信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn
wanghg.gr.xjtu.edu.cn

本章主要内容

1. 双边Z变换及其收敛域ROC。

2. ROC的特征，各类信号的ROC，零极点图。

3. Z变换的性质，常用信号的Z变换。

4. Z反变换，利用部分分式展开进行反变换。

5. 用Z变换表征LTI系统，系统函数，LTI系统的Z变换分析法。

6. 单边Z变换，增量线性系统的分析。

9.0 引言：(Introduction)

在第5章，已讨论过复指数信号是一切LTI系统的特征函数 $z^n \to h(n) \to H(z)z^n$ 其中

$$H(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty} h(n)z^n$$

当 $z=e^{j\omega}$ 时，上式就是离散时间傅立叶变换。

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

本章讨论更一般的情况（即 $z = re^{j\omega}$ 时），称为 z 变换。

Z 变换与拉氏变换相对应，也是离散时间傅立叶变换的推广。

Z 变换的许多性质及其分析方法和基本思想都与拉氏变换有相似之处。 当然，Z 变换与拉氏变换也存在着一些重要的差异。

9.1 双边 Z 变换：(The Z-Transform)

一. 定义:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$ 其中 $z=re^{j\omega}$ 是一个复数。

二. z变换与离散时间傅立叶变换的关系：

$$X(z)=X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}=F[x(n)r^{-n}]$$

这表明：$x(n)$的 Z 变换就等于对 $x(n)r^{-n}$ 做DTFT。

因此，**Z 变换是对DTFT的推广**。

当$z=e^{j\omega}$ 即 $r=1$ 时， Z变换就成为离散时间傅立叶变换，故：**DTFT是 Z 变换的特例**。

由于 $r=1, z=e^{j\omega}$ 在Z平面上是单位圆，因此也可以说：**DTFT是在单位圆上所做的 Z 变换**。

所以，**Z变换是离散时间傅立叶变换的推广，它的适用范围更广，收敛性更强**。

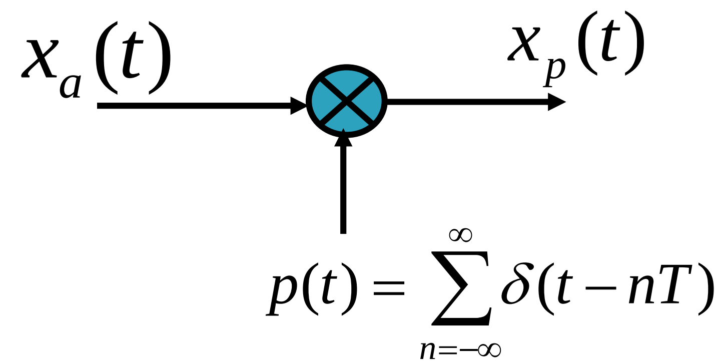
三. Z 变换与拉氏变换的关系:

设 $x(n)$是对连续时间信号 $x_a(t)$ 理想采样后而得到的序列。

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$x(n)=x_a(nT)$$

对 $x_p(t)$ 做拉氏变换有:



$$X_p(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-snT}$$

对 $x(n)$做 z 变换有: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)z^{-n}$

$$\therefore\ X(z)\big|_{z=e^{sT}} = X_p(s)$$

这表明：采样信号的拉氏变换与采样所得序列的z变换之间，本质上是一种映射关系。即通过$z=e^{sT}$**将s平面上的** $X_p(s)$ **映射成 z 平面上的** $X(z)$ **。**

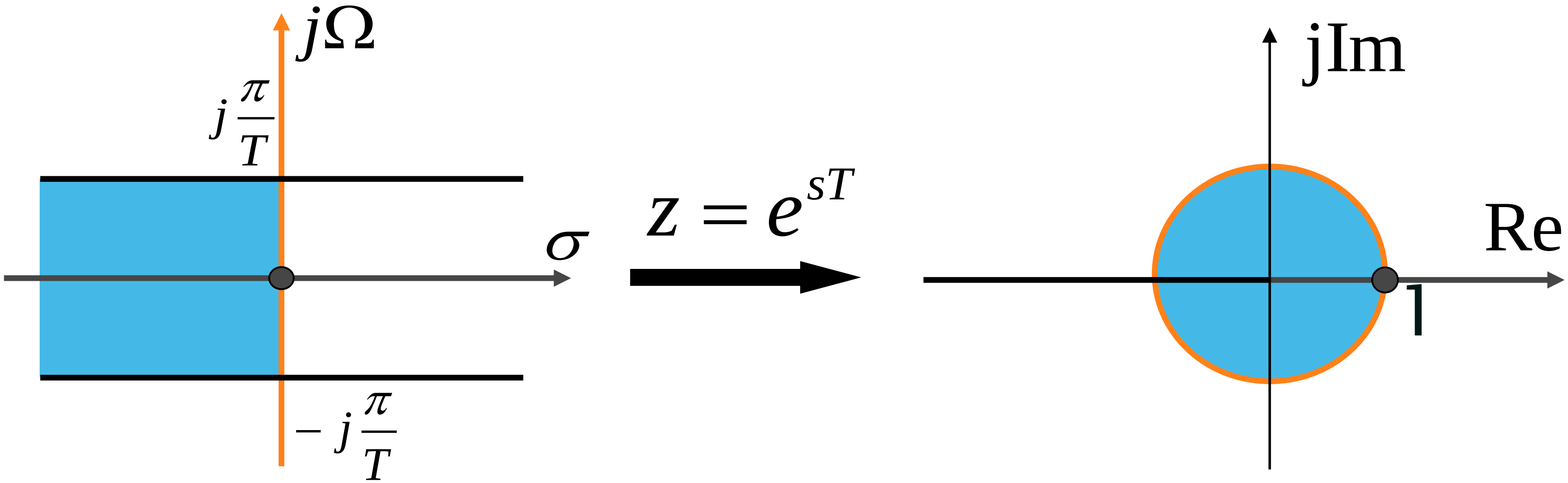
由 $z=e^{sT}$**，**$s=\sigma+j\Omega$**，将 z 改写为** $z=re^{j\omega}$**，**

$$\therefore r=e^{\sigma T}, \omega=\Omega T$$

显然 $\sigma<0, r<1;\quad \sigma>0, r>1;\quad \sigma=0, r=1$

$$-\pi\le\omega\le\pi,\quad -\frac{\pi}{T}\le\Omega\le\frac{\pi}{T}\qquad \omega=0,\ \ \Omega=0$$

此映射关系如图所示：



四．Z 变换与DFT的关系：

如果 $x(n)$ 是有限长序列，长度为N，则其Z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

对 $X(z)$ 在单位圆上采样可得：

$$X(z)\big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

对 $x(n)$ 做N点DFT有：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad \therefore X(k) = X(z)\big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

