信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn
http://gr.xjtu.edu.cn/web/wanghg “教学”栏目

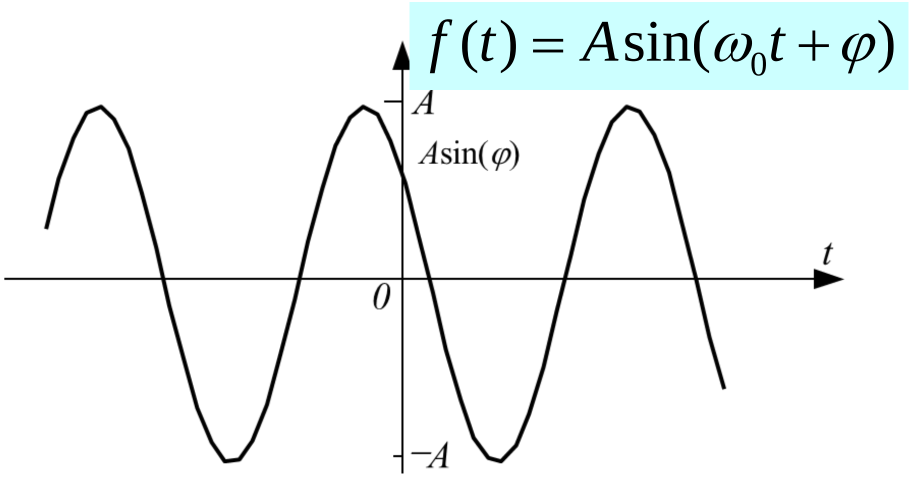
1.0 引言：(introduction)

本章旨在讨论信号与系统的基本概念，建立其相应的数学描述方法，以便利用这种数学描述及其表示，建立一种信号与系统的分析体系。

1.1 信号的描述与分类：

一. 信号的描述：

信号可以描述范围极广泛的物理现象。



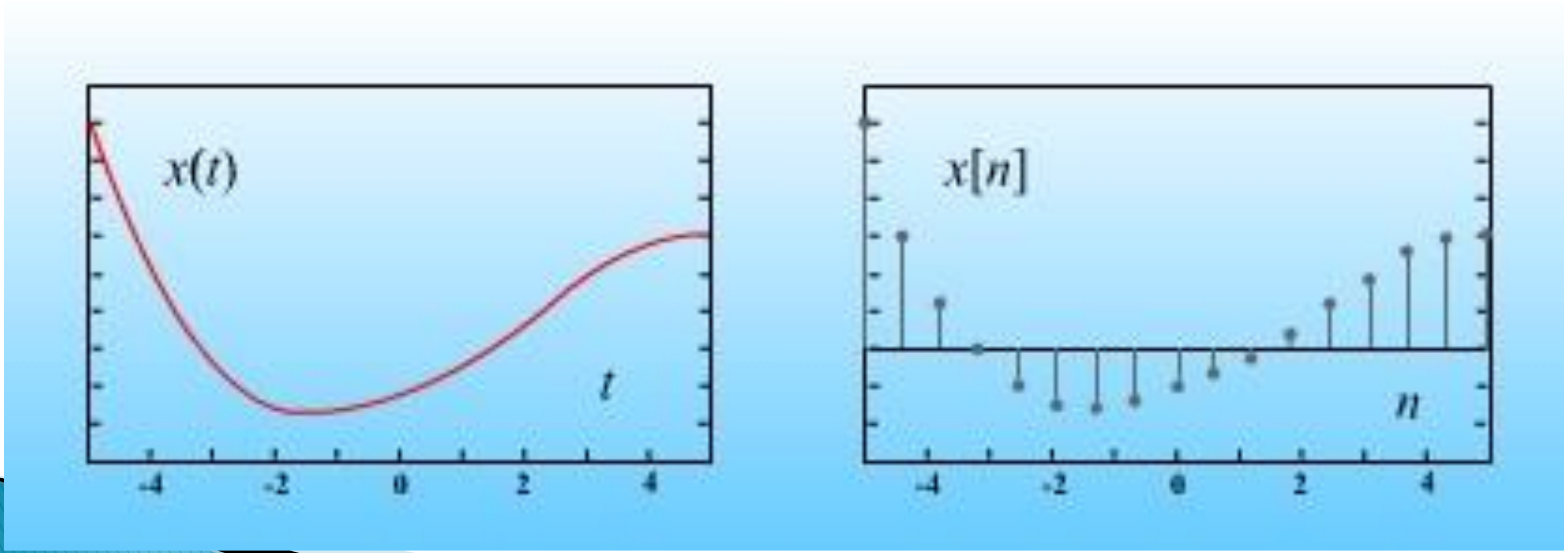
表示方法（函数）：

数学解析式

图形

- 信号可以分为确知信号与随机信号，也可以分为连续时间信号与离散时间信号。
- 作为信号分析的基础，本课程只研究确知信号。
- 确知信号可以表示成一个或几个自变量的函数。

连续时间信号的例子： 离散时间信号的例子：



- 连续时间信号表示为 $x(t), x(t_{1,} t_2)\ldots$
- 离散时间信号表示为 $x(n), x(n_1, n_2)\ldots$
- 连续时间信号的自变量在实数域内取值，自变量连续变化，信号值可以有间断点。
- 离散时间信号的自变量在整数域内取值，自变量只能取整数，信号值可以在实数域内连续变化。
- 如果将信号值加以量化，则称之为数字信号。
- 离散时间信号也可以从连续时间信号通过提取其样本而得到。如：$x(t) \longrightarrow x(nT)$

二. 周期信号与非周期信号：

周期信号的定义： $$x(t+kT)=x(t)$$

$$x(n+kN)=x(n)$$

满足此关系的正实数（正整数）中最小的一个，称为信号的基波周期 T_0（N_0）。

$x(t)=c$ 可视为周期信号，但它的基波周期没有确定的定义。

$x(n)=c$ 可以视为周期信号，其基波周期 $N_0=1$ 。

三. 奇信号与偶信号：

对实信号而言：

如果有 $$x(-t)=x(t)$$ $$x(-n)=x(n)$$ 则称该信号是偶信号。（镜像偶对称）

如果有 $$x(-t)=-x(t)$$ $$x(-n)=-x(n)$$ 则称该信号为奇信号（镜像奇对称）

任何实信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和。

对实信号有：

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$

其中：

$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

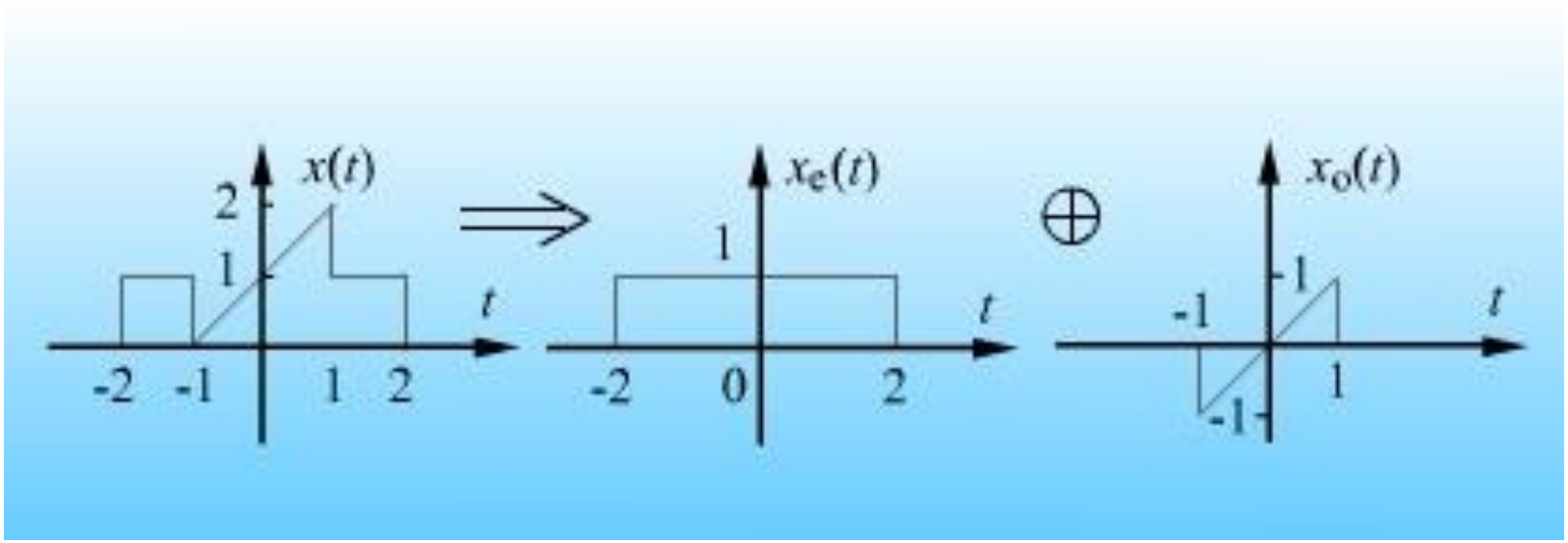
$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

其中：

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$

例：



四. 能量信号与偶信号：

- 能量信号： $0 < W < \infty$，$P = 0$。
- 功率信号： $W \to \infty$，$0 < P < \infty$。

归一化能量W与归一化功率P的计算

连续信号

$$W = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

离散信号

$$W = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |f[k]|^2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |f[k]|^2$$

直流信号与周期信号都是功率信号。

注意: 一个信号可以既不是能量信号也不是功率信号，
但不可能既是能量信号又是功率信号。

【例】：判断下列信号是能量信号还是功率信号：

（1） $f_1(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$

（2） $f_2(t) = e^{-t}$

（3） $f[k] = (4/5)^k \qquad k > 0$

- 解：

$f_1(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$ 功率信号

$f_2(t) = e^{-t}$ 非能量，非功率

$f[k] = (4/5)^k$ 能量信号

1.2 信号的运算

连续时间信号的基本运算

- 信号的尺度变换
- 信号的翻转
- 信号的平移
- 信号相加
- 信号相乘
- 信号的微分
- 信号的积分

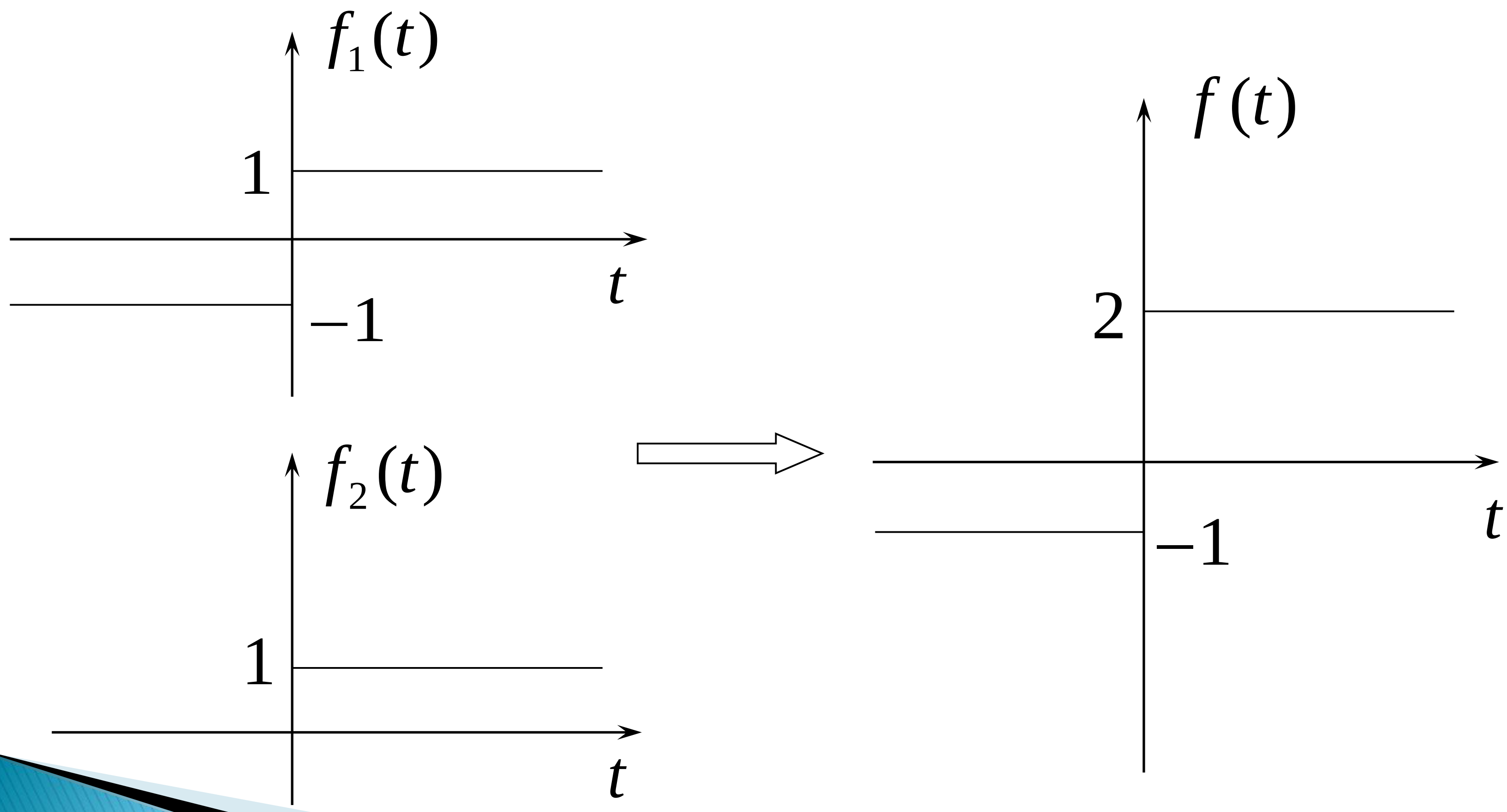
1.2 信号的运算

离散时间信号的基本运算

- 信号的尺度变换(内插与抽取)
- 信号的翻转
- 信号的平移
- 信号相加
- 信号相乘
- 信号的差分
- 信号的求和

连续信号的基本运算

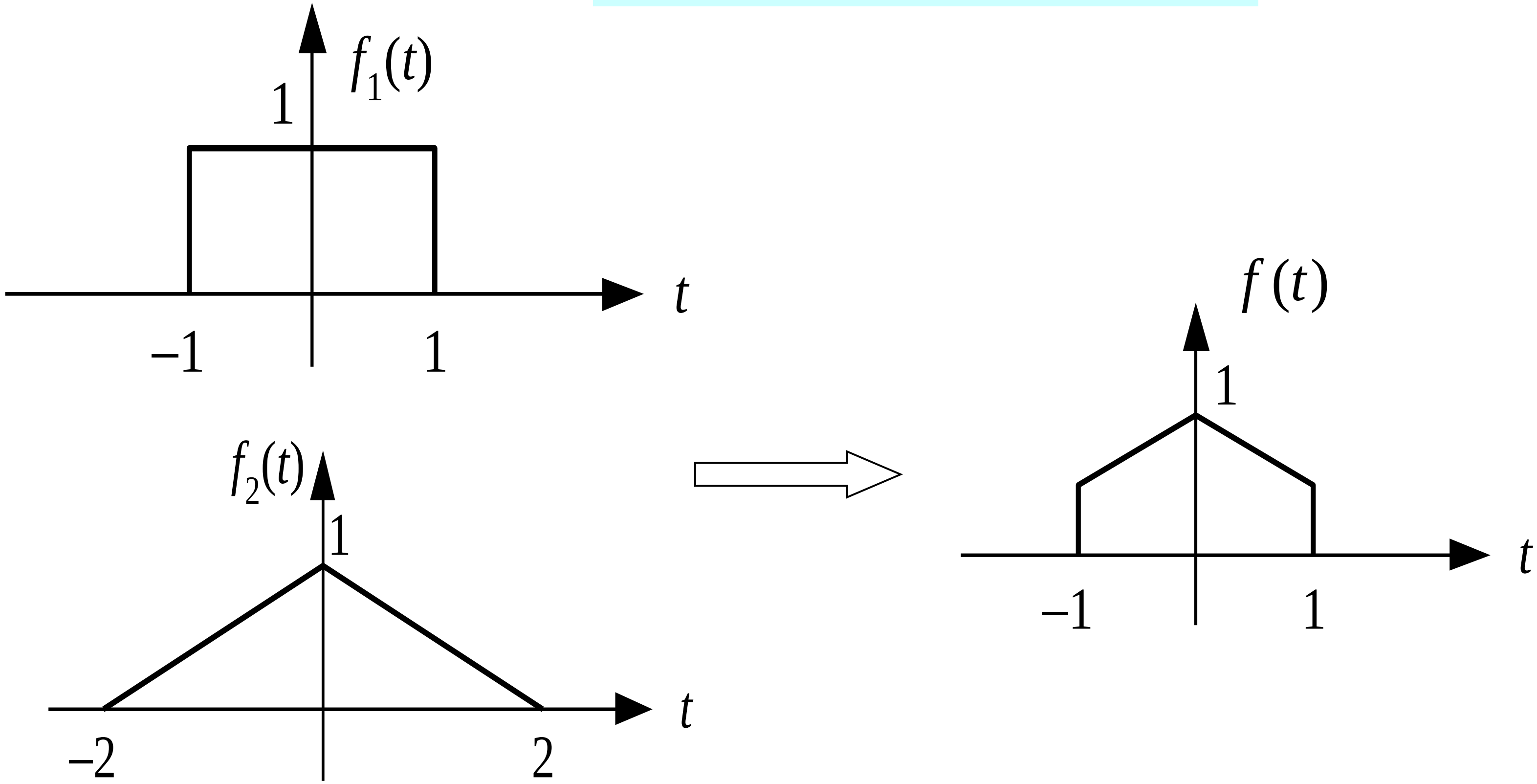
- 信号的相加 $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots\ldots + f_n(t)$



