf{v}>)}{\partial t}=e(\text{-}\mathbf{E})\,\mathrm{n}-\int \underbrace{nm\mathbf{v}\cos(\theta)NQ_m(\mathrm{v})\,\mathrm{v}g(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}}_{\text{碰撞消耗的动量}}=0$$

第二项

$$g(\boldsymbol{v}')=g(\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{V}\cos\theta)\cong g_0(v)+\Delta \boldsymbol{V}\cos\theta\frac{dg_0(v)}{dv},$$

$$\int nmv^2NQ_m(v)\left[g_0(v)+\Delta\boldsymbol{V}\cos\theta\frac{dg_0(v)}{dv}\right]\cos\theta\,2\pi\sin\theta\,d\theta\,v^2dv$$
$$=\frac{4\pi}{3}\int nmv^4NQ_m(v)\Delta\boldsymbol{V}\frac{dg_0(v)}{dv}dv.$$

$$v^4NQ_m(v)\Delta \mathrm{V}\frac{dg_0(v)}{dv}=\frac{d[v^4NQ_m(v)\Delta \mathrm{V}\,g_0(v)]}{dv}-\frac{d}{dv}\left[v^4NQ_m(v)\Delta \mathrm{V}\right]g_0(v)$$

反对称

分部积分

稳态

$$\frac{4\pi}{3}\int m\frac{d}{dv}\left[v^4NQ_m(v)\Delta \mathrm{V}\right]g_0(v)=eE$$

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-非对称速度分布函数的近似求解（续）

$$-\frac{4\pi}{3}\int m\frac{d}{dv}\left[v^4 NQ_m(v)\Delta V\right]g_0(v)=eE$$

对任意E和$Q_m(v)$都成立

$$\Delta V=-\frac{eE}{mNQ_m(v)v}$$

$$g(v)=g_0(v)-\frac{eE\cos\theta}{mNQ_m(v)v}\frac{dg_0(v)}{dv}$$

利用电子能量平衡（流体力学条件）

$$\frac{2m}{M}\frac{1}{2}mv^2NQ_m(v)vg(v)dv.$$ 碰撞消耗能量

相互抵消

$$eEv\cos\theta g(v)dv.$$ 从外电场获取能量

$$\int\frac{m}{M}mv^2NQ_m(v)v\left[g_0(v)-\frac{eE\cos\theta}{mNQ_m(v)v}\frac{dg_0(v)}{dv}\right]dv$$
$$=\int eEv\cos\theta\left[g_0(v)-\frac{eE\cos\theta}{mNQ_m(v)v}\frac{dg_0(v)}{dv}\right]dv.$$

求解方程

$$g_0(v)=A\exp\left[-\frac{3m}{M}\int_0^v\left(\frac{NQ_m(v)v}{eE/m}\right)^2vdv\right]$$

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-电子的能量分布函数

□ 电子按能量分布

$$g_0(v) = A\exp\left[-\frac{3m}{M}\int_0^v \left(\frac{NQ_m(v)v}{eE/m}\right)^2 vdv\right]$$

$\int g_0(v)dv = 1$

确定A

$$g_0(v)4\pi v^2 dv = f(\varepsilon)d\varepsilon; \quad \frac{1}{2}mv^2 = \varepsilon.$$