这表明：有限长序列的DFT就是对该序列的 z 变换在单位圆上以 $\frac{2\pi}{N}$ 为间隔采样所得的样本。这是必然的。因为在单位圆上的z变换就是DTFT，也就是 $x(n)$ 的频谱。对 z 变换在单位圆上均匀采样，就是对信号的频谱采样，这就是DFT与频域采样的关系。

7.2 Z 变换的收敛域:

(The ROC for the Z-Transform)

一. Z 变换的收敛问题:

由于z变换是一个无穷级数，与DTFT一样存在着收敛的问题，这意味着:

1. 并非任何信号的 Z 变换都存在。

2. 并非 Z 平面上的任何复数都能使 $X(z)$ 收敛。

3. Z 平面上那些能使 $X(z)$ 收敛的点的集合就构成了 $X(z)$ 的ROC。

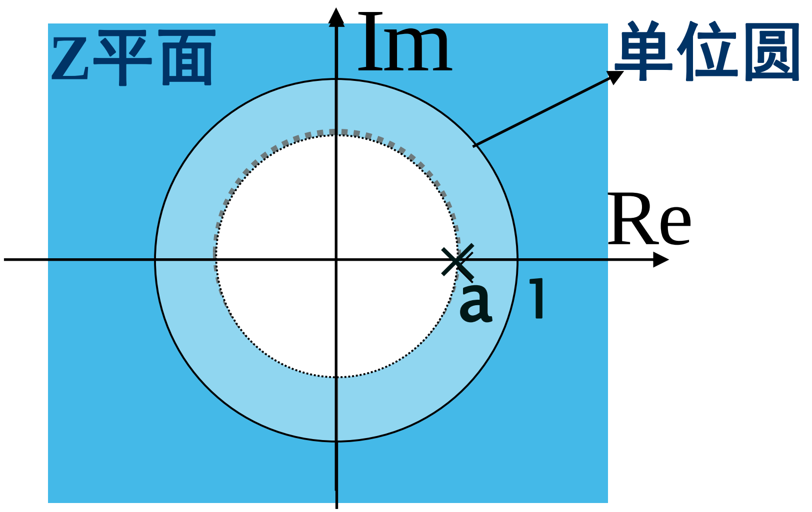
几个具体的例子:

例1. $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$ $|z|>|a|$时收敛

当$|a|<1$时 $x(n)$的DTFT存在。

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$ $|z|>|a|$



此时，ROC包括了单位圆。

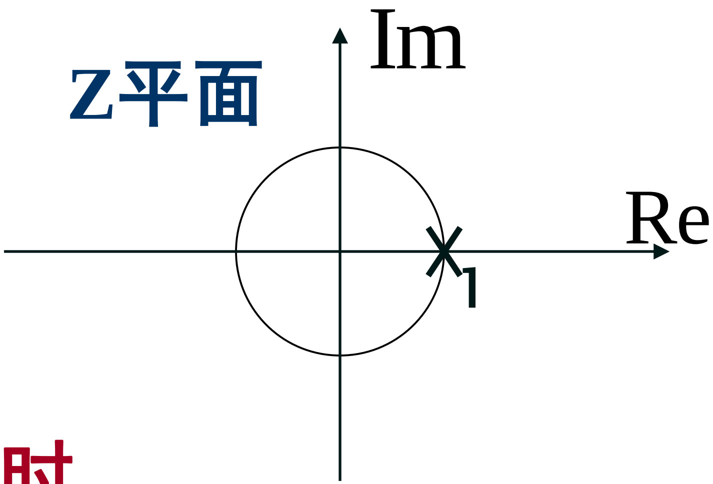
例2. $x(n)=u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$ $|z|>1$

此时，ROC不包括单位圆，

所以不能从 $X(z)$ 简单通过将

$z \rightarrow e^{j\omega}$ 得到 $X(e^{j\omega})$。



当 $X(z)$ 的收敛域包括单位圆时

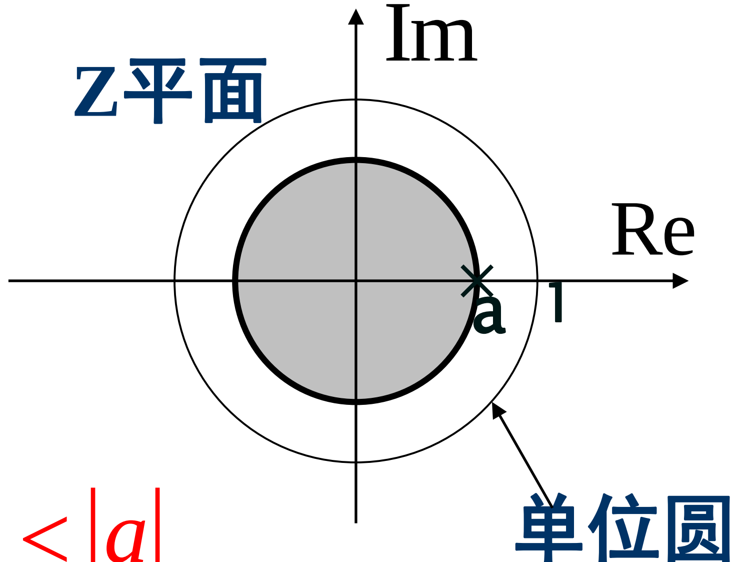
$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

例3. $x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$|z| < |a|$

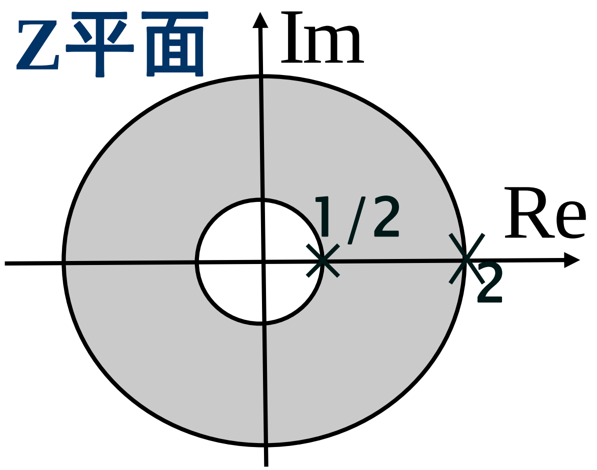


以上实例说明，不同的信号可能具有相同的z变换式，只是ROC不同，因此ROC是至关重要的。只有 z 变换式连同相应的ROC，才能与信号建立一一对应的关系。

例4. $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-2^n u(-n-1)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}}$$