连续信号的基本运算

- 信号的**相乘**

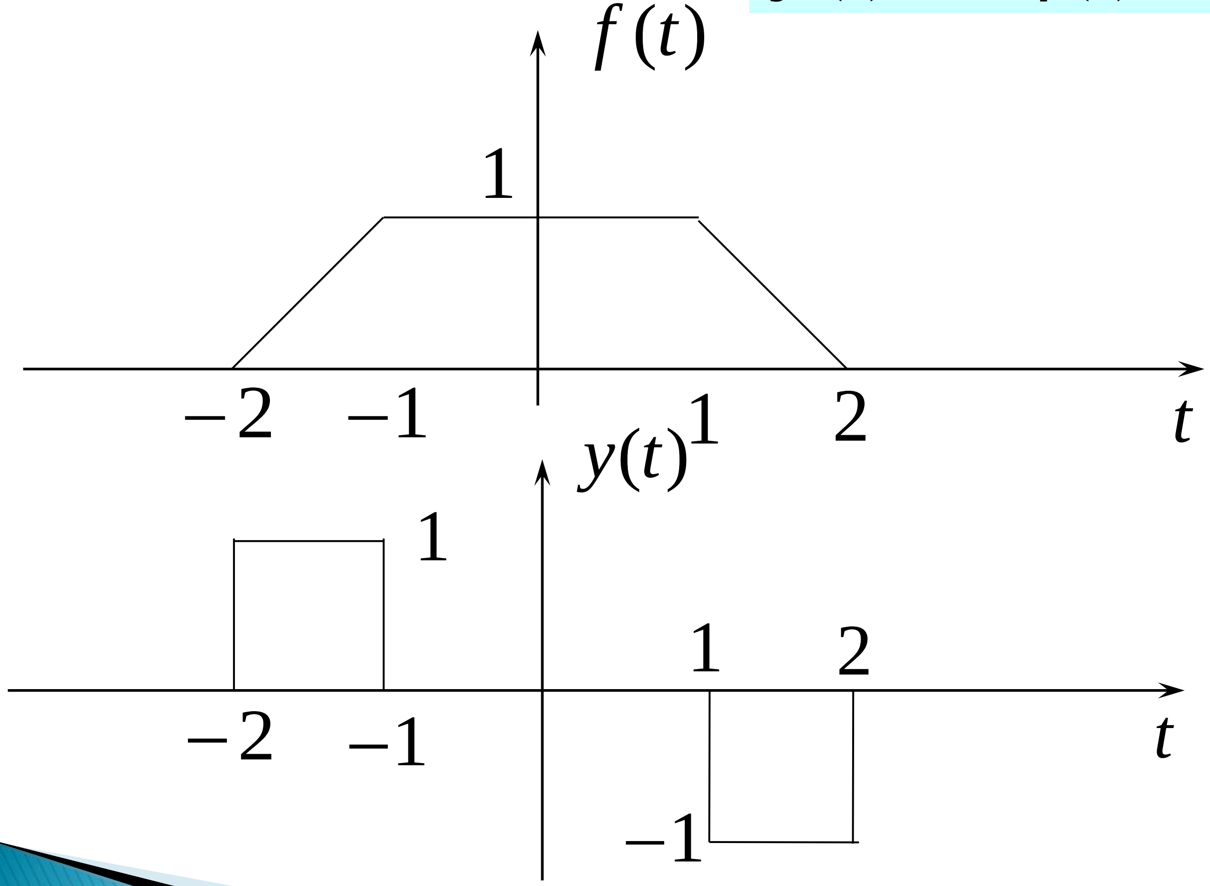
$$f(t) = f_1(t) \bullet f_2(t)$$



连续信号的基本运算

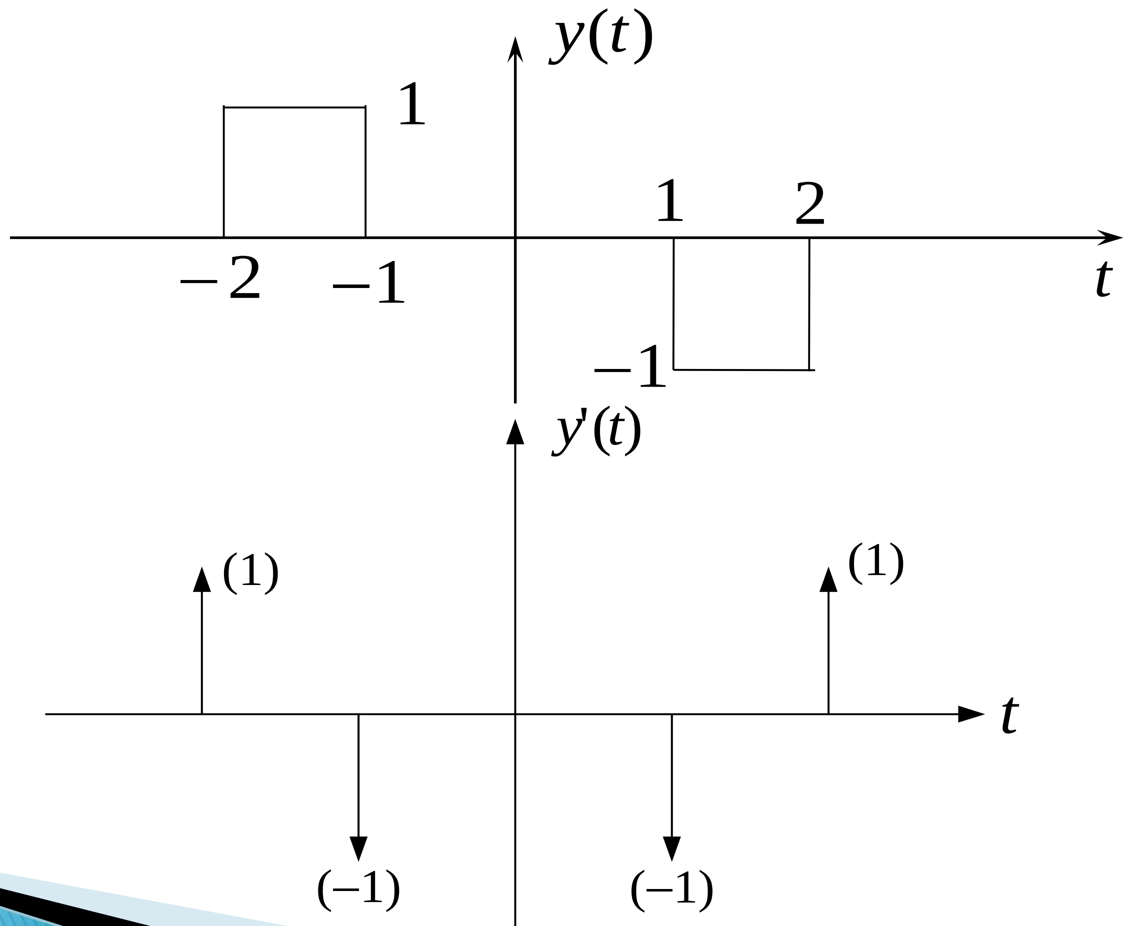
- 信号的**微分**

$y(t) = \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t = f\,'(t)$



连续信号的基本运算

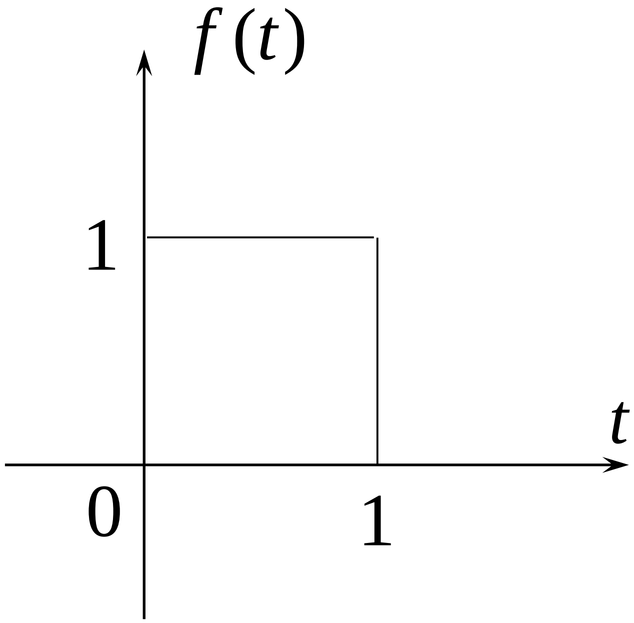
- 注意：对不连续点的微分

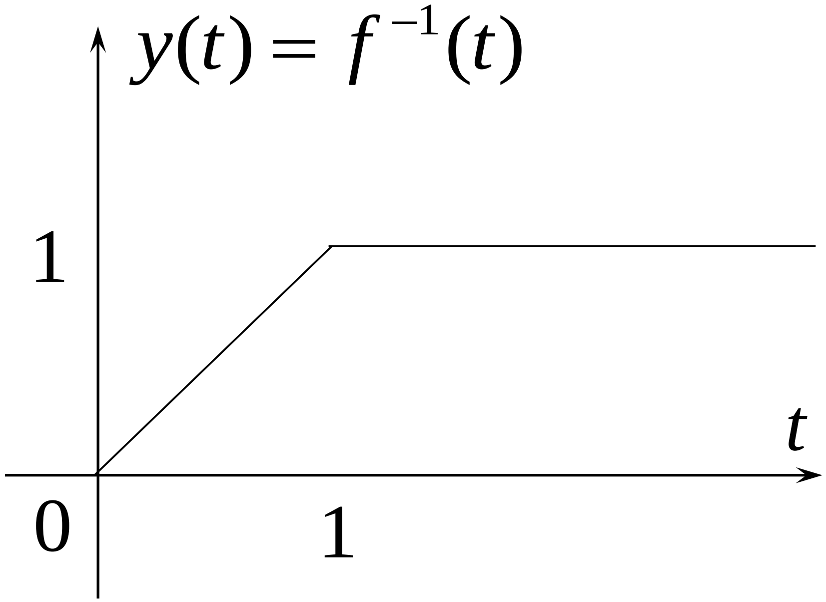


连续信号的基本运算

- 信号的**积分**

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau = f^{-1}(t)$$

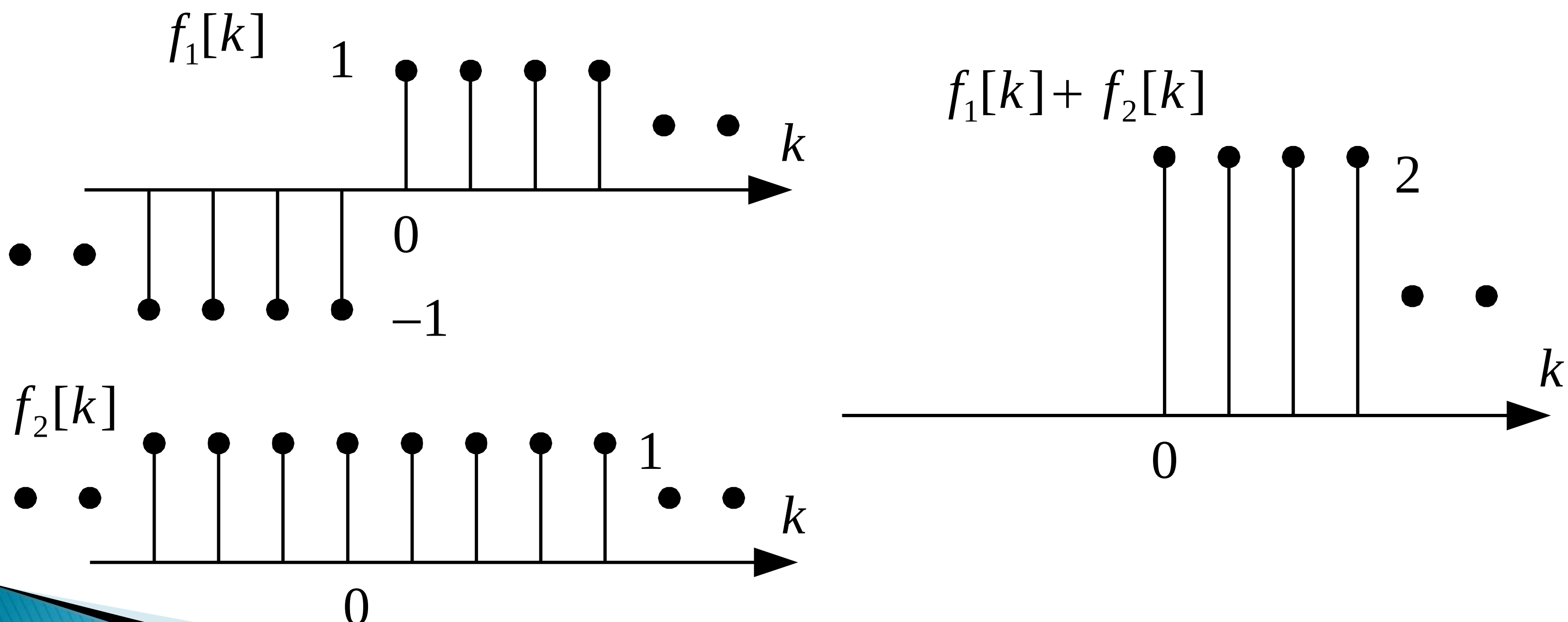




离散时间序列相加

指将若干离散序列序号相同的数值相加

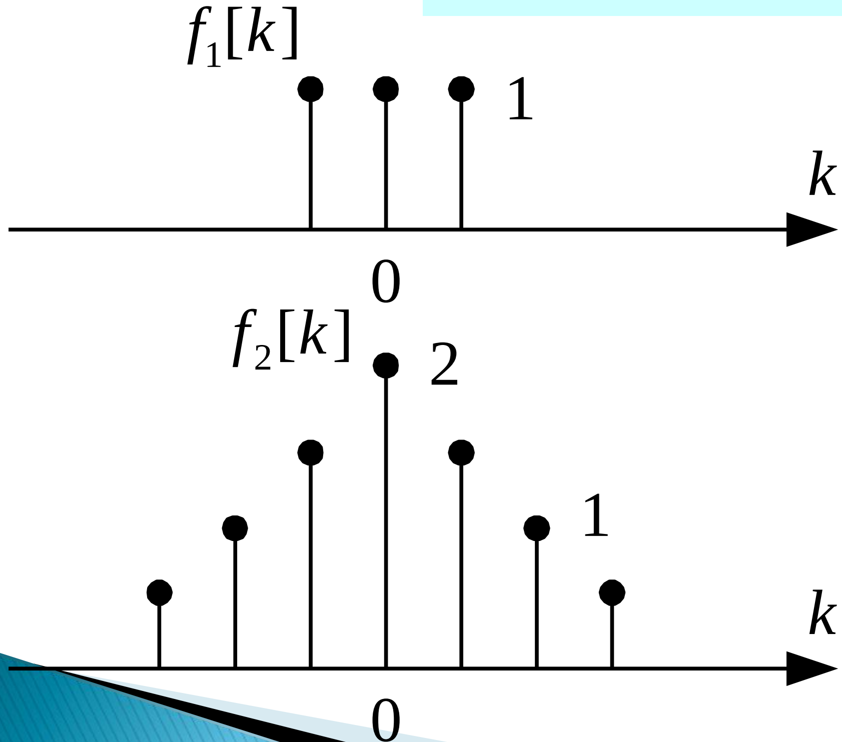
$$y[k] = f_1[k] + f_2[k] + \ldots + f_n[k]$$