$f_0(\varepsilon)$

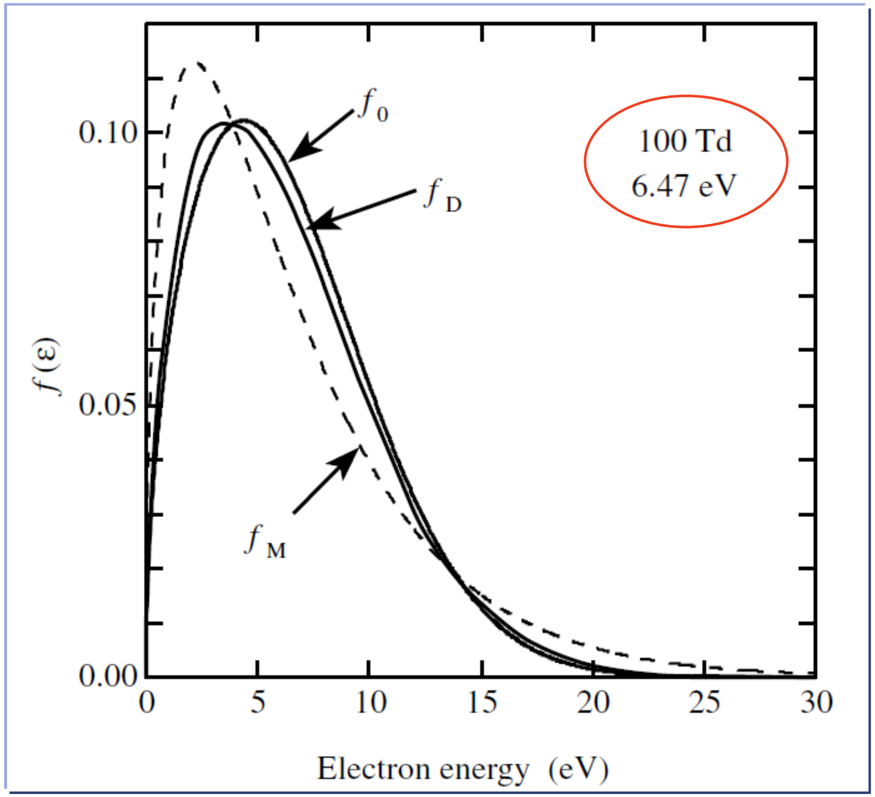
$$g(v) = g_0(v) - \frac{eE\cos\theta}{mNQ_m(v)v}\frac{dg_0(v)}{dv}$$

$$f_D(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}\exp\left[-0.548\left(\frac{\varepsilon}{\langle\varepsilon\rangle}\right)^2\right]$$

$$g_M(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$f_M(\varepsilon) = A\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{3\varepsilon}{2\langle\varepsilon\rangle}\right),$$

- f_M: Maxwellian分布（无外加电场）
- f_0: 非热平衡分布（有外加电场）
- f_D: Druyvestyn分布（“准热平衡”，有外加电场）



带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-迁移速度的计算

$$v_d = \int_v v g(v) dv$$

v_d: 迁移速度

$$g(v) = g_0(v) - \frac{eE\cos\theta}{mNQ_m(v)v}\frac{dg_0(v)}{dv}$$

$$\begin{aligned} v_d &= \int_{v,\theta} v\cos\theta \left[g_0(v) - \frac{eE\cos\theta}{mNQ_m(v)v}\frac{dg_0(v)}{dv} \right] 2\pi v^2 \sin\theta \, d\theta \, dv \\ &= -\frac{4\pi}{3}\frac{eE}{m}\int \frac{v^2}{NQ_m(v)}\frac{dg_0(v)}{dv} dv. \end{aligned}$$

利用对称性，第一项积分为零

采用能量分布函数

$$v_d = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{m}} eE \int \frac{\varepsilon}{NQ_m(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{f(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) d\varepsilon,$$

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-迁移速度的计算

D_T: 横向扩散系数

$$D_T = \lambda \langle v \rangle / 3$$

$\lambda(v) = 1/NQ_m(v)$

$$\boxed{D_T = \frac{1}{3}\int \frac{v}{NQ_m(v)} g(v)dv = \frac{4\pi}{3}\int \frac{v^3}{NQ_m(v)} g_0(v)dv.}$$

$$D_T = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{m}}\int \frac{\sqrt{\varepsilon}}{NQ_m(\varepsilon)} f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

带电粒子输运的唯象描述

- 电子群在速度空间的输运-特征能量与爱因斯坦关系

  - 特征能量ε_k

    - 电子平均能量不能直接测量，电子温度可测量

    μ: 迁移率, $=v_d/E$,

    - 根据前面获得的D_T和v_d的表达式

$$\varepsilon_k = e\frac{D_T}{\mu} = e\frac{D_T}{v_d}E = \frac{-eE\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{m}}\int\frac{\sqrt{\varepsilon}}{NQ_m(\varepsilon)}f(\varepsilon)d\varepsilon}{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{m}}eE\int\frac{\varepsilon}{NQ_m(\varepsilon)}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{f(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)d\varepsilon},$$