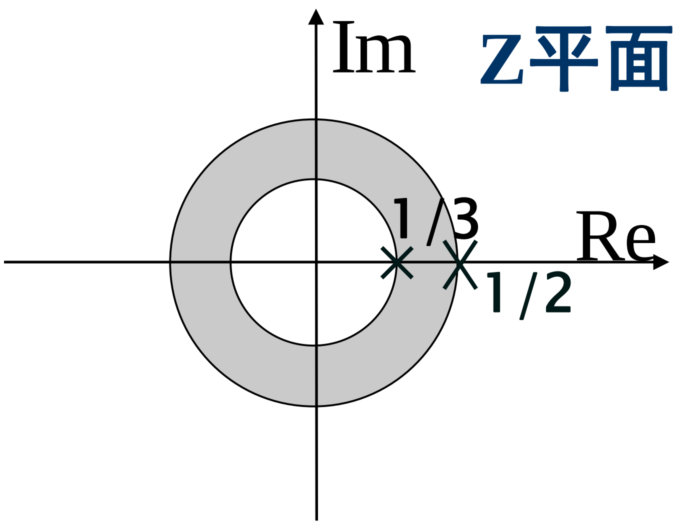
$$\mathrm{ROC}:\frac{1}{2}<|z|<2$$

一般情况下，$X(z)$ 的ROC是 Z 平面上一个以原点为中心的圆环。

例5. $x(n)=(\frac{1}{3})^n u(n)-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2})^n z^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$



ROC: $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$

若 $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z|>1/2$ $|z|<1/3$ **无公共区域**

表明该信号的z变换不存在。

例6. $x(n)=\delta(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

ROC为整个z平面。

二. Z 变换的几何表示—零极点图:

如果 $X(z)$ 是有理函数:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=M\frac{\prod(z-z_i)}{\prod(z-z_p)}$$

z_i 称为零点

z_p 称为极点

在 z 平面上标出 $X(z)$ 的全部零极点，就构成了零极点图。它与实际的 $X(z)$ 最多只相差一个常数因子。

如果在零极点图上同时标出ROC，这就是 $X(z)$ 的几何表示，除了相差一个常数因子外，它与有理 z 变换是等价的。

三. ROC的特征:

由例子可以看出，**ROC是由** $X(z)$ **的极点位置决定的，ROC有如下几个特征:**

1. ROC是 z 平面上以原点为中心的环形区域。

由于$Z[x(n)]=F[x(n)r^{-n}]$ **，对给定的**$x(n)$**，Z变换收敛与否只取决于**r **，而与**ω **无关。**

$|z|=r$ **是z平面上以原点为中心，r为半径的圆，所以ROC是以原点为中心的同心圆构成的环域。**

2. ROC内无极点。

3.有限长序列的ROC是整个有限z平面，可能不包含 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 。

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)z^{-n} \qquad N_1 \le n \le N_2$$

a. 当 $N_1<0, N_2>0$ 时和式中既有 z 的正幂项，又有 z 的负幂项。ROC不包括 z=0 和 $|z|=\infty$ 。

b. 当 $N_1 \ge 0$ 时，和式中只有 z 的负幂项，ROC不包括z=0，但包括 $|z|=\infty$ 。

c. 当 $N_2<0$ 时，和式中只有 z 的正幂项，ROC不包括 $|z|=\infty$ ，但包括z=0。

4. 右边序列的ROC是最外部极点的外部，但可能不包括$|z|=\infty$。

设$x(n)$是右边序列，$n<N_1$ 时，$x(n)=0$

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x(n)z^{-n},\quad N_1\le n\le\infty$$

由$|z|=r_0\in\mathrm{ROC}$有 $\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|<\infty$，若 $r_1>r_0$

则 $$\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_1^{-n}\right|=\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$

$$\le\sum_{n=N_1}^{\infty}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1}<\infty \qquad \therefore |z|=r_1\in\mathrm{ROC}$$

当 $N_1<0$ 时，由于$X(z)$ 展开式中有若干个 Z 的正幂项，此时$|z|$不能为 ∞ 。

5. 左边序列的ROC是最内部极点的内部，但可能不包括$z=0$。

若 $r_0 \in \mathrm{ROC}$ $\quad r_1<r_0$ ，则

$$\sum_{n=-\infty}^{N_1}\left|x(n)r_1^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{N_1}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot(\frac{r_0}{r_1})^n$$

$$\leq\sum_{n=-\infty}^{N_1}\left|x(n)r_0^{-n}\right|\cdot(\frac{r_0}{r_1})^{N_1}<\infty \qquad \therefore r_1\in \mathrm{ROC}$$

当 $N_1>0$ 时，由于$X(z)$ 的展开式中包括有若干Z

的负幂项，此时 Z 不能为零。

6. 双边序列的 Z 变换如果存在，则ROC必定是一个环形区域。

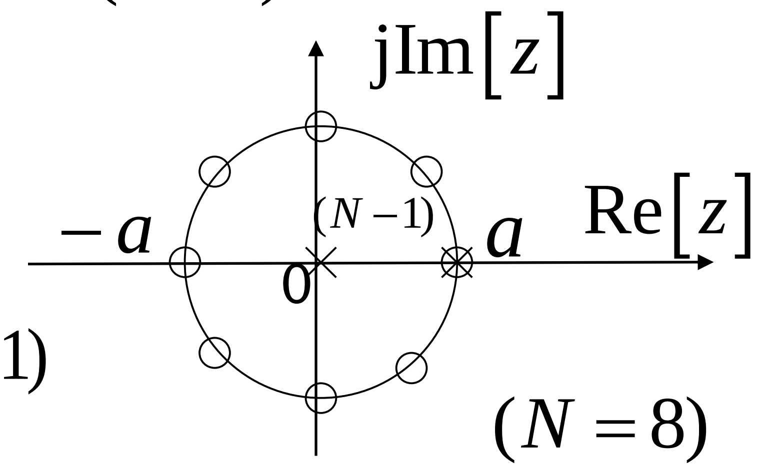
例1. $x(n)=\begin{cases} a^n, 0\le n\le N-1, & a>0 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n z^{-n}=\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}=\frac{z^N-a^N}{z^{N-1}(z-a)} \qquad \mathrm{ROC}:|z|>0$$

极点：$z=a$（一阶）

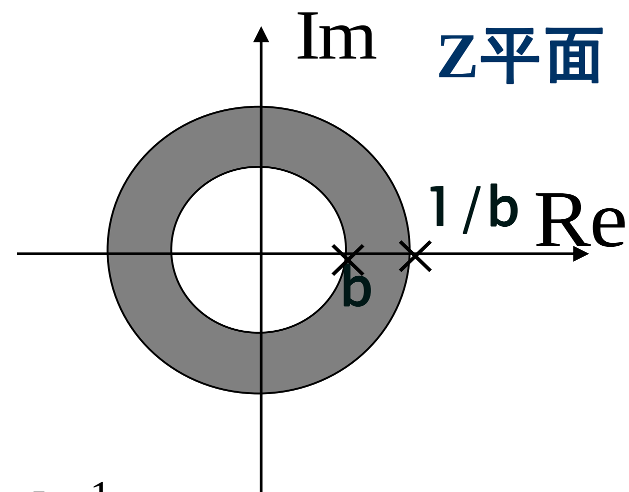
$z=0$（N－1阶）

零点：$z=ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\quad (k=0,1\cdots N-1)$