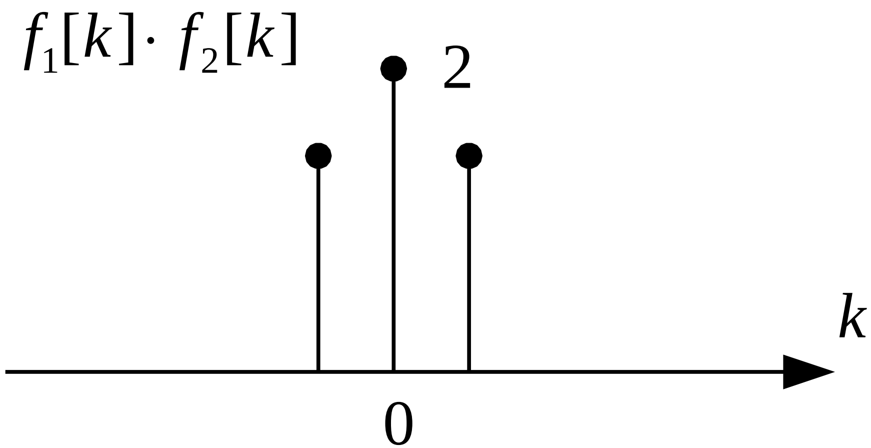


离散时间序列相乘

指若干离散序列序号相同的数值相乘

$$y[k] = f_1[k] \cdot f_2[k] \cdot \ldots \cdot f_n[k]$$



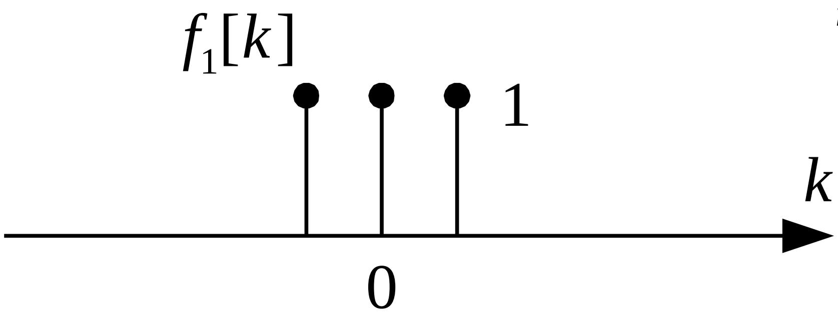


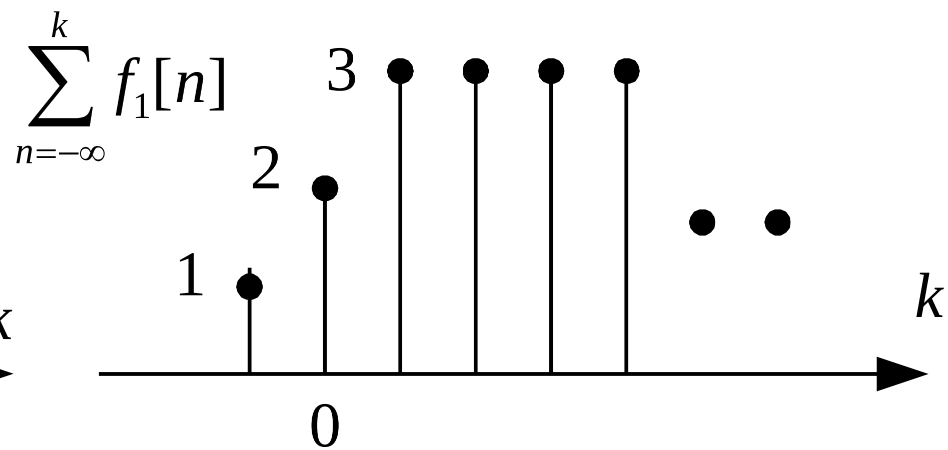
离散时间序列差分

- ✓ 一阶后向差分 $\nabla f[k]=f[k]-f[k-1]$
- ✓ 二阶后向差分 $\nabla^2 f[k]=\nabla\{\nabla f[k]\}=f[k]-2f[k-1]+f[k-2]$
- ✓ N阶后向差分 $\nabla^n f[k]=\nabla\{\nabla^{n-1} f[k]\}$
- ✓ 一阶前向差分 $\Delta f[k]=f[k+1]-f[k]$
- ✓ 二阶前向差分 $\Delta^2 f[k]=\Delta\{\Delta f[k]\}=f[k+2]-2f[k+1]+f[k]$
- ✓ N阶前向差分 $\Delta^n f[k]=\Delta\{\Delta^{n-1} f[k]\}$

离散时间序列求和

$$y[k]=\sum_{n=-\infty}^{k} f[n]$$





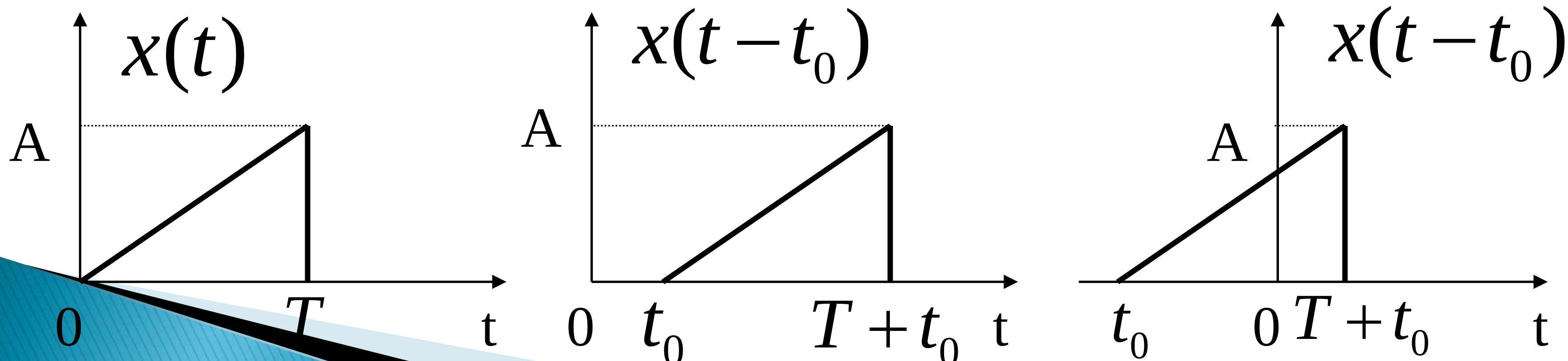
1.2.2 信号的自变量变换：

由于信号可以表示为自变量的函数，当自变量变化时，必然会使信号的特性发生相应的改变。

时移变换： Shift of Signals

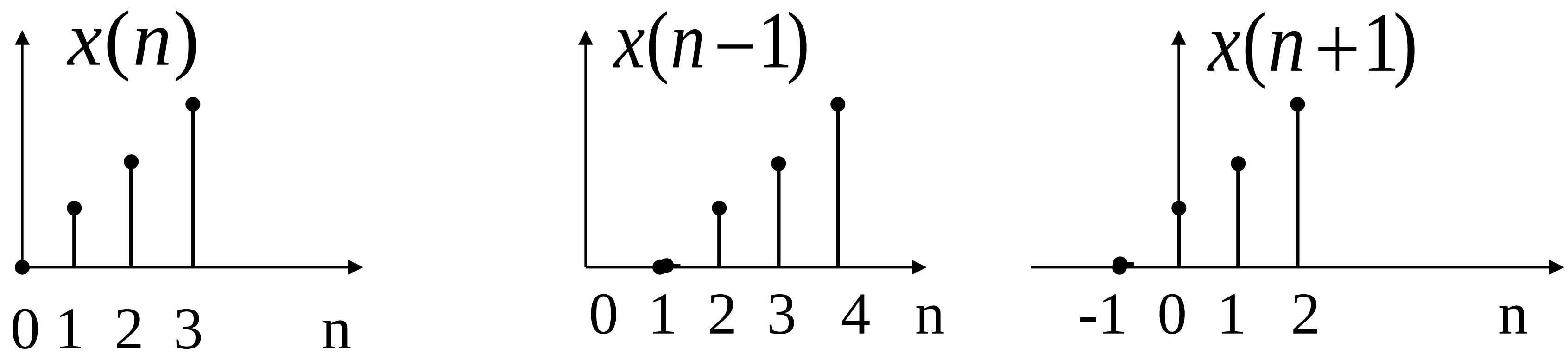
- $x(t) \longrightarrow x(t-t_0)$ 当 $t_0>0$ 时，信号向右平移 t_0

  $t_0<0$ 时，信号向左平移 $|t_0|$



$$x(n) \longrightarrow x\left(n-n_0\right)$$ 当 $n_0 > 0$ 时，信号向右平移 n_0

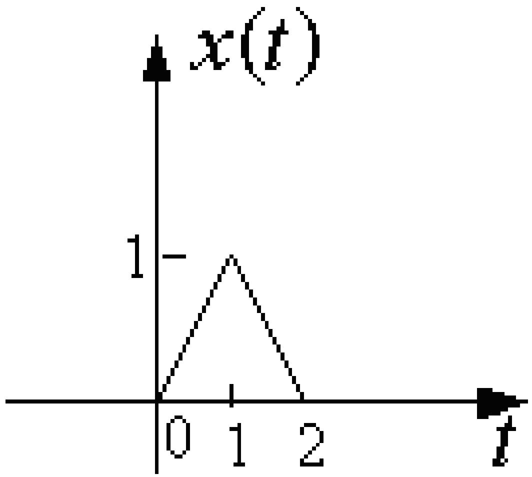
$n_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|n_0|$