定义

热平衡，Maxwellian分布

$$\varepsilon_k = \frac{\int\frac{\varepsilon}{NQ_m(\varepsilon)}\exp\left(-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\langle\varepsilon\rangle}\right)d\varepsilon}{\frac{3}{2\langle\varepsilon\rangle}\int\frac{\varepsilon}{NQ_m(\varepsilon)}\exp\left(-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\langle\varepsilon\rangle}\right)d\varepsilon} = \frac{2}{3}\langle\varepsilon\rangle\ \ [\mathrm{eV}].$$

热平衡 $\langle\varepsilon\rangle = 3kT/2$

Einstein关系：
(Nernst-Townsend关系)

$$\frac{D_T}{\mu} = \frac{kT}{e}.$$

特征能量一般比平均能量小30%

带电粒子输运的唯象描述

- 热平衡及其控制方程
  - 热平衡
    - 所有过程由其反过程平衡，在整个区域所有粒子具有相同的温度
    - 在实空间和速度空间都存在更常见的分布
  - 局部热力学热平衡（*Local Thermodynamic Equilibrium*，LTE）
    - 严格的热平衡很难满足
    - LTE：
      - 等离子体中，假设每一点上满足热平衡，但各点的温度不一样
      - 温度仅仅用作热力学平衡的一个参量
      - 尽管不严谨，但在理论分析中十分有效

带电粒子输运的唯象描述

- 热平衡及其控制方程(续)

□ 实空间的Boltzman分布

$$\boldsymbol{\Gamma} = n\langle \boldsymbol{v} \rangle$$

$$= n\boldsymbol{v}_d - D\nabla n = n\mu \boldsymbol{E} - D\frac{\partial n}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

热平衡态，净粒子流为零

$$\boxed{\boldsymbol{v}_d = \mu \boldsymbol{E}}$$

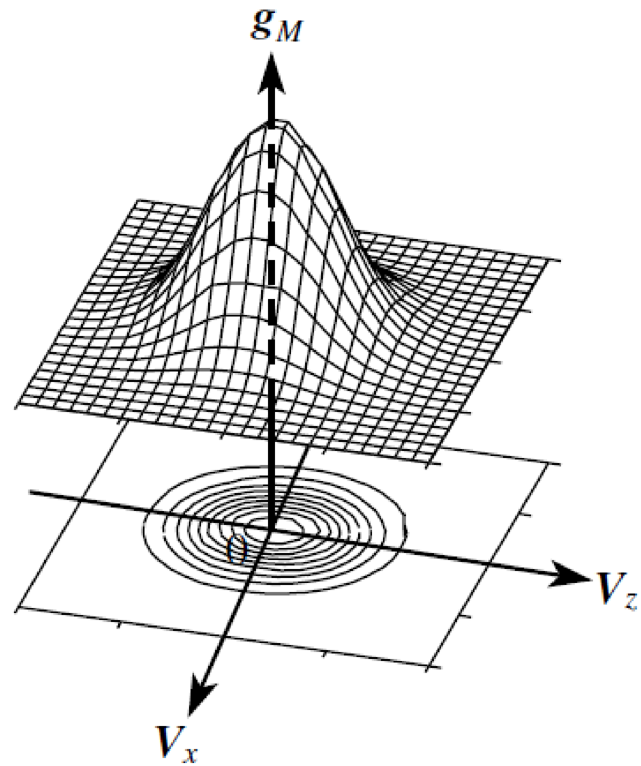
$$\boxed{\frac{\mu}{D}E = \frac{-\mu}{D}\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z}.}$$

控制方程

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu}{D}V(z)\right)$$

Boltzman分布函数

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{eV(z)}{kT}\right)$$



带电粒子输运的唯象描述

- 热平衡及其控制方程(续)

  - 速度空间Maxwellian分布

    - 分布函数每个方向的分量满足相同的分布，且相互独立
    - 每个方向速度分布的幅值相等，所有方向速度平均值等于零

$$g(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = G(v_x)dv_x G(v_y)dv_y G(v_z)dv_z$$
$$= g(v^2)dv_x dv_y dv_z ,$$

$$\boxed{v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 ,}$$

$$g(v^2) = G(v_x)G(v_y)G(v_z)$$

两边同除以g(v²)