在 $z=a$ 处，零极点抵消，在有限z平面内无极点。

例2. $x(n)=b^{|n|}, b>0$



$$x(n)=b^{n}u(n)+b^{-n}u(-n-1)$$

$$b^{n}u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-bz^{-1}},|z|>b$$

$$b^{-n}u(-n-1)\leftrightarrow-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},|z|<b^{-1}$$

在 $b>1$ 时，两部分收敛域无公共部分，表明此时 $X(z)$ 不存在。

$0<b<1$ 时，ROC为 $b<|z|<1/b$

本章主要内容

1. 双边Z变换及其收敛域ROC。

2. ROC的特征，各类信号的ROC，零极点图。

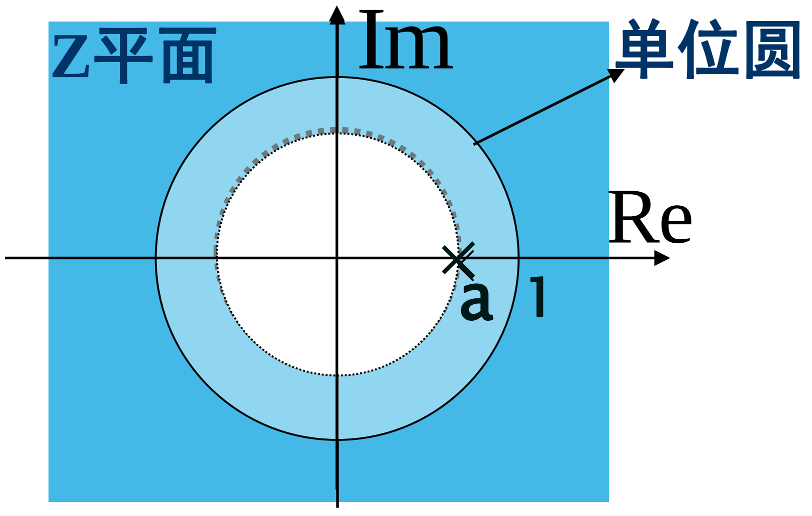
3. Z变换的性质，常用信号的Z变换。

4. Z反变换，利用部分分式展开进行反变换。

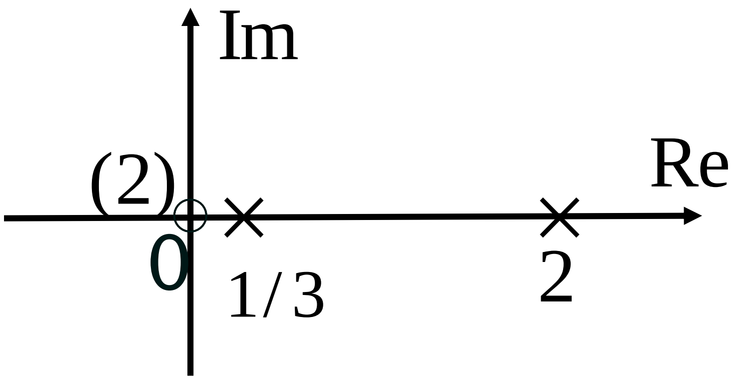
5. 用Z变换表征LTI系统，系统函数，LTI系统的Z变换分析法。

6. 单边Z变换，增量线性系统的分析。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$ 其中 $z=re^{j\omega}$ 是一个复数。



例3. $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$



极点： $z_1 = 1/3, z_2 = 2$

零点： $z = 0$ （二阶）

Z平面上极点总数与零点总数相同。

若其ROC为：

① $|z|>2$ 则 $x(n)$为右边序列，且是因果的，但其傅立叶变换不存在。

② $|z|<1/3$ 时 $x(n)$是左边序列，且是反因果的，其傅立叶变换不存在。

③ $1/3<|z|<2$ 时 $x(n)$ 是双边序列，但其傅立叶变换存在。

ROC是否包括$|z|=\infty$ 是 $x(n)$是否因果的标志。

ROC是否包括 $z=0$，是$x(n)$ 是否反因果的标志。

ROC包括单位圆，是 $x(n)$ 傅立叶变换存在的充分必要条件。

9.3 Z变换的性质: (Properties of the Z-Transform)

Z变换的许多性质与DTFT的性质相似，其推论方法也相同。主要讨论其ROC的变化，借以揭示信号在时域与在 Z 域的特性之间的关系。

1. 线性:

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_1$

$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_2$

则 $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$

ROC：包括 $R_1 \cap R_2$

如果在线性组合过程中出现零极点相抵消，则ROC可能会扩大。

2. 时移：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(n-n_0) \leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

$\mathrm{ROC}: R$ 但在 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 可能会有增删。

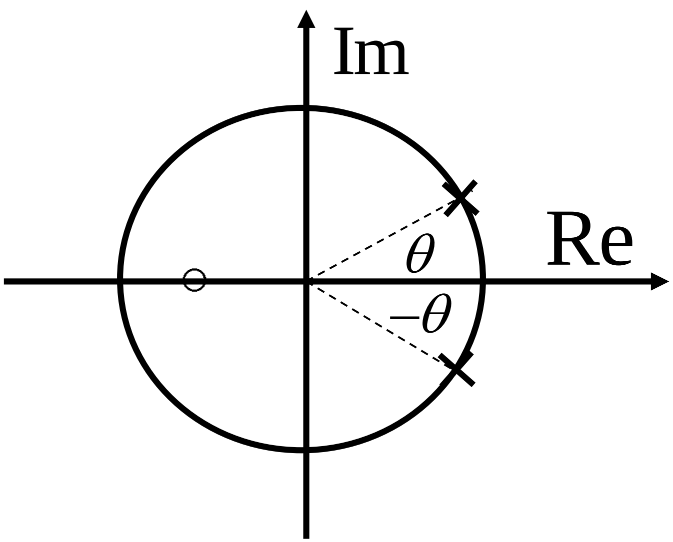
- 由于信号的时移有可能会改变其因果性，故ROC在 $z=0$，或 $|z|=\infty$ 有可能改变。

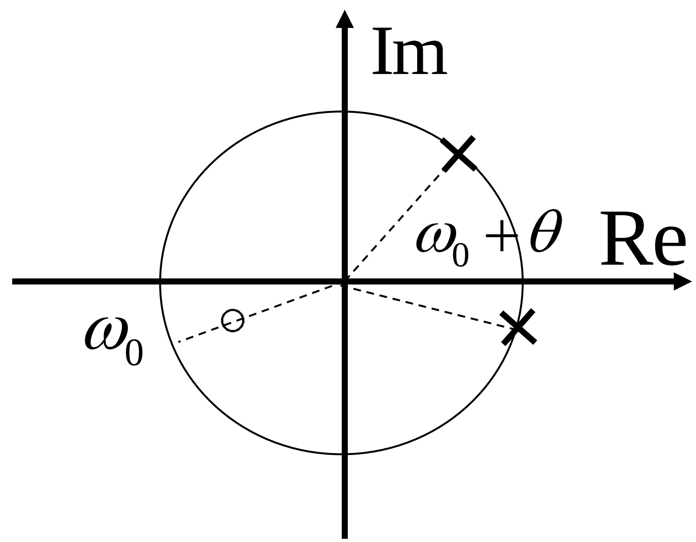
3. 频移：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(z \cdot e^{-j\omega_0}) \quad \mathrm{ROC}: R$