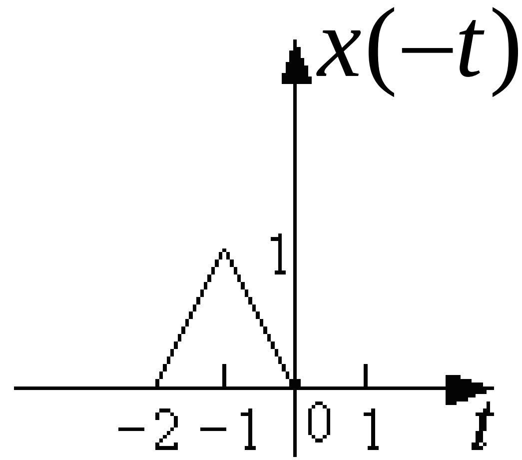


反转变换：Reflection of Signals

$x(t) \longrightarrow x(-t)$ 信号以 $t=0$ 为轴做镜像对称。

$x(n) \longrightarrow x(-n)$ 与连续时间的情况相同。





尺度变换： Scaling

$$x(t) \longrightarrow x(at)$$

$a>1$时 $x(at)$ 是将$x(t)$ 在时间上压缩 a 倍，

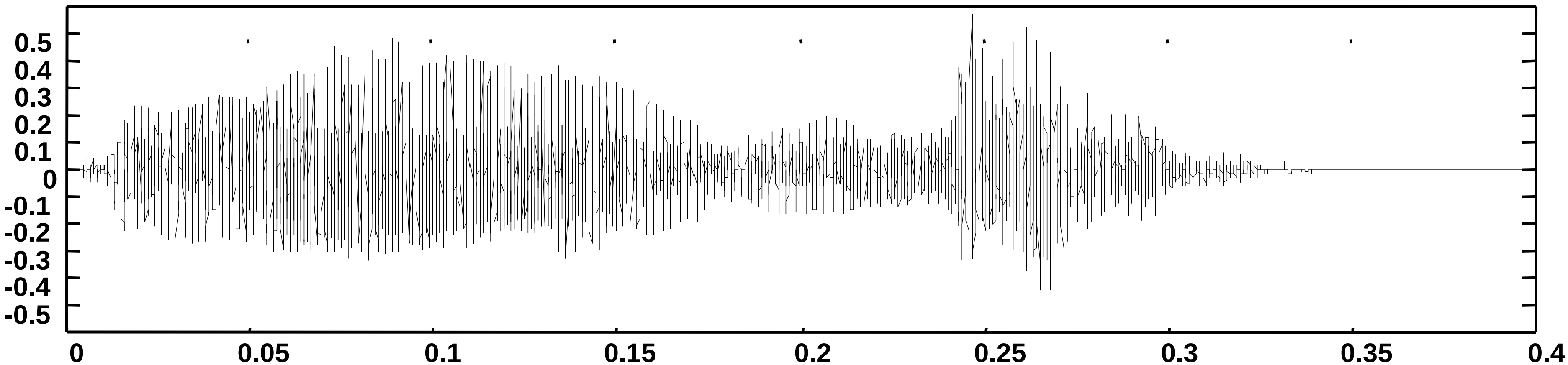
$0<a<1$时 $x(at)$ 是将$x(t)$ 在时间上扩展1/a 倍。

实例： 照片放大。

连续时间信号的基本运算

［例］ 尺度变换后语音信号的变化

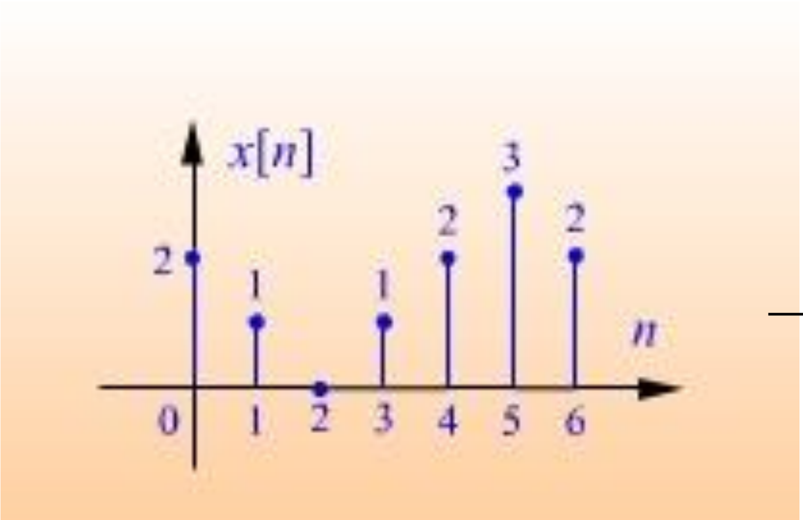
$f(t)$　　　　　$f(2t)$　　　　　$f(t/2)$

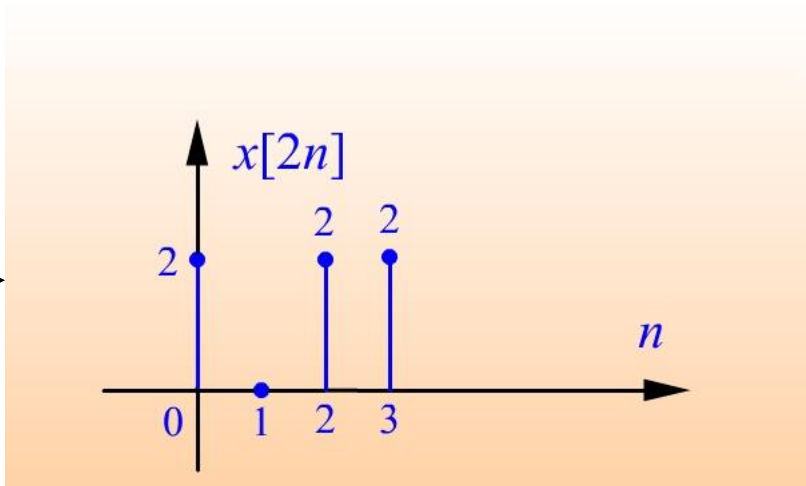


一段语音信号(“对了”)。

由于离散时间信号的自变量只能取整数值，因而尺度变换只对连续时间信号而言。

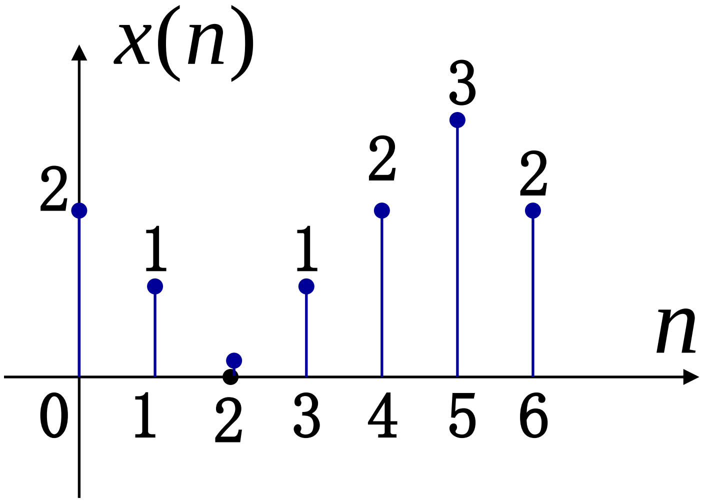
例如： $x(n) \longrightarrow x(2n)$

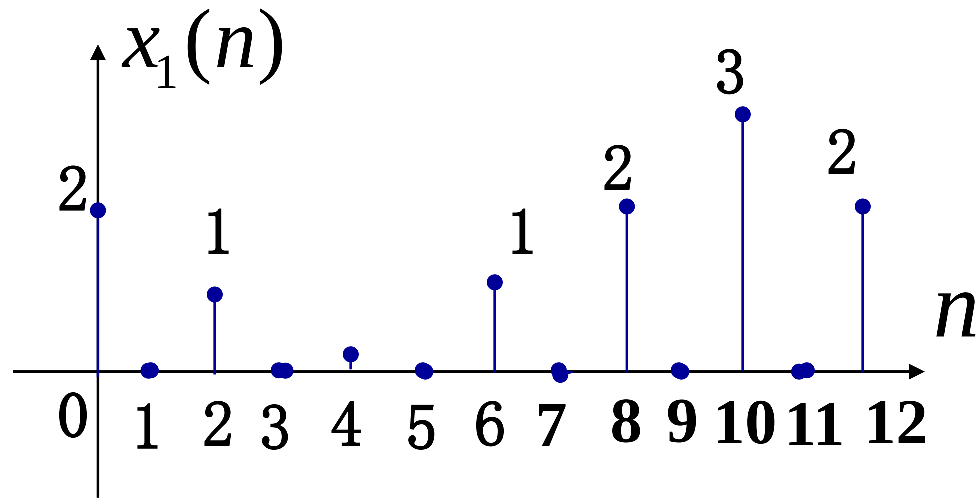




显然 $x(2n)$ 是从 $x(n)$ 中依次抽出自变量取偶数时的各点而构成的。这一过程称为对信号 $x(n)$ 的**抽取**（**decimation**）。对信号**抽取的过程是不可逆的**。

$$x(n) \longrightarrow x_1(n)=\begin{cases} x(n/2) & \text{n为偶数} \\ 0 & \text{n为奇数} \end{cases}$$





- 从 $x(n)$ 到 $x_1(n)$ 的过程称为对信号 $x(n)$ 的内插（**interpolation**）。对信号内插的过程是可逆的。

离散时间信号的抽取

- 原信号x

```
clear all
[x,fs,bits]=wavread('sound.wav');
% 读入声音文件（*.wav）
M=2;
x1=x(1:M:end);
wavwrite(x1,fs/M,'2倍抽取.wav');
% 存储抽取后声音文件（*.wav），注意fs
也变了。
```

- 4倍抽取后信号x1

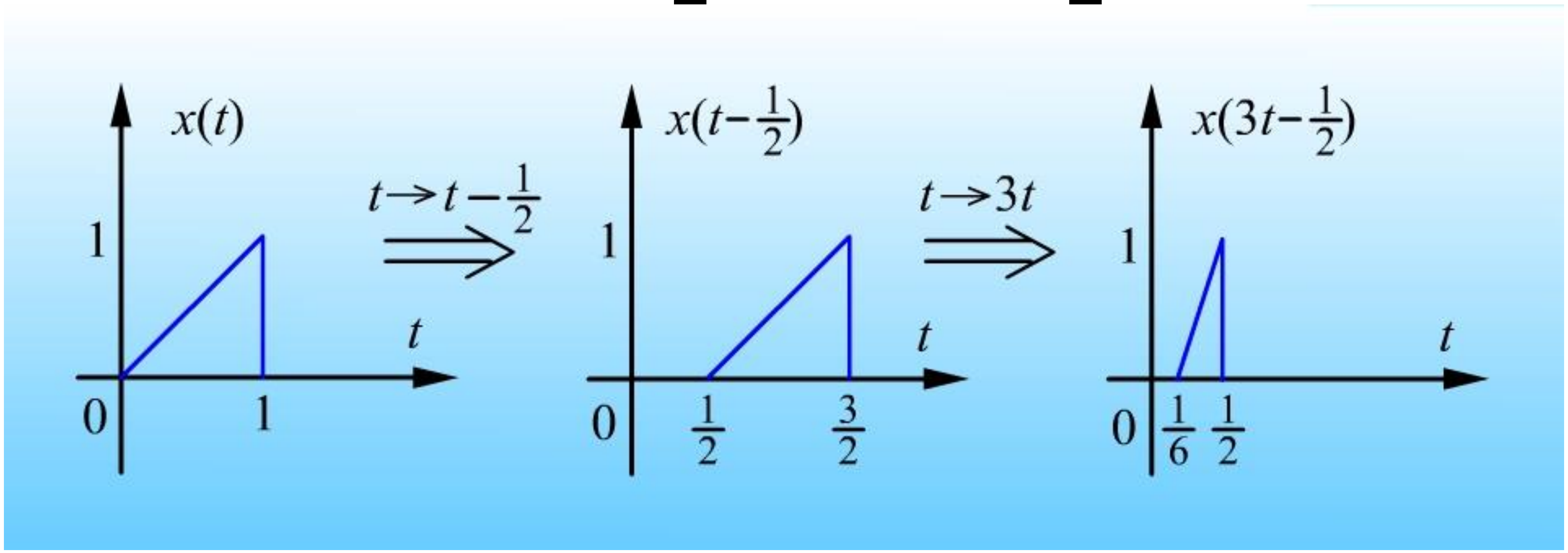
```
M=4;
x1=x(1:M:end);
wavwrite(x1,fs/M,'4倍抽取.wav');
```

- 8倍抽取后信号x1

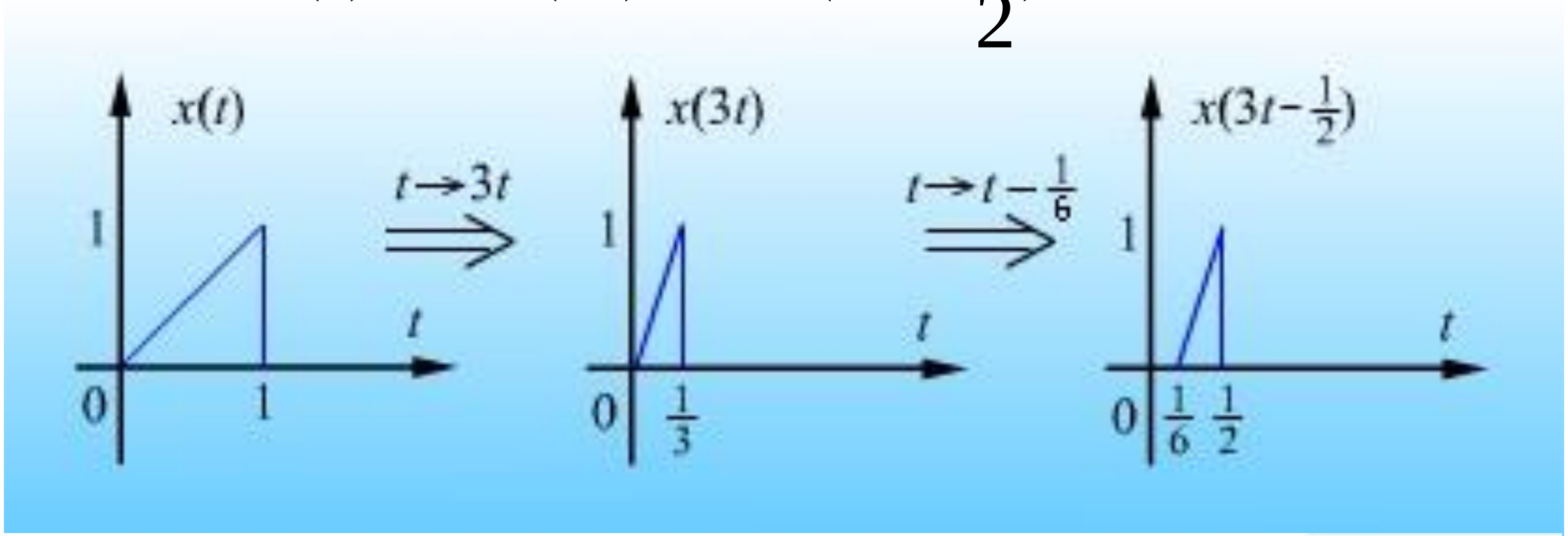
```
M=8;
x1=x(1:M:end);
wavwrite(x1,fs/M,'8倍抽取.wav');
```

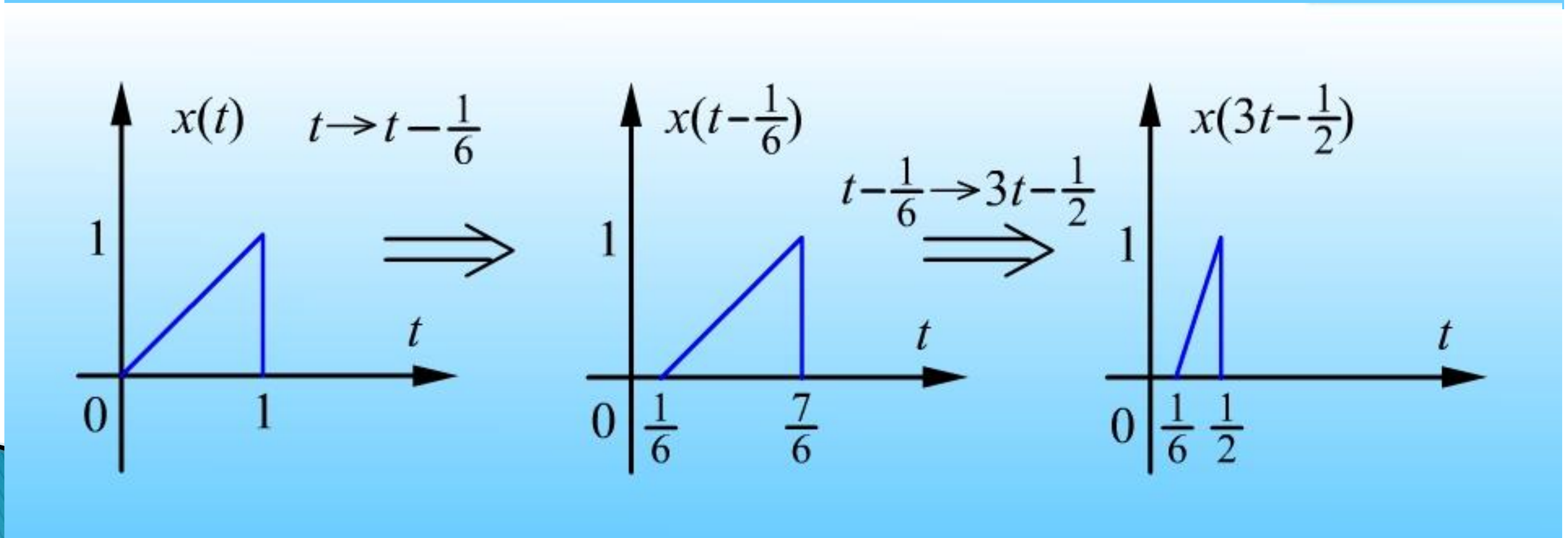
综合示例： 由 $x(t) \Rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$

做法一：$x(t) \rightarrow x(t - \frac{1}{2}) \rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$



做法二： $x(t) \to x(3t) \to x(3t-\frac{1}{2})$





连续时间信号的自变量变换

- **例:**

$$x(t) \rightarrow x(-\frac{t}{3}+2)$$

- **解法一:**

$$x(t) \xrightarrow{t \to -t} x(-t) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x(\frac{-t}{3}) \xrightarrow{t \to t-6} x(\frac{-t}{3}+2)$$

- **解法二:**

$$x(t) \xrightarrow{t \to t+2} x(t+2) \xrightarrow{t \to -t} x(-t+2) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x(\frac{-t}{3}+2)$$

- **解法三:**

$$x(t) \xrightarrow{t \to \frac{t}{3}} x(\frac{t}{3}) \xrightarrow{t \to -t} x(\frac{-t}{3}) \xrightarrow{t \to t-6} x(\frac{-t}{3}+2)$$