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dg(\mathrm{v})}{dv_x} &= \frac{dg(\mathrm{v})}{dv}\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\\ &= \frac{dG(\mathrm{v}_x)}{dv_x}G(\mathrm{v}_y)G(\mathrm{v}_z)\end{aligned}}$$

$$\frac{1}{v}\frac{g'(\mathrm{v})}{g(\mathrm{v})} = \frac{1}{v_x}\frac{G'(\mathrm{v}_x)}{G(\mathrm{v}_x)}$$

V_x V_y V_z独立，右边项都等于常数

$$G(\mathrm{v}_x) = a^2 \exp\left(-\alpha v_x^2\right)$$

方程的解

$$g(v^2) = g\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = A\exp\left(-\alpha\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)$$

带电粒子输运的唯象描述

- 热平衡及其控制方程(续)

  - 速度空间Maxwellian分布

$$g(v^2) = g\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = A \exp\left(-\alpha\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)$$

全空间分布总概率为1

$$\boxed{\begin{aligned} 1 &= \int g\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) dv_x dv_y dv_z \\ &= A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha v_x^2\right) dv_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha v_y^2\right) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha v_z^2\right) dv_z \\ &= A \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)^3, \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^3 .}$$

带电粒子输运的唯象描述

- 热平衡及其控制方程(续)

□ 速度空间Maxwellian分布

$$g(v^2) = g\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = A\exp\left(-\alpha\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)$$

热平衡下温度的定义

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{m}{2}\int\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)e^{-\alpha\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}dv_x dv_y dv_z$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\frac{3m}{2}\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2},$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m}{2kT}}$$

$$\boxed{A = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{3,} .}$$

$$\boxed{g_M = g(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}\right)}$$

带电粒子输运的唯象描述

● 热平衡及其控制方程(续)

□ 特征速率

- 速率分布函数

$$F(v)dv = \int_\theta \int_\varphi g_M(v^2)v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv$$
$$= 4\pi v^2 g_M(v^2)dv\ .$$

- 最可几速率

$$\tilde{v} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \Leftarrow dF/dv = 0$$

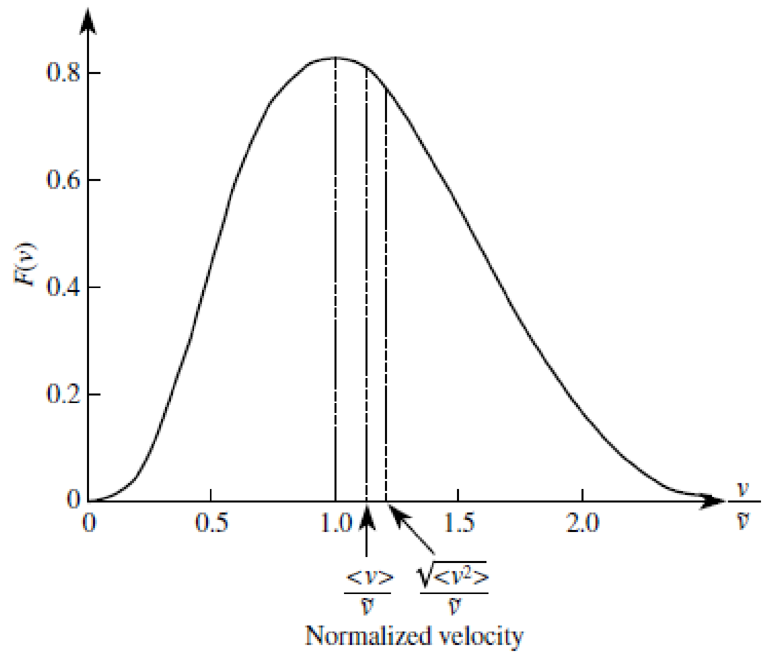
- 平均速率

$$\langle v\rangle = \int vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

- 均方根速率

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\int v^2 F(v)dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

$$\boxed{\tilde{v} < \langle v\rangle < \sqrt{\langle v^2\rangle}.}$$



- 平均速率：用于动量转移计算
- 均方根速率：与平均动能相对应
- 最可几速率：概率分布的峰值

《等离子体电子学》

第二章 带电粒子输运的唯象描述

本章结束

下一章：等离子体宏观特性

课件下载：ftp://58.206.96.66/incoming/PE2018/

或 http://Wanghg.gr.xjtu.edu.cn 教学栏目

（在幻灯片放映模式中时单击该箭头）