零极点位置将旋转一个角度 ω_0。





当 $\omega_0 = \pm\pi$ **时，有** $x(n)(-1)^n \leftrightarrow X(-z)$ **零极点旋转** 180°

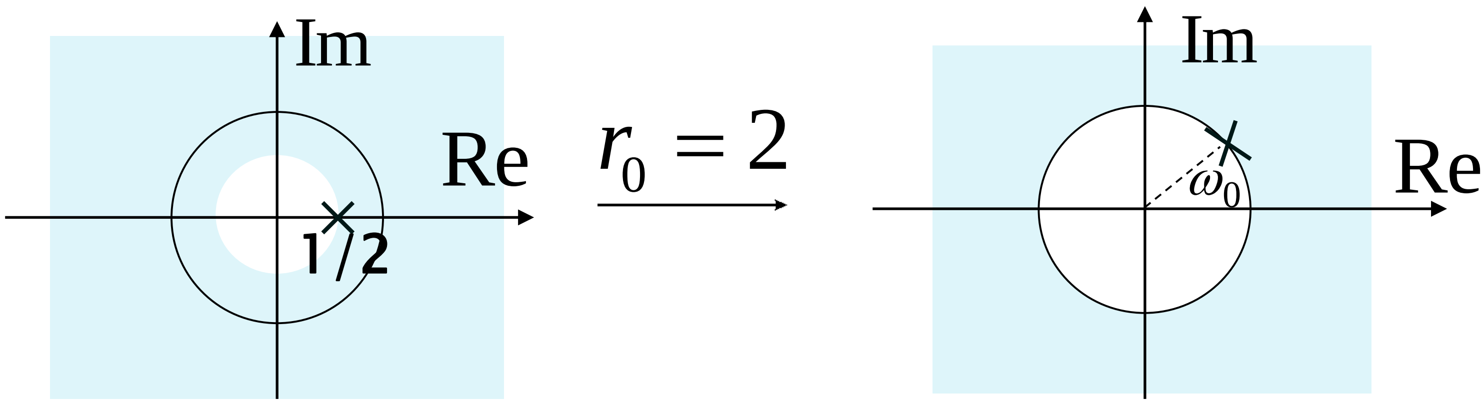
4. Z域尺度变换： 若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \mathrm{ROC}: R$

则 $z_0{}^n x(n) \leftrightarrow X(z/z_0) \quad \mathrm{ROC}: |z_0| R$

$\because |z| \in R$ 时 $X(z)$ 收敛，则 $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| \in R$ 时， $X(z/z_0)$ 收敛，

$\therefore |z| \in |z_0| R$ 　　当 $z_0 = e^{j\omega_0}$ 时，即为移频特性。

若 z_0 是一般复数 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$ 则 $X(z/z_0)$ 的零极点不仅要将 $X(z)$ 的零极点逆时针旋转一个角度 ω_0 ，而且在径向有 r_0 倍的尺度变化。因此，ROC也有一个 $|z_0|$ 的尺度变换。



5. 时域反转：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ $\quad$ $\mathrm{ROC}: R$

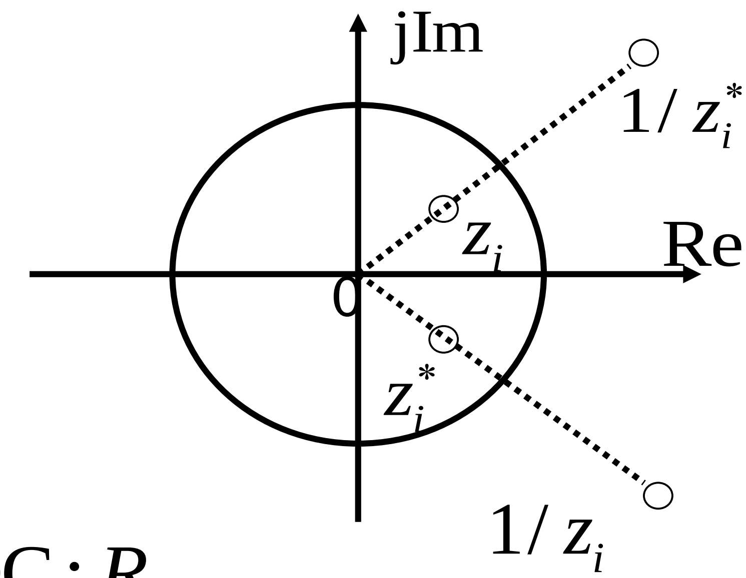
则 $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$ $\quad$ $\mathrm{ROC}: 1/R$ （收敛域边界倒置）

信号在时域反转，会引起 $X(z)$ 的零极点分布按倒量对称发生改变。如果 z_i 是 $X(z)$ 的零/极点，则 $1/z_i$ 就是 $X(z^{-1})$ 的零/极点。

即：$X(z)$与$X(z^{-1})$的**零极点呈共轭倒量对称。**

例：$X(z)$的ROC为 $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$

则$X(z^{-1})$的ROC为 $\frac{2}{3}<|z|<2$



6. 时域内插:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ROC: R

$$x_k(n)=\begin{cases} x(n/k) & n\text{ 为 }k\text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

（在序列的每两点之间插入k-1个零）

则 $x_k(n) \leftrightarrow X(z^k) \qquad \mathrm{ROC}: R^{1/k}$

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) z^{-rk} = X(z^k)$$

7. 共轭对称性：

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad \mathrm{ROC}: R$

当 $x(n)$是实信号时，$x^*(n) = x(n)$，于是有

$$X(z) = X^*(z^*)$$

表明：如果$X(z)$有**复数零极点，必共轭成对出现。**

8. 卷积性质：

$$x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad \text{ROC包括 } R_1\cap R_2$$

如果在相乘时出现零极点抵消的情况，则ROC可能会扩大。

$$x_1(n)*x_2(n)\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)X_2(z)z^{-m}=X_1(z)X_2(z)$$

卷积性质是LTI系统Z变换分析法的理论基础。

9. Z域微分： $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ROC : R

$$nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad \text{ROC} : R$$

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数$X(z)$的反变换或具有高阶极点的 $X(z)$ 的反变换。