离散时间信号的自变量变换

- **例:** $$x(n) \rightarrow x(-\frac{n}{3}+2)$$

- **解:** $$x(n) \xrightarrow{n \rightarrow n+2} x(n+2) \xrightarrow{n \rightarrow -n} x(-n+2) \xrightarrow{n \rightarrow \frac{n}{3}} x(\frac{-n}{3}+2)$$

$$x(n) \xrightarrow{n \rightarrow -n} x(-n) \xrightarrow{n \rightarrow \frac{n}{3}} x(\frac{-n}{3}) \xrightarrow{n \rightarrow n-6} x(\frac{-n}{3}+2)$$

- **例:** $$x(n) \rightarrow x(-\frac{n}{3}+\frac{2}{3})$$

- **解:** $$x(n) \cancel{\xrightarrow{n \rightarrow n+\frac{2}{3}}} x(n+\frac{2}{3}) \xrightarrow{n \rightarrow -n} x(-n+\frac{2}{3}) \xrightarrow{n \rightarrow \frac{n}{3}} x(\frac{-n}{3}+\frac{2}{3})$$

$$x(n) \xrightarrow{n \rightarrow -n} x(-n) \xrightarrow{n \rightarrow \frac{n}{3}} x(\frac{-n}{3}) \xrightarrow{n \rightarrow n-2} x(\frac{-n}{3}+\frac{2}{3})$$

离散时间信号的自变量变换

- **问:** $$x(n) \rightarrow x(-3n+2)$$ ？

$$x(n) \rightarrow x(-\frac{3}{5}n+2)$$ ？

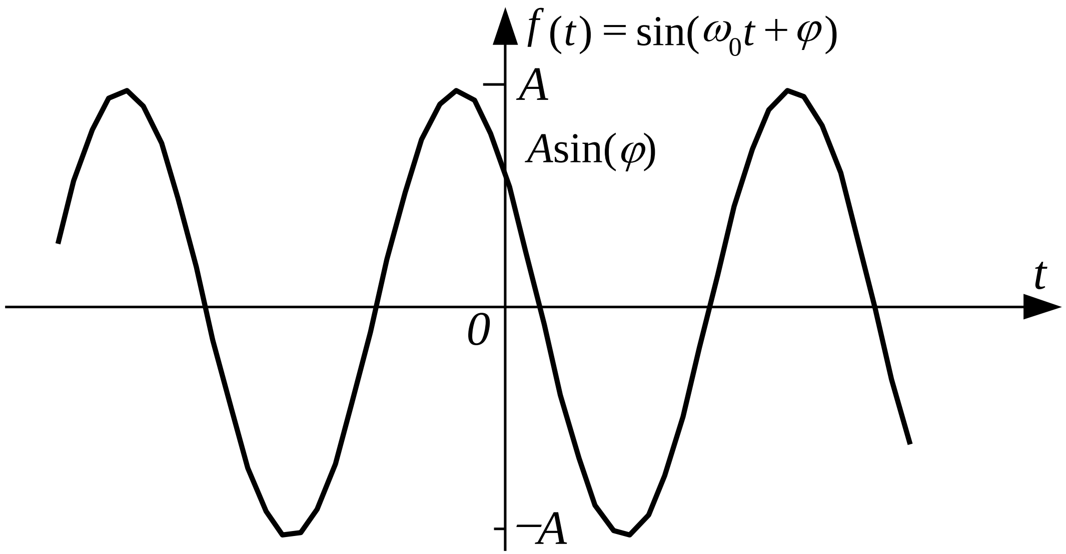
1.3 常用的基本信号:(basic signals)

- 正弦信号
- 指数信号
- 单位阶跃信号
- 符号函数
- 单位冲激和单位脉冲信号

正弦信号

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

A: 振幅　　ω_0:角频率　　φ:初始相位



周期信号

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

微分或积分后仍是正弦信号

正弦信号：（ **Sinusoidal signal**)

•连续时间正弦信号: $x(t) = A\cos(\Omega_0 t + \phi)$

周期信号，基波周期 $T_0 = 2\pi / \Omega_0$

•离散时间正弦信号: $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$

频率 ω_0 的量纲为弧度（rad ）。

•离散时间正弦信号不一定是周期的。

设 $x(n) = \cos\omega_0 n$ 具有周期性，则

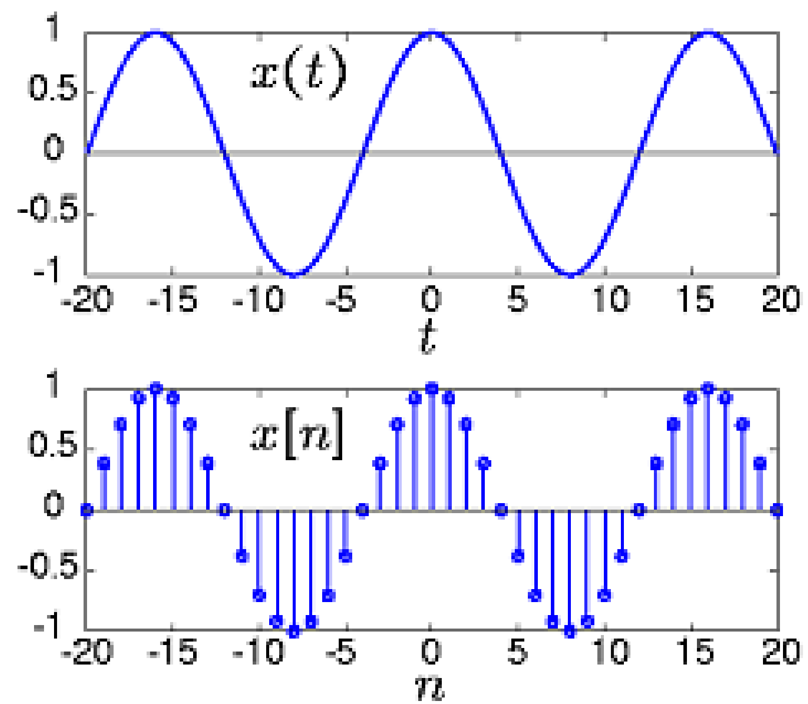
$$\cos\omega_0 n = \cos\omega_0(n + N) \Rightarrow \omega_0 N = 2\pi m$$

即：

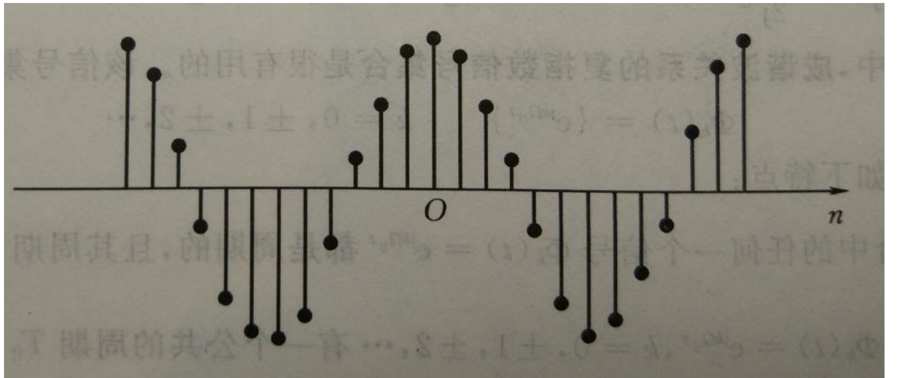
$$\boxed{\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}}$$

表明只有当 $\omega_0 / 2\pi$ 是有理数时，信号才是周期的。

- 离散时间信号可以通过对连续时间信号提取其离散时刻的样本（即采样）而得到。对同一个连续时间信号以不同的时间间隔采样，将得到不同的序列。



- 对周期性连续时间信号采样，所得到的序列不一定是周期的。只有当信号的基波周期 T_0 与采样间隔 T_s 之比 T_0/T_s 是有理数时，采样所得到的序列才具有周期性。



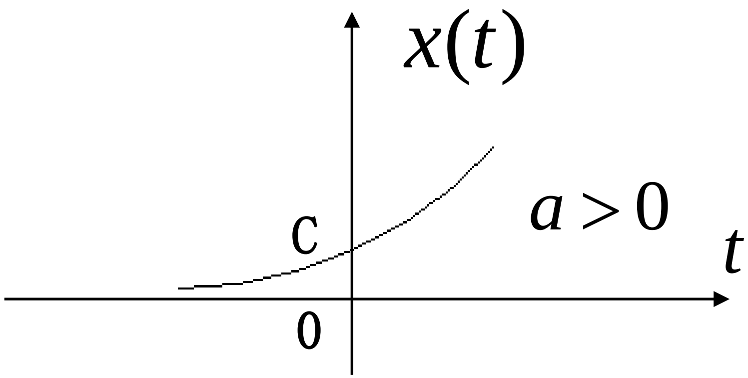
(c)

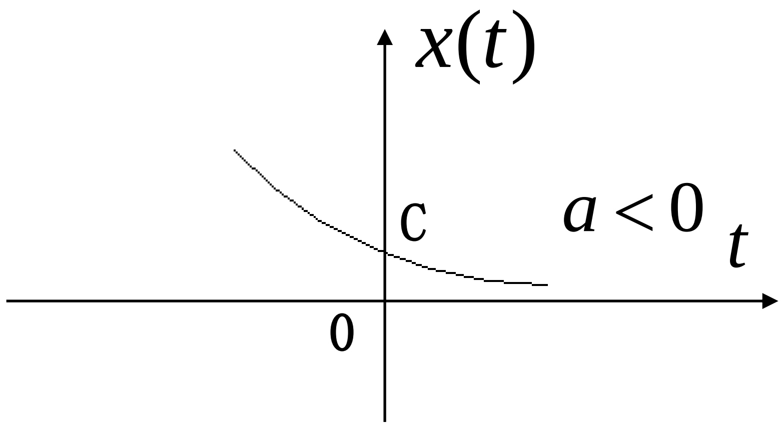
$$\cos(\frac{n}{4})$$

指数信号：（ Exponential signal)

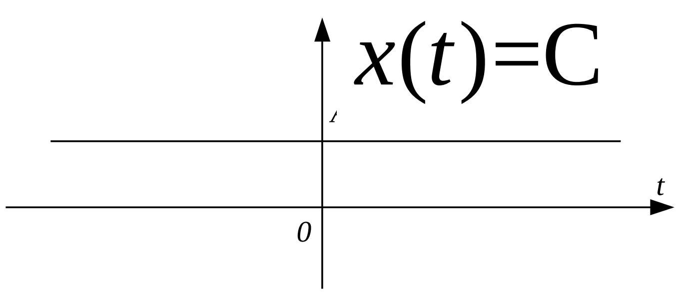
1. 连续时间指数信号：$x(t) = Ce^{at}$

1. 实指数信号：C , a为实数





*直流信号



$a=0$

2. 周期性复指数信号： $C=1, a=j\Omega_0$

$$x(t)=e^{j\Omega_0 t}=\cos\Omega_0 t+j\sin\Omega_0 t$$

基波周期 $T_0=2\pi/\Omega_0$，实部、虚部均为正弦信号。

显然，
$$\cos\Omega_0 t=\frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right]$$

3. 成谐波关系的复指数信号集：

$$\phi_k(t)=\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

此信号集中的每一个信号都是周期的，其周期为 $T_k=2\pi/|k\Omega_0|$。所有信号的公共周期为 $T_0=2\pi/|\Omega_0|$。每个信号的频率都是 Ω_0 的整数倍。

2. 周期性复指数信号：$C=1, a=j\Omega_0$

$$x(t)=e^{j\Omega_0 t}=\cos\Omega_0 t+j\sin\Omega_0 t$$

基波周期 $T_0=2\pi/\Omega_0$，实部、虚部均为正弦信号。

显然，$$\cos\Omega_0 t=\frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t}+e^{-j\Omega_0 t}\right]$$

3. 成谐波关系的复指数信号集：

$$\phi_k(t)=\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

此信号集中的每一个信号都是周期的，其周期为 $T_k=2\pi/|k\Omega_0|$。所有信号的公共周期为$T_0=2\pi/|\Omega_0|$。每个信号的频率都是 Ω_0 的整数倍。

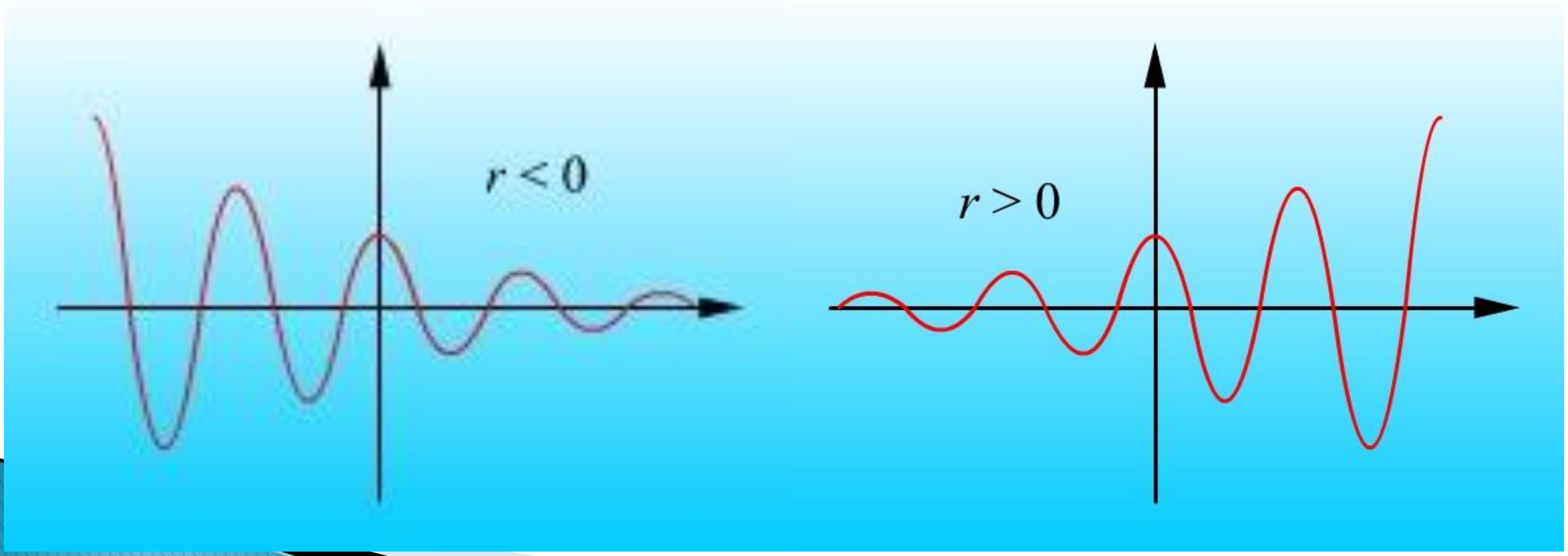
4. 复指数信号：$C = |C| e^{j\theta}, a = \sigma + j\Omega_0$

$$x(t) = |C| e^{\sigma t} e^{j(\Omega_0 t + \theta)}$$

$$\mathrm{Re}\left[x(t)\right] = |C| e^{\sigma t} \cos(\Omega_0 t + \theta)$$

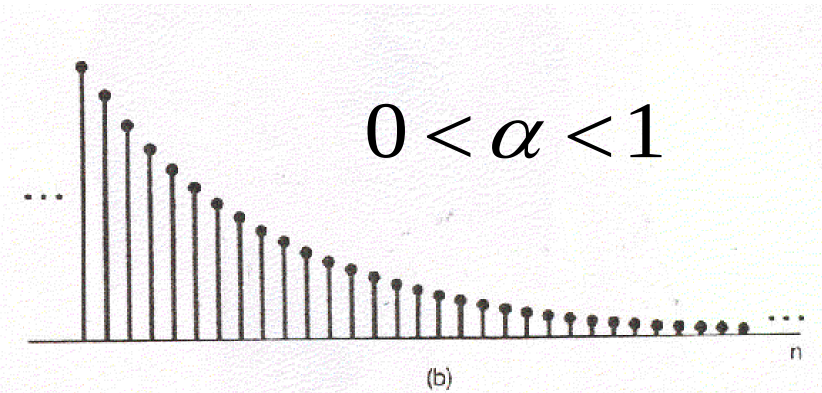
$$\mathrm{Im}\left[x(t)\right] = |C| e^{\sigma t} \sin(\Omega_0 t + \theta)$$