例1. $X(z) = \ln(1+az^{-1}) \qquad |z| > |a|$

$$\because \frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \leftrightarrow a(-a)^{n-1}u(n-1) = nx(n)$$

$$\therefore x(n) = \frac{a}{n}(-a)^{n-1}u(n-1) = -\frac{1}{n}(-a)^{n}u(n-1)$$

例2： $$X(z)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$ $$|z|>|a|$$

$$\because a^n u(n)\leftrightarrow \hat{X}(Z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$ $$|z|>|a|$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=-\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$-z\frac{d\hat{X}(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\therefore x(n)=na^n u(n)$$

10. 初值定理：

若$x(n)$ 是因果信号，$x(n) \leftrightarrow X(z)$，且 $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$ 存在，则： $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$

证明： $X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$

当 $z\to\infty$ 时有： $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)=x(0)$

初值定理表明： 因果序列的 $X(z)$ 在 $z\to\infty$ 时为有限值。因此，**当 $X(z)$ 是有理函数，且表示成关于z的多项式之比时，其分子多项式的阶数不能高于分母多项式的阶数。否则，$x(n)$ 将是非因果的。**

推论：

$$z\left[X(z)-x(0)\right]=x(1)+x(2)z^{-1}+x(3)z^{-2}+\cdots$$

$$\therefore \qquad x(1)=\lim_{z\to\infty} z\left[X(z)-x(0)\right]$$

$$\vdots$$

$$x(n)=\lim_{z\to\infty} z^{n}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x(k)z^{-k}\right]$$

这样即可递推出 $x(n)$ **的任何一点的值。**

11. 终值定理：

若$x(n)$ 是因果信号,$x(n) \leftrightarrow X(z)$, $X(z)$ 除了在z=1允许有一阶极点外，其余极点均在单位圆内，则有：

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$$

证明：

$\because x(n)=0,\ n<0,\ \ X(z)$ 除了在 $z=1$可以有单阶极点外，其它极点均在单位圆内，

$\therefore (z-1)X(z)$在单位圆上无极点。

$$\lim_{z \to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z \to 1} \sum_{n=-1}^{\infty} [x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-1}^{m}\left[x(n+1)-x(n)\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+\cdots+x(m+1)-x(m)]$$

$$=\lim_{m\to\infty}x(m+1)=\lim_{n\to\infty}x(n)$$

这表明：如果$x(n)$有终值存在，则其终值等于$X(z)$在 $z=1$处的留数。

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\mathrm{Res}[X(z),1]$$

终值定理对$X(z)$ 的极点位置的要求，其实就是为了保证信号确实具有终值。

9.4 常用信号的z变换：
(Some Common Z-Transform Pairs)

目的在于利用z变换的性质从简单信号的z变换导出常用信号的z变换对。

1. $x(n)=\delta(n-m)$

$\because \delta(n) \leftrightarrow 1$ **ROC：整个z平面**

$\therefore \delta(n-m) \leftrightarrow z^{-m}$ **ROC：整个有限z平面**

- **当** $m>0$ **时，包括** $|z|=\infty$ **，不包括Z=0。**
- 当$m<0$时，包括 **z=0**，不包括$|z|=\infty$ 。

2. $x(n) = -u(-n-1)$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$u(n-1) \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{1-z} = -\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| < 1$$

$$\therefore x(n) = -u(-n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| < 1$$

3. $x(n)=a^n u(n)$

$$u(n)\leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$a^n x(n)\leftrightarrow X(z/a)$$

$$a^n x(n)\leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

4. $x(n)=na^n u(n)$ **由z域微分性质，有:**

$$na^n u(n)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z|>|a|$$

5. $x(n)=\cos\omega_0 n\cdot u(n)$

$$\because x(n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})u(n)$$

$$u(n)\leftrightarrow U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$ **根据频移特性，**

$$\therefore X(z)=\frac{1}{2}\left[U(ze^{-j\omega_0})+U(ze^{j\omega_0})\right]$$

$$=\frac{1/2}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1/2}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}\qquad |z|>1$$

6. $x(n)=r^{n}\cos\omega_0 n\cdot u(n)$

由Z域尺度变换特性，只需将上例中 $z\Rightarrow z/r$ **即可**

$$\therefore X(z)=\frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^{2}z^{-2}} \qquad |z|>r$$

例 1：求 $x(n)=|n-1|u(-n)$ 的Z变换与收敛域；

解：
$$x(n)=|n-1|u(-n)=(-n+1)u(-n)$$

$$x_1(n)=u(-n)\leftrightarrow U(z^{-1})=\frac{1}{1-z} \quad |z|<1$$

$$nx_1(n)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X_1(z)=\frac{-z}{(1-z)^2} \quad |z|<1$$

所以

$$-nx_1(n)+x_1(n)\leftrightarrow -\frac{-z}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1-z)}=\frac{1}{(1-z)^2} \quad |z|<1$$

9.5 z反变换：(The Inverse z-Transform)

一. z反变换：

$x(n)$ 的z变换就是对 $x(n)r^{-n}$ 做DTFT，由DTFT的反变换有:

$$x(n)r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})r^{n}e^{j\omega n}d\omega$$

令 $z = re^{j\omega}$ $\qquad dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$

当ω从$0 \rightarrow 2\pi$ 时，Z 沿着ROC内半径为 r 的圆周变化一周。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(z)z^{n-1}dz$$

其中 C 是 ROC 中逆时针方向的圆周。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(z)z^{n-1}dz$$

z反变换表明：信号可以在z域分解为复指数信号的线性组合，这些复指数分量分布在一个圆周上，每个复指数分量的幅度为 $\frac{1}{2\pi j}\frac{X(z)}{z}dz$ 。

二. 反变换的求取：

1. 部分分式展开法： 当$X(z)$是有理函数时，可表示为

$$X(z)=A_0+\sum_i \frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}$$

假定分子与分母同阶

步骤：

1. 求出 $X(z)$ 的所有极点 a_i；
2. 将$X(z)$ 展开为部分分式；
3. 根据总的ROC，确定每一项的ROC；
4. 利用常用变换对和Z变换的性质，求出每一项的反变换。

例1： $X(z)=\dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$ $\quad \dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

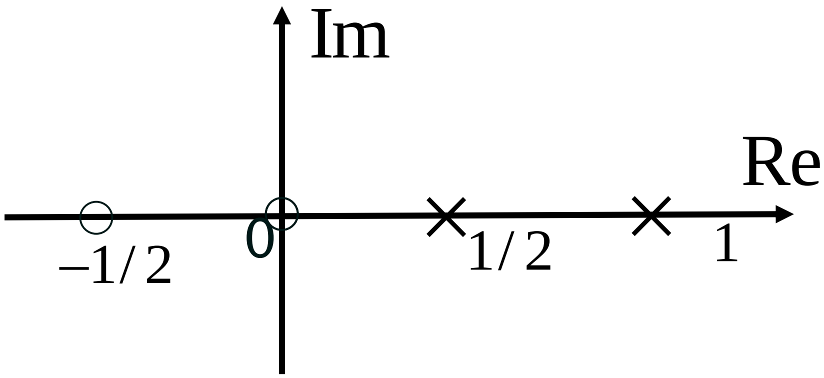
第一项的ROC： $|z|>1/4$

第二项的ROC： $|z|<1/3$

$$\therefore x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)-2(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$$

例2:

$$X(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$



$|z|>1\ldots\qquad x(n)=[3-2(\frac{1}{2})^n]u(n)$

$|z|<\frac{1}{2}\qquad x(n)=2(\frac{1}{2})^n u(-n-1)-3u(-n-1)$

$\frac{1}{2}<|z|<1\qquad x(n)=-3u(-n-1)-2(\frac{1}{2})^n u(n)$

2. 幂级数展开法:（长除法）

由 $X(z)$的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z)=\cdots+x(-n)z^{n}+\cdots+x(-1)z+$$

$$x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$$

展开式中z^{-n} 项的系数即为$x(n)$ 。当$X(z)$ 是有理函数时，可以通过长除的方法将其展开为幂级数。

- 由于右边序列的展开式中应包含无数多个Z的负幂项，所以要按降幂长除。
- 由于左边序列的展开式中应包含无数多个Z的正幂项，所以要按升幂长除。
- 双边序列则先要将其分成两部分，分别对应信号的右边和左边部分，再分别按上述原则长除。

例. $$X(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

第一项的ROC：$|z|<1/2$

第二项的ROC：$|z|>1/3$

对前一项按升幂长除，后一项按降幂长除。

$$
\begin{array}{r l}
 & -12z-24z^{2}-48z^{3}-\cdots \\
-\frac{1}{2}z^{-1}+1 \,\big) & 6 \\
 & \underline{6-12z} \\
 & \ldots..12z \\
 & \underline{\ldots..12z-24z^{2}} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots.24z^{2} \\
 & \underline{\ldots\ldots\ldots\ldots.24z^{2}-48z^{3}} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.48z^{3}
\end{array}
$$

$$\boxed{-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)}$$

$$5+\frac{5}{3}z^{-1}+\frac{5}{9}z^{-2}+\cdots$$

$$1-\frac{1}{3}z^{-1}\overline{\Big)\ 5}$$

$$5-\frac{5}{3}z^{-1}$$

$$\cdots\cdots\frac{5}{3}z^{-1}$$

$$\cdots\cdots\frac{5}{3}z^{-1}-\frac{5}{9}z^{-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{5}{9}z^{-2}$$

$$\boxed{5(\frac{1}{3})^{n}u(n)}$$

$$\boxed{x(n)=-6(\frac{1}{2})^{n}u(-n-1)-5(\frac{1}{3})^{n}u(n)}$$

幂级数展开法适用于求解非有理函数形式 $X(z)$ 的反变换。此时，只要能将 $X(z)$ 展开成幂级数，即可得到相应的反变换。

练习：

$$X(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$|z|<\frac{1}{3}$$

9.6 离散时间LTI系统的z域分析:（The Discrete-Time LTI System Analysis in the z-Domain)

一、 LTI系统的z域分析

由z变换的卷积性质有

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

ROC包括: $R_1\cap R_2$

对 $Y(z)$ 做反变换即可得到输出响应 $y(n)$。

$H(z)$ **称为系统的系统函数。**

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$ 或 $$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

例. $x(n)=(-\frac{1}{2})^n u(n)$ $h(n)=\left[1+(-2)^n\right]u(n)$

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$ $|z|>\frac{1}{2}$

$$H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1+2z^{-1}}=\frac{2+z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}$$ $|z|>2$

由 $Y(z)=X(z)H(z)$ 可得:

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{2}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})} \qquad \boxed{|z|>2}$$

$$=\frac{2/3}{1-z^{-1}}+\frac{4/3}{1+2z^{-1}}$$

$$\therefore\ y(n)=[\frac{2}{3}+\frac{4}{3}(-2)^{n}]u(n)$$

二. 系统函数:

系统函数连同收敛域可以表征**LTI**系统，借助于系统函数的**ROC**可以确定系统的因果性，稳定性。

当系统函数是有理函数时，

1. 如果系统是因果的，则 $h(n)=0, n<0$；可知 $H(z)$

的ROC一定是最外部极点的外部，且包括$|z| = \infty$。

2. 如果系统稳定，则$h(n)$绝对可和，也即$H(e^{j\omega})$存在，$H(z)$的ROC一定包括单位圆。

3. 因果稳定系统的$H(z)$的全部极点必须在单位圆内。

三. 系统函数的求得：

1. 由LCCDE描述的系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$ 对方程做z变换有

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

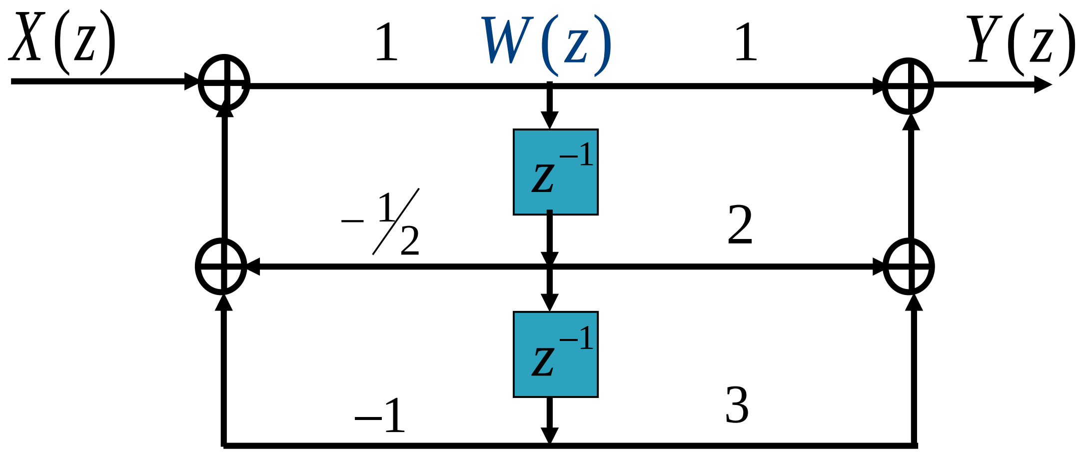
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$ 由LCCDE可以方便地求出$H(z)$。

但由方程并不能确定ROC，需要依据系统的因果性，稳定性决定。当方程具有一组全部为零的初始条件时，系统是线性、因果、时不变的。

2. 由方框图描述的系统：

当系统由方框图描述时，可根据方框图列出相应的方程，进而求得$H(z)$。

例.