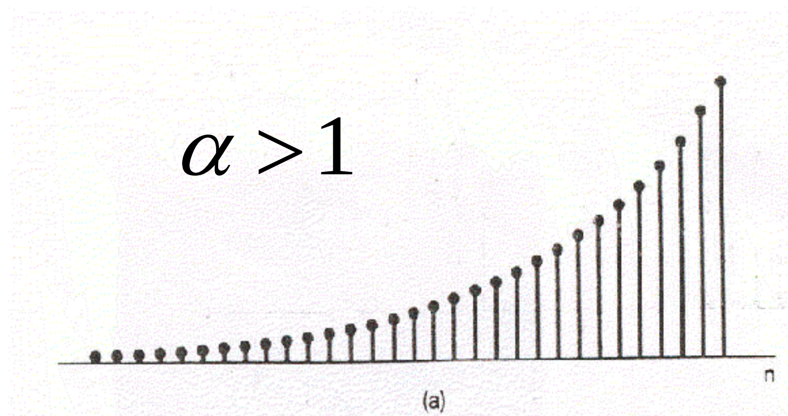
实部和虚部都是按指数规律变化的正弦振荡。

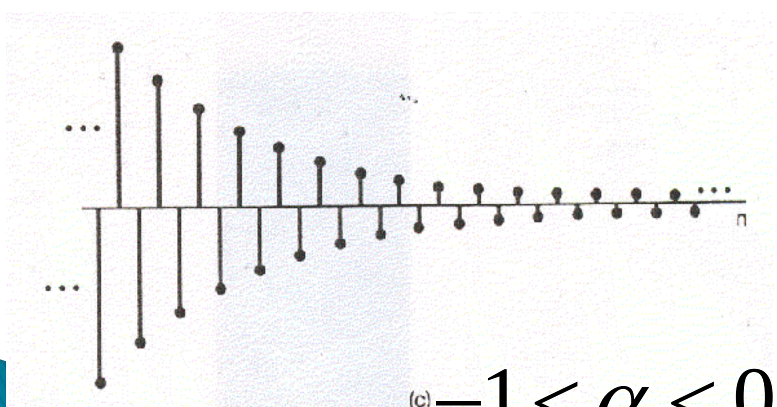


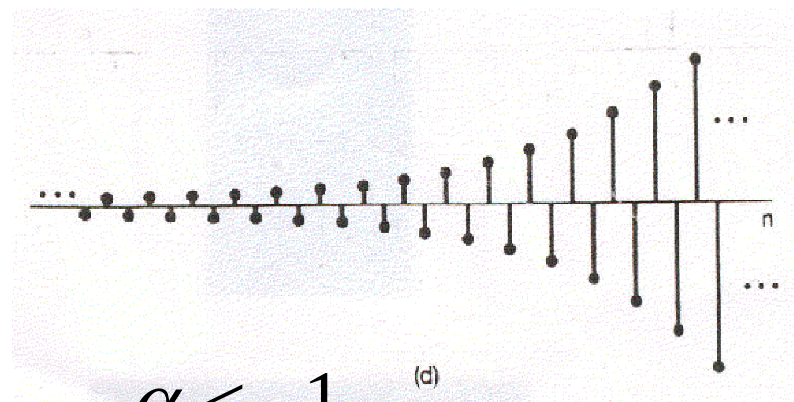
2. 离散时间指数信号：$x(n)=C\alpha^{n}$

1. 实指数信号：C,α 为实数









2. 复指数信号：$C=1, \alpha=e^{j\omega_0}$

$$x(n)=e^{j\omega_0 n} \text{ 与 } x(t)=e^{j\Omega_0 t} \text{ 形式相同}$$

但该信号不一定是周期的。只有在$\omega_0/2\pi$ 是有理数时才具有周期性。

当 $\dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{m}{N}$ 时，满足此关系的 m 与 N 中，必有一组是无公因子的，此时的 N 即为信号的基波周期 N_0 。

基波频率 $\omega_B=\dfrac{2\pi}{N_0}=\dfrac{\omega_0}{m}$ $\qquad N_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}m$

③ 成谐波关系的复指数信号集：

$$\phi_k(n) = \left\{ e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \right\} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

基波周期 N，基波频率 $2\pi / N$ 。

由于 $\phi_{k+N}(n) = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k(n)$

表明该信号集中的信号并不都是独立的，其中只有 N 个独立的谐波分量。

4. 一般的复指数信号：$C=|C|e^{j\theta},\alpha=re^{j\omega_0}$

$$x(n)=|C|r^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

$$\mathrm{Re}\left[x(n)\right]=|C|r^n\cos(\omega_0 n+\theta)$$

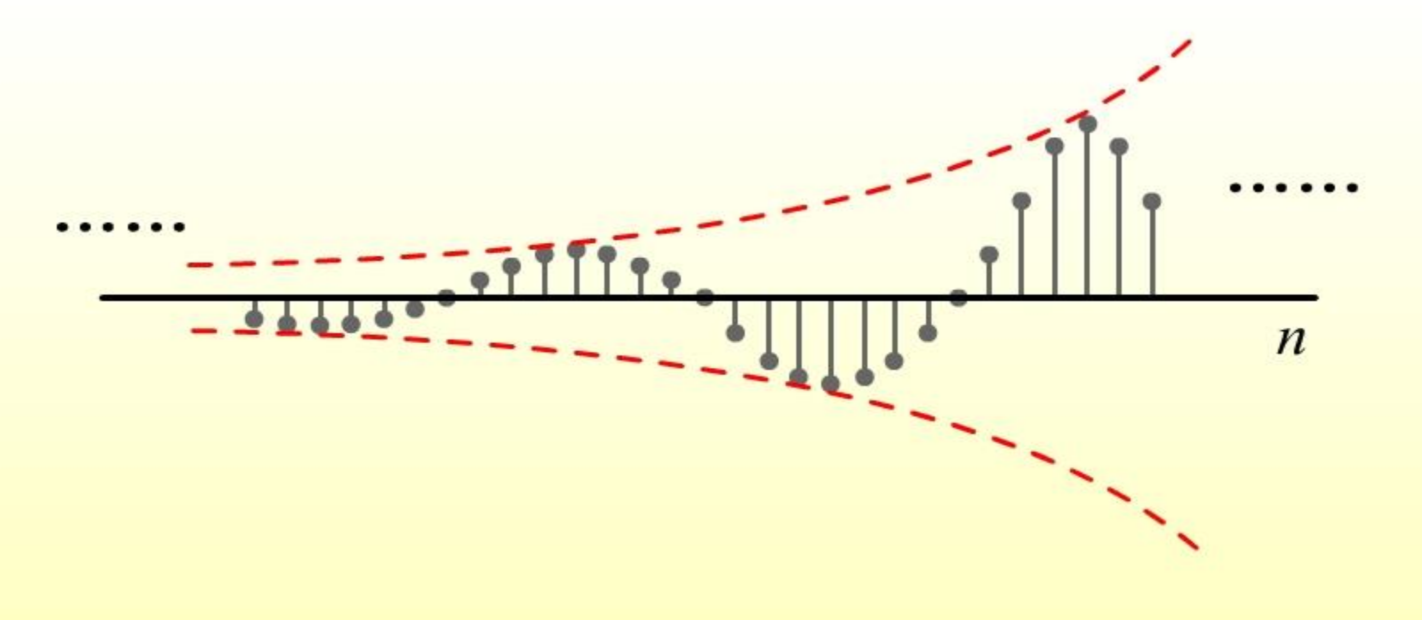
$$\mathrm{Im}\left[x(n)\right]=|C|r^n\sin(\omega_0 n+\theta)$$

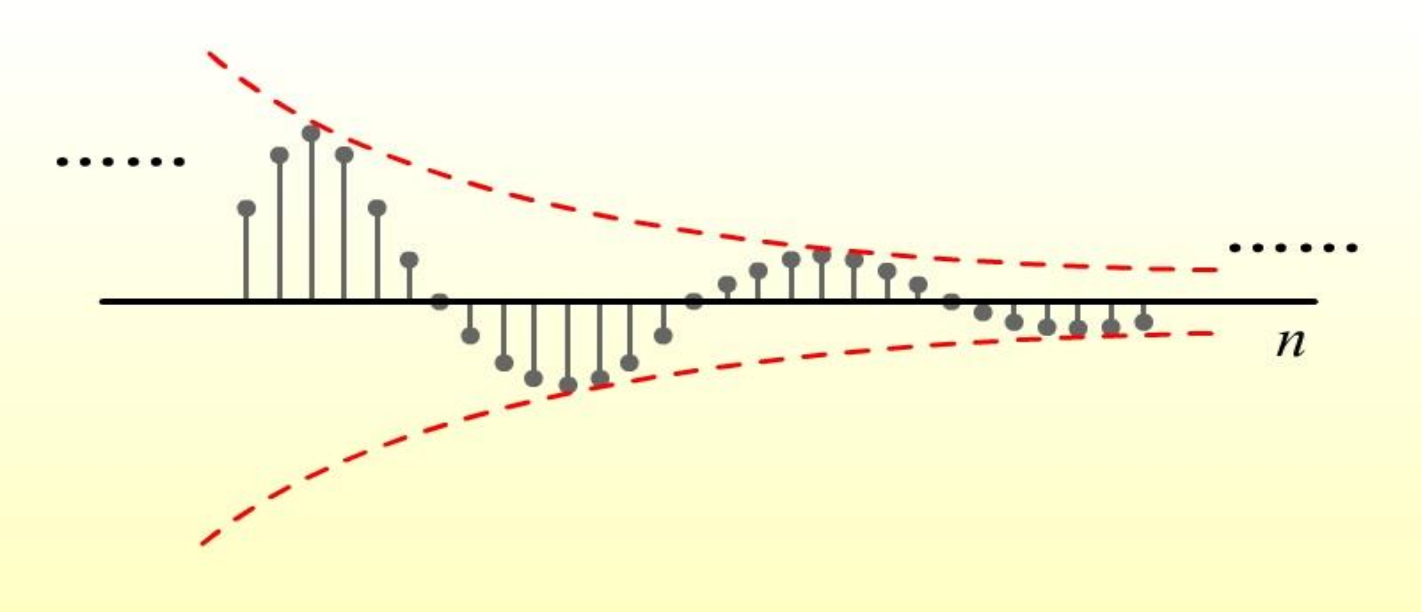
实部、虚部都是按指数规律变化的正弦振荡。

$r>1$ 振幅按指数规律增长

$r<1$ 振幅按指数规律衰减

$r=1$ 正弦振荡

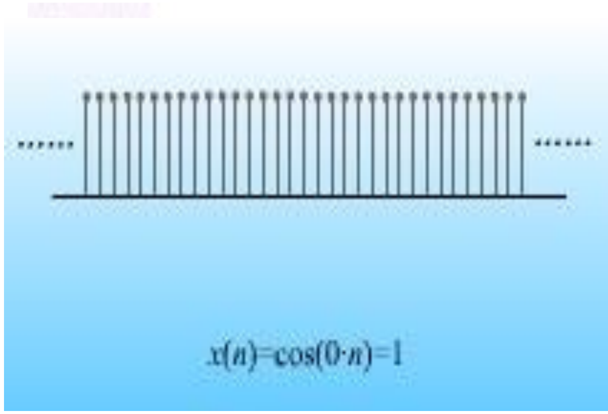

n


n

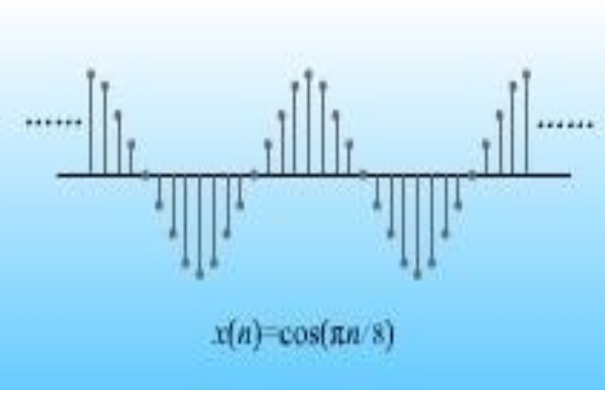
信号 $e^{j\Omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

$e^{j\Omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
❖ Ω_0不同，信号不同	❖ 频率相差2π的整数倍时,信号相同
❖ 对任何 Ω_0 信号都是周期的	❖ 仅当 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} m$ 时才是周期的
❖ 基波频率 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	❖ 基波频率 $\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$
❖ 基波周期： T_0	❖ 基波周期： N

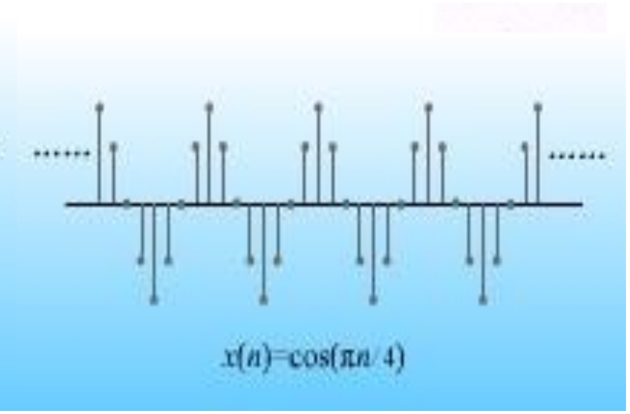
离散时间信号的频率有效范围只有 2π 。高频对应于π的奇数倍处，低频对应于π的偶数倍处。