$$W(z)=X(z)-\frac{1}{2}z^{-1}W(z)-z^{-2}W(z)$$

$$Y(z)=W(z)+2z^{-1}W(z)+3z^{-2}W(z)$$

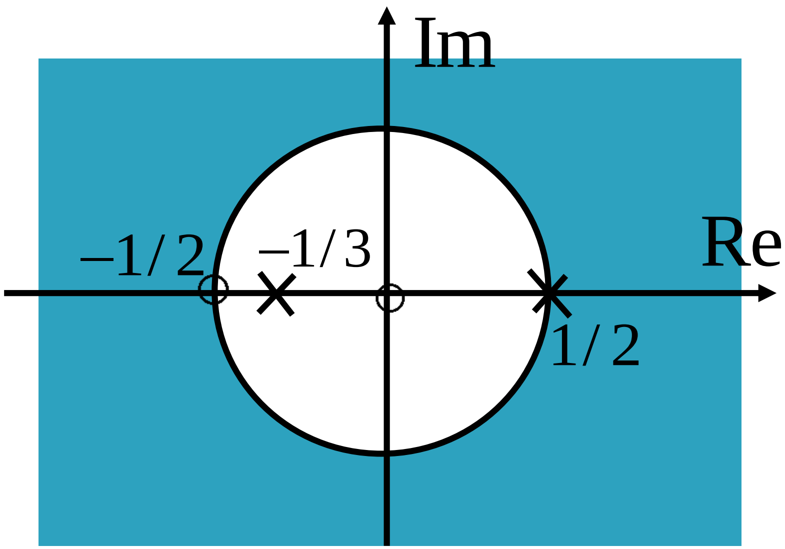
$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$y(n)+\tfrac{1}{2}y(n-1)+y(n-2)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$$

3. 由零极点图描述的系统：

根据零极点图及ROC可写出一个有理函数的 $H(z)$，**最多和实际的** $H(z)$ **相差一个常数** H_0。

例. 已知系统的零极点图。



由零极点图可以写出：

$$H(z)=H_0\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$|z|>\frac{1}{2}$$

注意原点处的零点。

9.8 单边z变换:（The Unilateral z-Transform)

一. 定义:

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \text{——} x(n)\text{的单边z变换}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \chi(z)z^{n-1}dz$$

显然，当$x(n)$ 是因果信号时，单边z变换与双边z变换相同。因此，单边z变换就是对因果信号所做的双边z变换。

如果信号是非因果的，则$\chi(z)$与$X(z)$ 不同。

例1: $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\chi(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

显然 $\chi(z)=X(z)$

例2. $x(n)=a^{n+1}u(n+1)$ **则** $X(z)=\dfrac{z}{1-az^{-1}}$

ROC: $|z|>|a|$ **但不包括** $|z|=\infty$

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}z^{-n}=\frac{a}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

显然$\chi(z) \neq X(z)$。这是因为$x(n)$在$n<0$的部分对双边Z变换起作用，而对单边Z变换不起作用所致。

由于单边z变换的定义式中只包括z的负幂项，不含有z的正幂项，因而单边z变换的ROC与因果信号双边z变换的ROC特性相同。即一定是$\chi(z)$最外部极点的外部并且包括$|z|=\infty$，不可能有其它情况。故对单边z变换不再强调ROC。

正由于$x(n)$的单边z变换就是$x(n)u(n)$的双边z变换，当信号的因果性不改变时，双边z变换的性质就是单边z变换的性质。

只有移位特性例外，因为时域的移位可能会改变信号的因果属性。

二. 单边Z变换的移位性质：

若 $x(n) \leftrightarrow \chi(z)$

则 $x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}\chi(z) + x(-1)$

证明: $$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)z^{-(m+1)}$$

$$= x(-1) + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z^{-1}\chi(z) + x(-1)$$

同理可得:

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}\chi(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

$$x(n+1) \leftrightarrow z\chi(z) - zx(0) \quad -----$$

证明：$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)} - x(0)z = z\chi(z) - zx(0)$$

同理可得：

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2\chi(z) - z^2x(0) - zx(1) \quad ----$$

单边Z变换在将LCCDE变换为代数方程时，可以自动将方程的初始条件引入，因而在解决增量线性系统问题时特别有用。

利用单边Z变换分析增量线性系统：

利用单边z变换可以方便地分析增量线性系统

例1： $y(n)+3y(n-1)=x(n),$

$x(n)=u(n), \qquad y(-1)=1$

对方程做单边z变换，并引入初始条件可得：

$$\Upsilon(z)+3[z^{-1}\Upsilon(z)+y(-1)]=\chi(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$\Upsilon(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}[\chi(z)-3]$$

$$=\underbrace{\frac{\chi(z)}{1+3z^{-1}}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}=H(z)\chi(z)+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\frac{1/4}{1-z^{-1}}-\frac{9/4}{1+3z^{-1}}$$

$$\therefore y(n)=[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}(-3)^{n}]u(n)=\frac{1}{4}[1-9(-3)^{n}]u(n)$$

$$=\frac{1}{4}[1-(-3)^{n+2}]u(n)$$

强迫响应　　自然响应

例2：$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$

$$x(n)=u(n) \qquad y(-1)=1 \qquad y(-2)=\frac{1}{2}$$

对方程两边做单边z变换，并引入初始条件：

$$\Upsilon(z)-3[z^{-1}\Upsilon(z)+y(-1)]+2[z^{-2}\Upsilon(z)+z^{-1}y(-1)$$
$$+y(-2)]=\chi(z)$$

$$\chi(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Upsilon(z)=\frac{\chi(z)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{-3y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

零状态响应　　　　零输入响应

代入初始条件得：

$$\Upsilon(z)=\frac{2-2z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}+\frac{1}{(1-z^{-1})(1-3z^{-1}+2z^{-2})}$$

$$=\frac{2}{1-2z^{-1}}+\frac{-3}{1-z^{-1}}+\frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}+\frac{4}{1-2z^{-1}}$$

$$y(n)=2(2)^{n}u(n)+[-3-n+4(2)^{n}]u(n)$$

这里用到了以下关系：

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$nu(n)\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)=-z\frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^{2}}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

例3: $$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{1}{2}y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

$$x(n)=(-1)^n u(n), \qquad y(-1)=1, y(-2)=1$$

对方程两边做单边z变换有:

$$\Upsilon(z)-\frac{1}{2}\left[z^{-1}\Upsilon(z)+y(-1)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[z^{-2}\Upsilon(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]$$

$$=\chi(z)+z^{-1}\chi(z)+x(-1)$$

$$\Upsilon(z)=\frac{(1+z^{-1})\chi(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}+$$

$$\chi(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}y(-1)(1+z^{-1})+\frac{1}{2}y(-2)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}=\frac{5/3}{1-z^{-1}}+\frac{1/3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y(n)=\left[\frac{5}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n}\right]u(n)$$

本章小结: (Summary)

1. 离散时间信号的双边z变换表示，及其与DTFT的关系，与拉氏变换的关系，与DFT的关系。

2. 双边z变换的收敛域及其特征，收敛域和信号种类的关系。

3. 双边z变换的性质。

4. 离散时间LTI系统的z变换分析。系统特性与系统函数收敛域的关系。

5. 单边z变换及其性质。

6. 利用单边z变换分析增量线性系统。