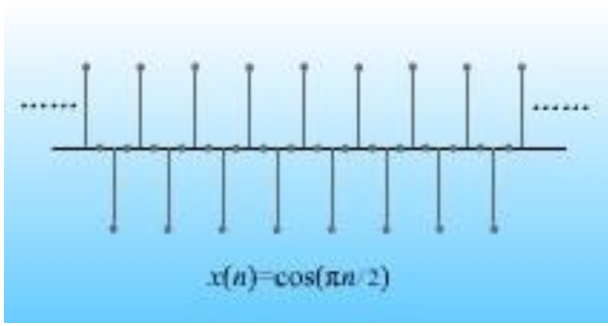
$x(n)=\cos(0\cdot n)=1$



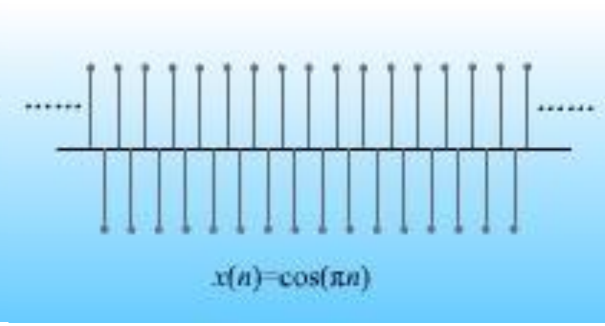
$x(n)=\cos(\pi n/8)$



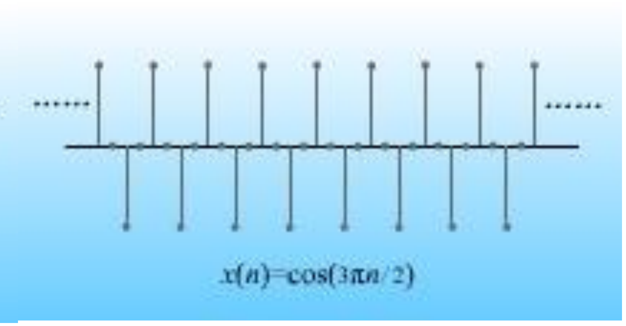
$x(n)=\cos(\pi n/4)$



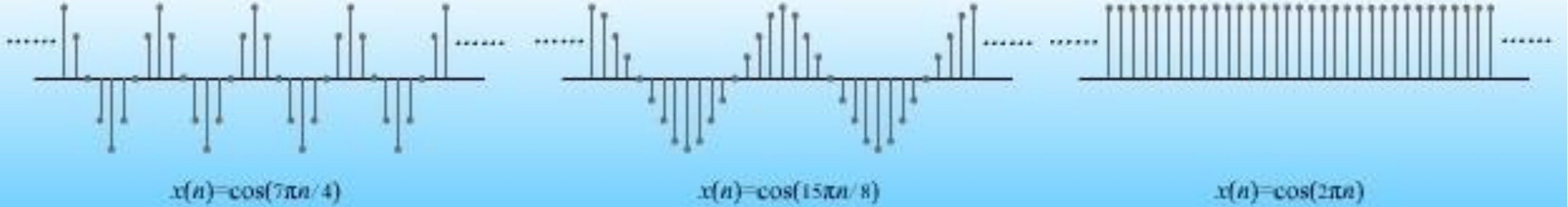
$x(n)=\cos(\pi n/2)$



$x(n)=\cos(\pi n)$

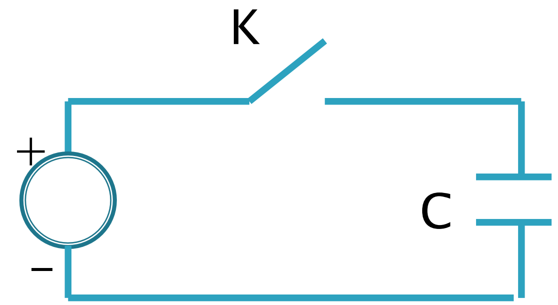


$x(n)=\cos(3\pi n/2)$



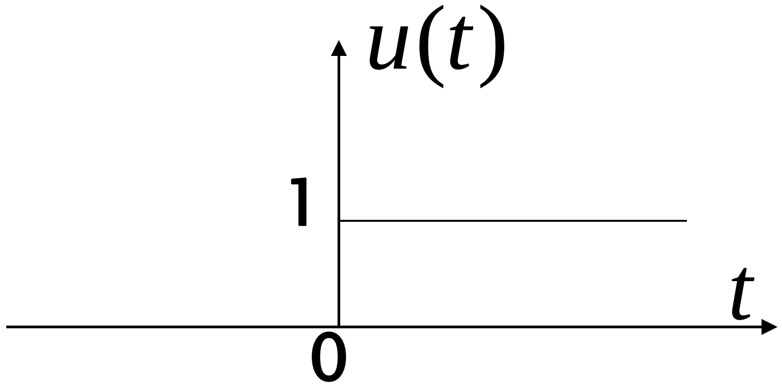
$x(n) = \cos(7\pi n / 4)$ $x(n) = \cos(15\pi n / 8)$ $x(n) = \cos(2\pi n)$

单位阶跃：(Unit step)

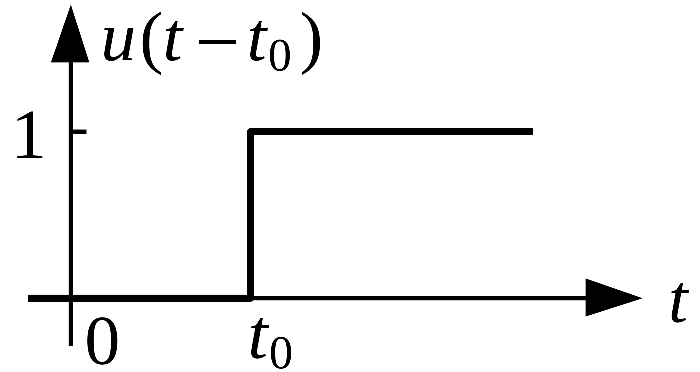


1. 连续时间单位阶跃：

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

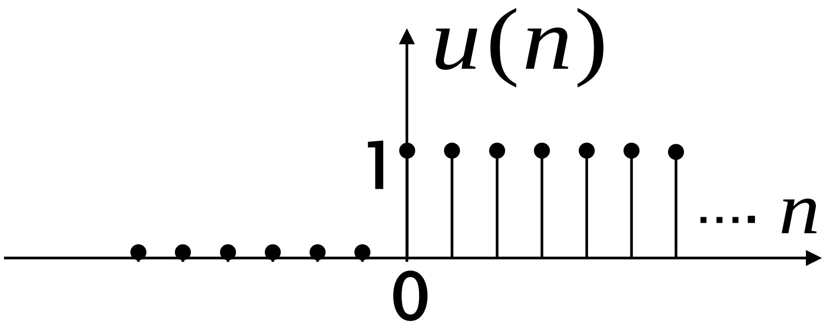


$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$



2. 离散时间单位阶跃：

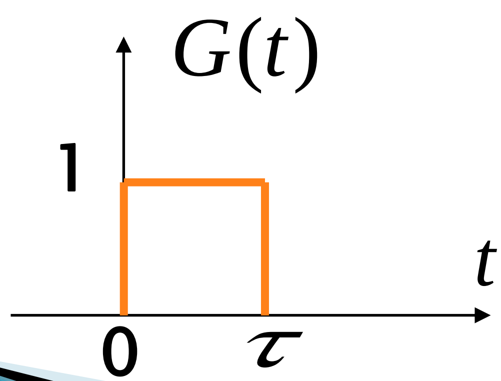
$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

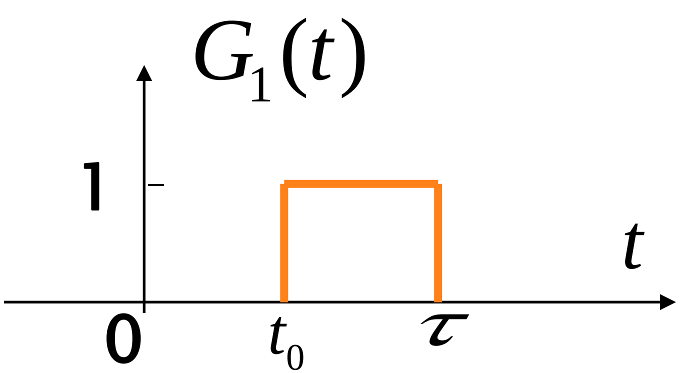


· 单位阶跃的应用：

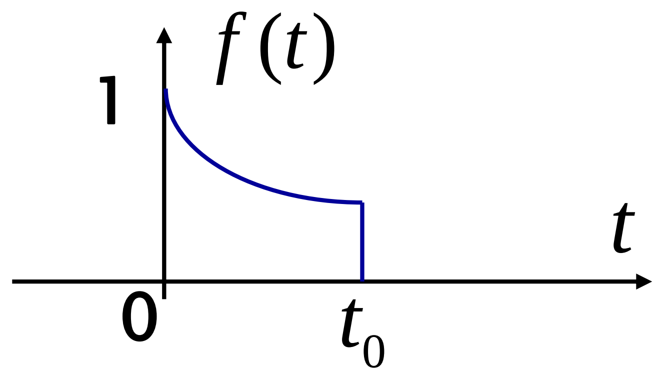
$$G(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

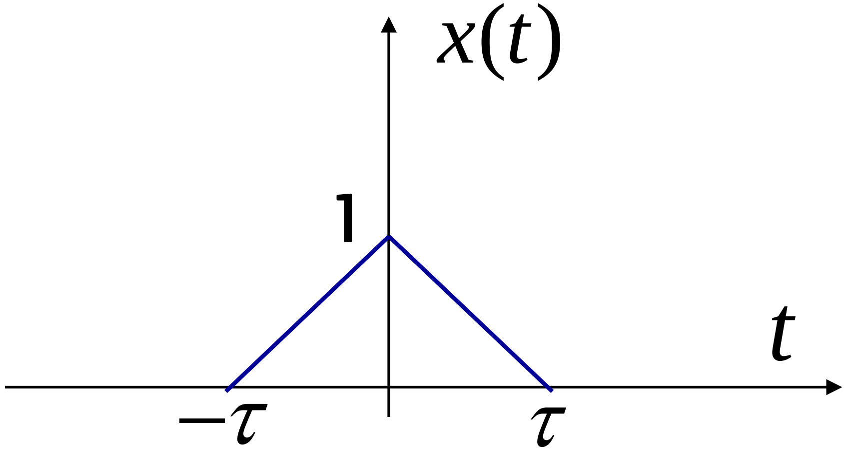
$$G_1(t)=u(t-t_0)-u(t-\tau)$$





$$f(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-t_0)]$$





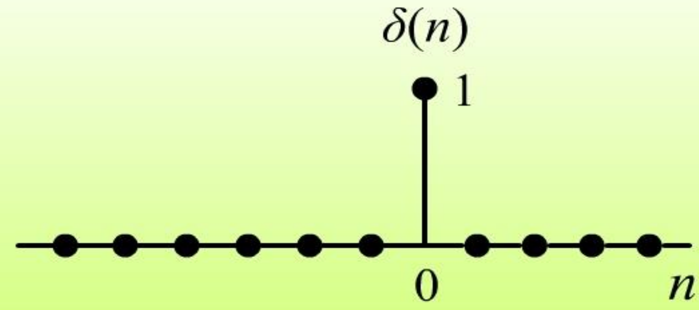
$$x(t)=(1+\frac{t}{\tau})[u(t+\tau)-u(t)]+(1-\frac{t}{\tau})[u(t)-u(t-\tau)]$$

$u(n)$ 在信号表示中也有同样的用途。

单位脉冲与单位冲激：（ Unit impulse)

1. 单位脉冲：

$$\delta(n)=\begin{cases}1\ , & n=0\\ 0\ , & n\neq 0\end{cases}$$



$\delta(n)$具有提取信号$x(n)$ 中某一点的样值的作用。

$$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n-n_0)=x(n_0)\delta(n-n_0)$$

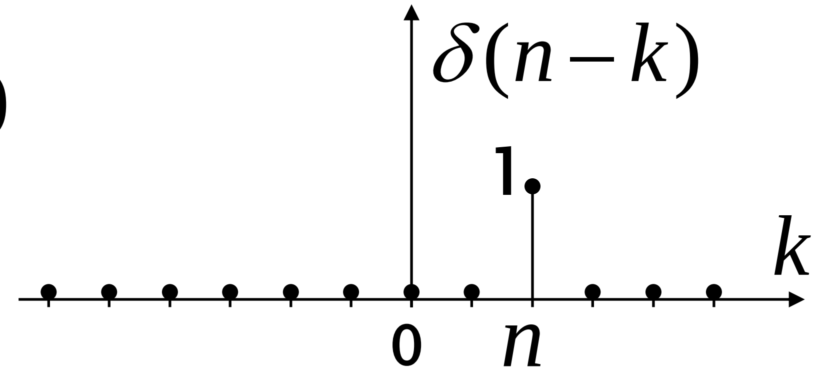
$\delta(n)$与$u(n)$ 之间的关系：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$ ———— 一次差分

$\delta(n)$与$u(n)$ 之间的关系：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$ —— 一次差分

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

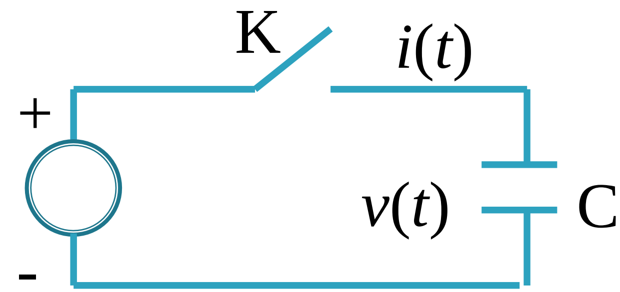


2. 单位冲激：

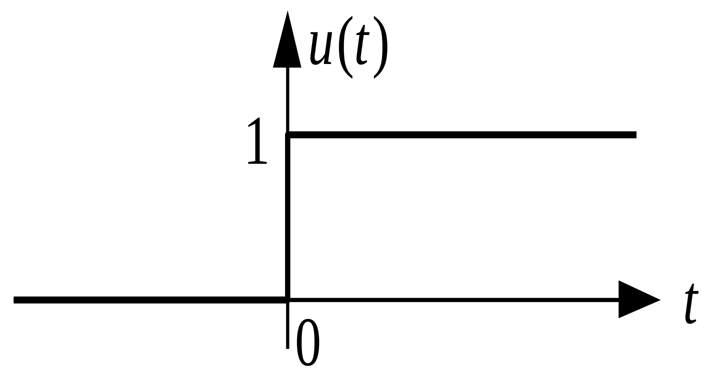
定义：$\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$　　$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

定义的不严密性：由于$u(t)$ 在 $t=0$不连续，因而在该处不可导。

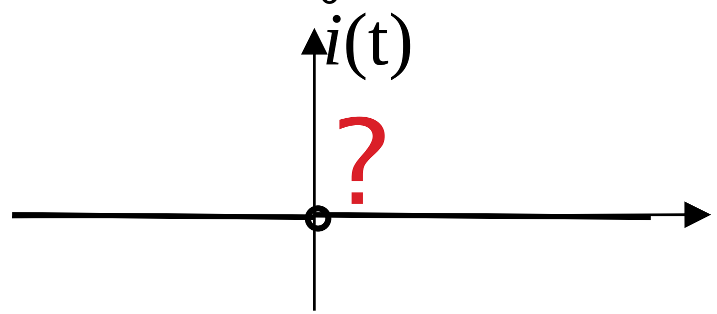
冲激信号的引出



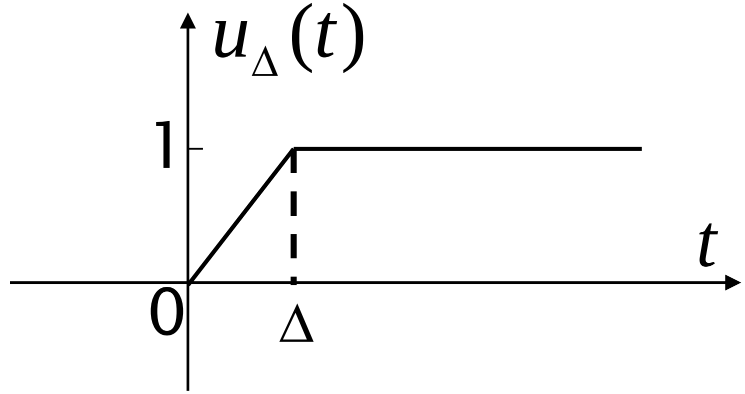
$v(\mathrm{t})=u(t)$



$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



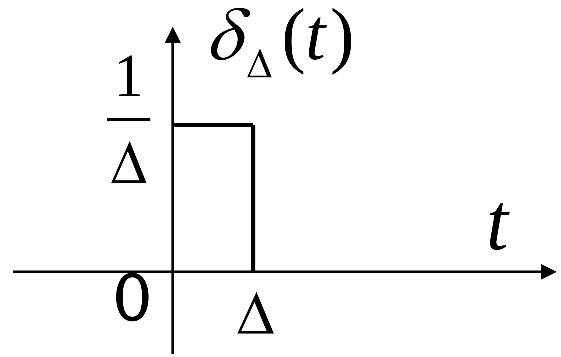
定义 $u_\Delta(t)$



显然当 $\Delta \longrightarrow 0$ 时

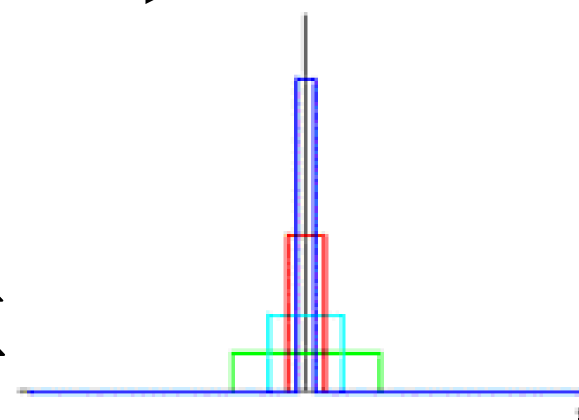
$$u_\Delta(t) \longrightarrow u(t)$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

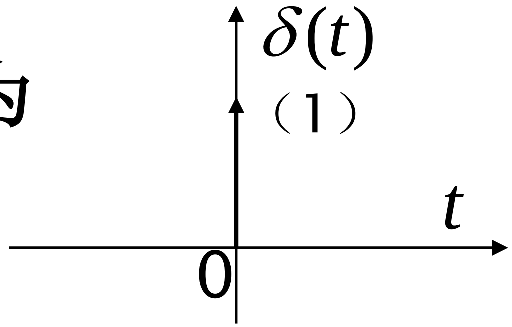


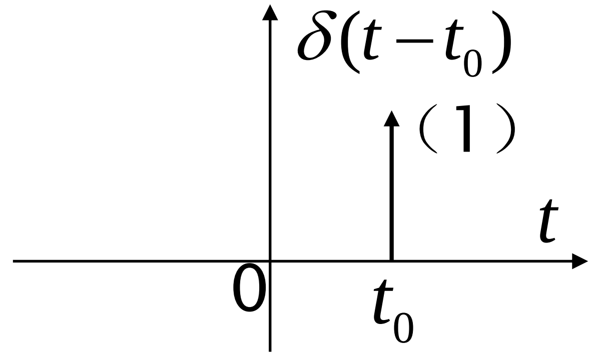
认为 $\lim\limits_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$

$\delta(t)$ 可视为一个面积始终为1的矩形，当其宽度趋于零时的极限。



$\delta(t)$ 表示为





矩形的面积称为冲激强度。

显然有： $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$

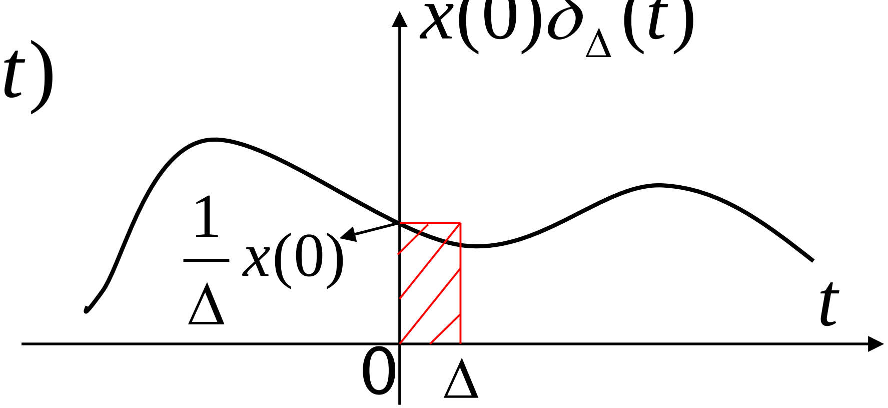
$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

$\delta(t)$也具有提取连续时间信号样本的作用。

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\lim_{\Delta\to 0} x(0)\delta_\Delta(t)=x(0)\delta(t)$$

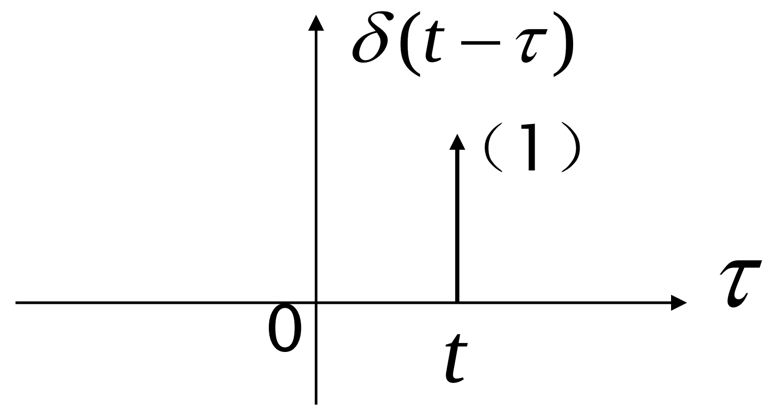


$\delta(t)$ 与$u(t)$ 的关系：

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

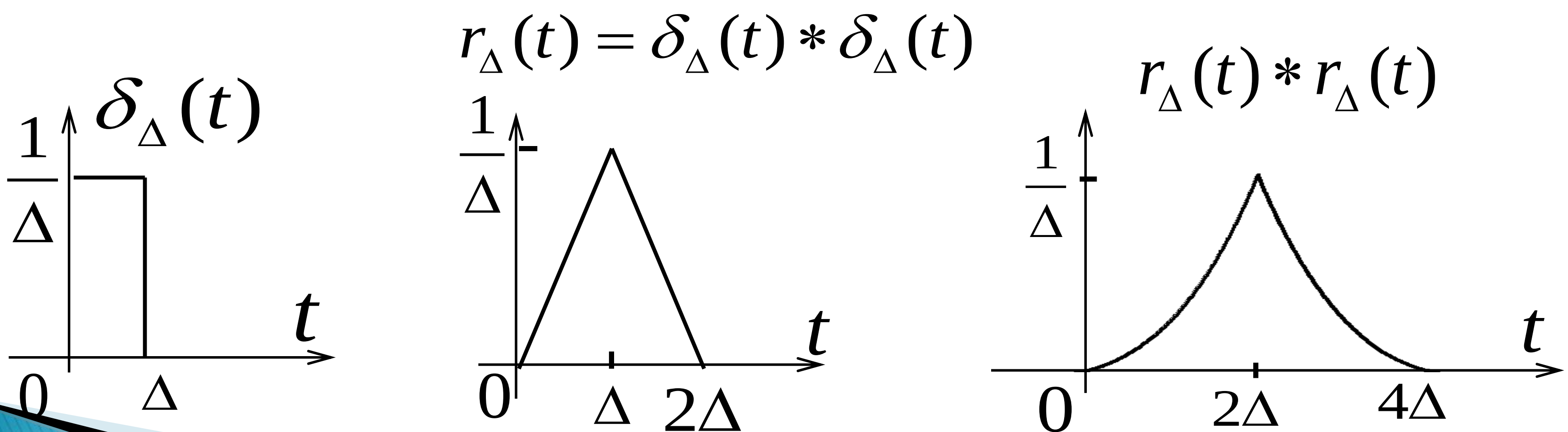
$$=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

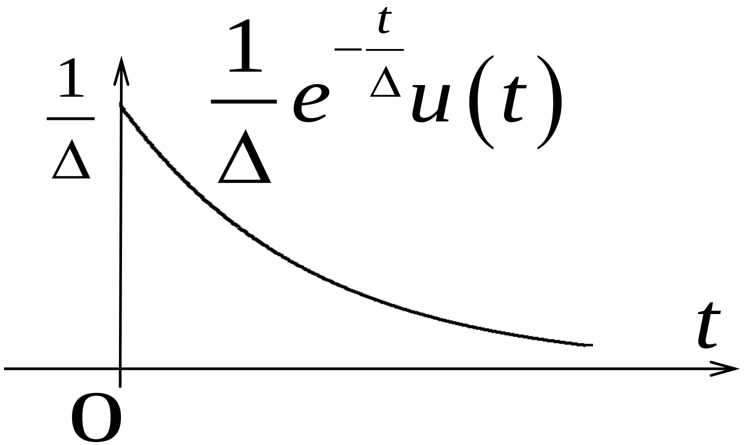


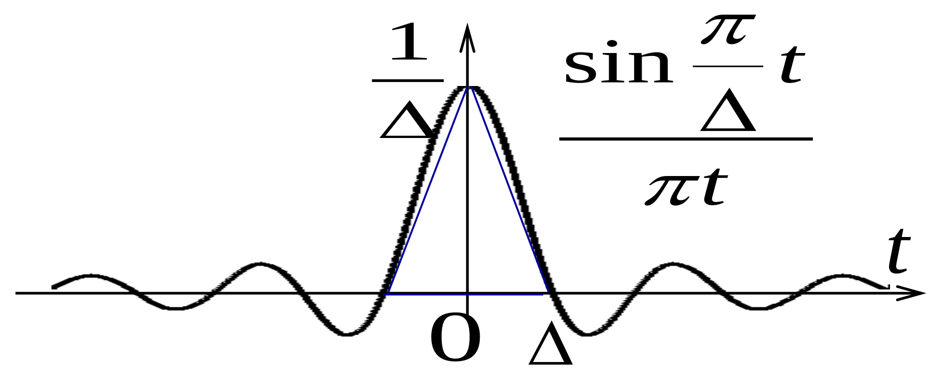
$\delta(t)$可用于描述能量有限但作用时间极短的物理现象。

2.3 奇异函数：(singularity functions)

前边在定义$\delta(t)$ 时，采用了极限的思想，将其看成面积始终为 1 的矩形在宽度趋于 0 时的极限。但这样的定义仍然是不严密的，因为可以发现有很多不同的信号在极限的意义下具有相同的属性。







这表明$\delta(t)$ 是一个非常规函数，被称为奇异函数或广义函数。对它的定义通常采用在积分运算下所表现的特性来描述。

一. $\delta(t)$ 及其性质：

定义 $x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt$ $\qquad x(t)$在 $t=0$ 连续

——积分意义下的定义

性质：

1 令$x(t)=1$ 则有：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

2 由定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(0)\delta(t)dt$$

$$\therefore x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

同理有：$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

3 若 $x(t)=t$ 则有： $t\delta(t)=0$

4 若 $tx_1(t)=tx_2(t)$ 则有：$x_1(t)=x_2(t)+k\delta(t)$

5 若 $x(t)=x(-t)$ 则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(-t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(-t)dt$$

$$\therefore x(t)\delta(t)=x(t)\delta(-t)$$

$\delta(t)=\delta(-t)$ 表明 $\delta(t)$ 是偶函数。

6 $$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(at)dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(\frac{\tau}{a})\delta(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{a}x(0)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt \qquad (a>0)$$

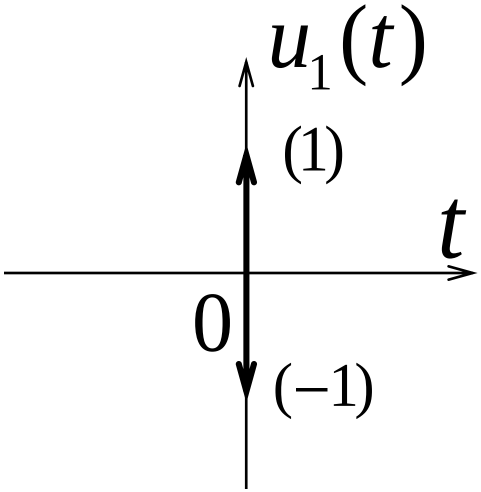
$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(at)dt=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(\frac{\tau}{a})\delta(\tau)d\tau$$

$$= -\frac{1}{a} x(0) = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt \qquad (a < 0)$$

$$\therefore \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

二. $\delta(t)$ 的微分与积分:

- 定义$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta'(t)dt = -x'(0)$



$\delta'(t)$称为**单位冲激偶(Unit doublet)**

① 令 $x(t)=1$ 则有：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$

② 若 $x(t)=-x(-t)$ 则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta'(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}x(-t)\delta'(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta'(-t)dt$$

$$\therefore x(t)\delta'(t)=-x(t)\delta'(-t)$$

$\delta'(t)=-\delta'(-t)$ 表明 $\delta'(t)$ 是奇函数。

③ $$\frac{d}{dt}[x(t)\delta(t)]=x'(t)\delta(t)+x(t)\delta'(t)$$

$$=x'(0)\delta(t)+x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)$$

$$\therefore x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$$

④ 由 ③ 可得： $t\delta'(t) = -\delta(t)$

$$t^2\delta'(t) = 0$$

若 $t^2 x_1(t) = t^2 x_2(t)$ ，则有：

$$x_1(t) = x_2(t) + k_1\delta(t) + k_2\delta'(t)$$

- 高阶导数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(t)\big|_{t=0}$$

- 积分： $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$

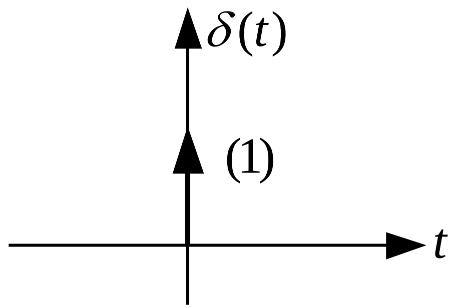
$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)dt = tu(t) \quad \cdots\cdots$$

显然，$u_{-2}(t)$ 已经是一个常规的函数了。

$$u_{-n}(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{\tau}}_{n个}\delta(\lambda)\underbrace{d\lambda d\tau\cdots d\eta}_{n个}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$$

奇异信号

单位冲激信号



说明：

①冲激信号具有强度，其强度就是冲激信号对时间的广义积分值。在图中用括号注明，以区分信号的幅值。

②冲激信号的物理意义：

表征作用时间极短，作用值很大的物理现象的数学模型。

③冲激信号的作用：

A. 表示其他任意信号　B. 表示信号间断点的导数

[例] 计算下列各式

$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t$

$(2)\int_{-4}^{+6}e^{-2t}\cdot\delta(t+8)dt$

$(3)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(2-2t)\mathrm{d}t$

$(4)\,(t^{3}+2t^{2}+3)\cdot\delta(t-2)$

$(5)\,\mathrm{e}^{-4t}\cdot\delta(2+2t)$

$(6)\,\mathrm{e}^{-2t}u(t)\cdot\delta(t+1)$

解:

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})dt=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2)\int_{-4}^{+6}e^{-2t}\cdot\delta(t+8)dt\quad=0$$

$$(3)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\cdot\delta(2-2t)dt\ =\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t-1)dt=\frac{1}{2e}$$

$$(4)\ (t^3+2t^2+3)\cdot\delta(t-2)=(2^3+2\cdot 2^2+3)\cdot\delta(t-2)=19\cdot\delta(t-2)$$

$$(5)\,e^{-4t}\cdot\delta(2+2t)\ =e^{-4t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t+1)=\frac{1}{2}e^{-4\times(-1)}\delta(t+1)=\frac{1}{2}e^{4}\delta(t+1)$$

$$(6)\ e^{-2t}u(t)\cdot\delta(t+1)\quad=e^{-2\times(-1)}u(-1)\cdot\delta(t+1)=0\times\delta(t+1)=0$$

课后作业：

P43-46：

1.1：（1)(c）、（2）(b)、(3)(c）

1.3： (b)

1.5： (a) (c) (g)

1.6：（a)、（c)

1.7

1.10

1.11（a)

1.12：（a）、（d）、(e)