# 信号与系统

王洪广
wanghg@mail.xjtu.edu.cn

本章内容：

- 信号的时域分解——用$\delta(n)$表示离散时间信号；用$\delta(t)$表示连续时间信号；
- LTI系统的时域分析——卷积运算；
- LTI系统的微分方程及差分方程表示；
- LTI系统的框图结构表示。

本章内容：

- 信号的时域分解——用 $\delta(n)$ 表示离散时间信号；用 $\delta(t)$表示连续时间信号；
- LTI系统的时域分析——卷积运算；
- LTI系统的微分方程及差分方程表示；
- LTI系统的框图结构表示。

## 2.0 引言（Introduction）

由于LTI系统满足齐次性和可加性，并且具有时不变性的特点，因而为建立信号与系统分析的理论与方法奠定了基础。

基本思想：如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

- 问题的实质：

  1．研究信号的分解：即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元，如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号；

  2．如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。

- 作为基本单元的信号应满足以下要求：

  1．本身尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号；

  2．LTI系统对这种信号的响应易于求得。

如果解决了信号分解的问题，即：若有

$$x(t)=\sum_i a_i x_i(t) \qquad x_i(t)\rightarrow y_i(t)$$

$$\downarrow$$

则 $$y(t)=\sum_i a_i y_i(t)$$

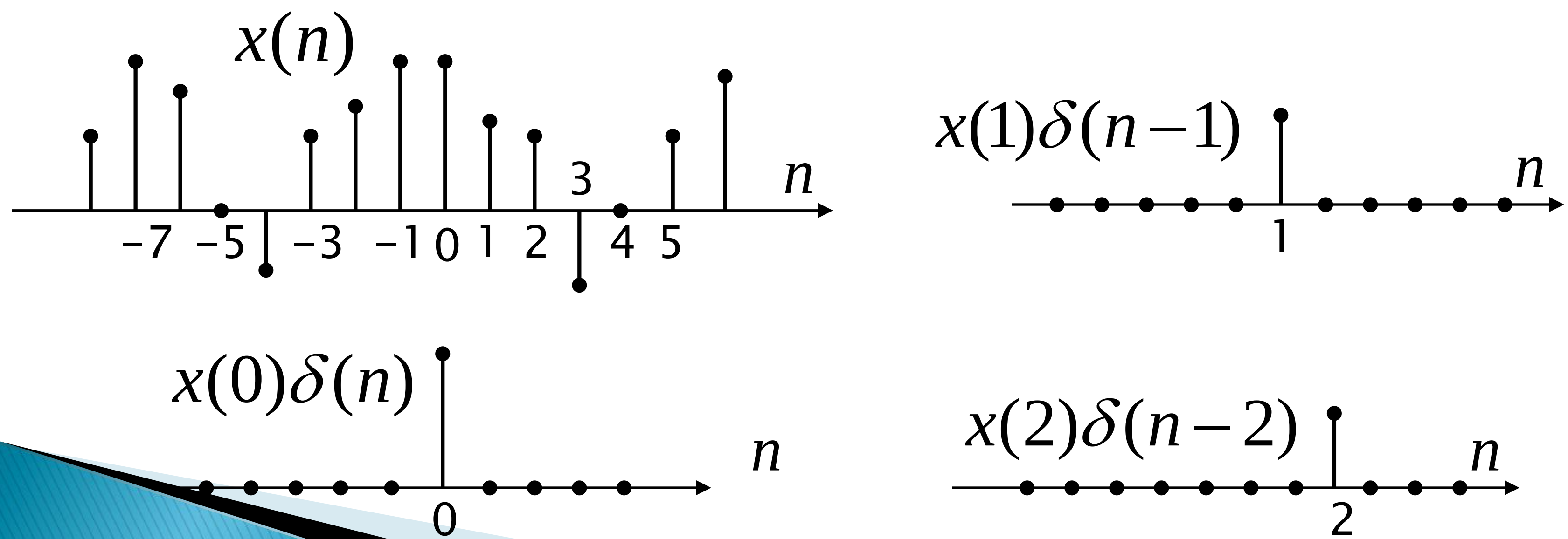
- 分析方法：

将信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。

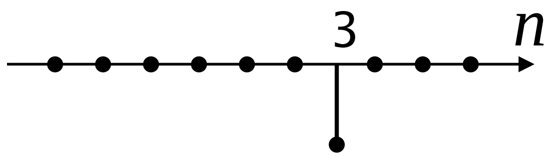
# 2.1 信号的时域分解：
# ( Decomposition of Signals in Time-Domain )

## 一. 用$\delta(n)$表示离散时间信号：

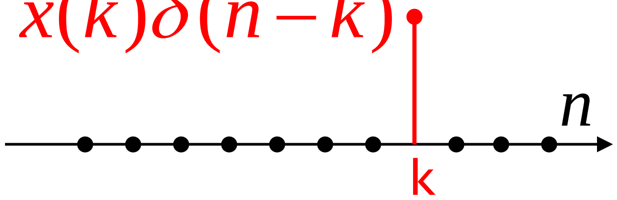
对任何离散时间信号 $x(n)$，如果每次从其中取出一个点，就可以将整个信号拆开来。



$x(3)\delta(n-3)$




$x(k)\delta(n-k)$




每次取出的一个点都可以表示成不同加权、不同位置的单位脉冲。

于是有：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

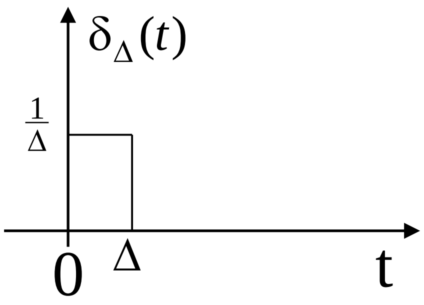
表明：任何信号 $x(n)$ 都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。

## 二.  用 $\delta(t)$表示连续时间信号：

采用数学中讨论积分的思想。

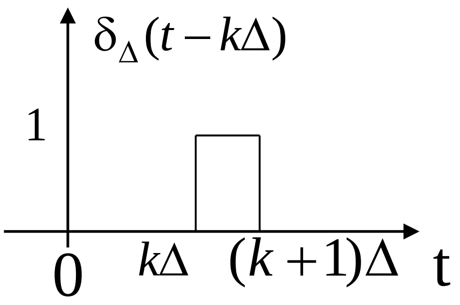
定义：

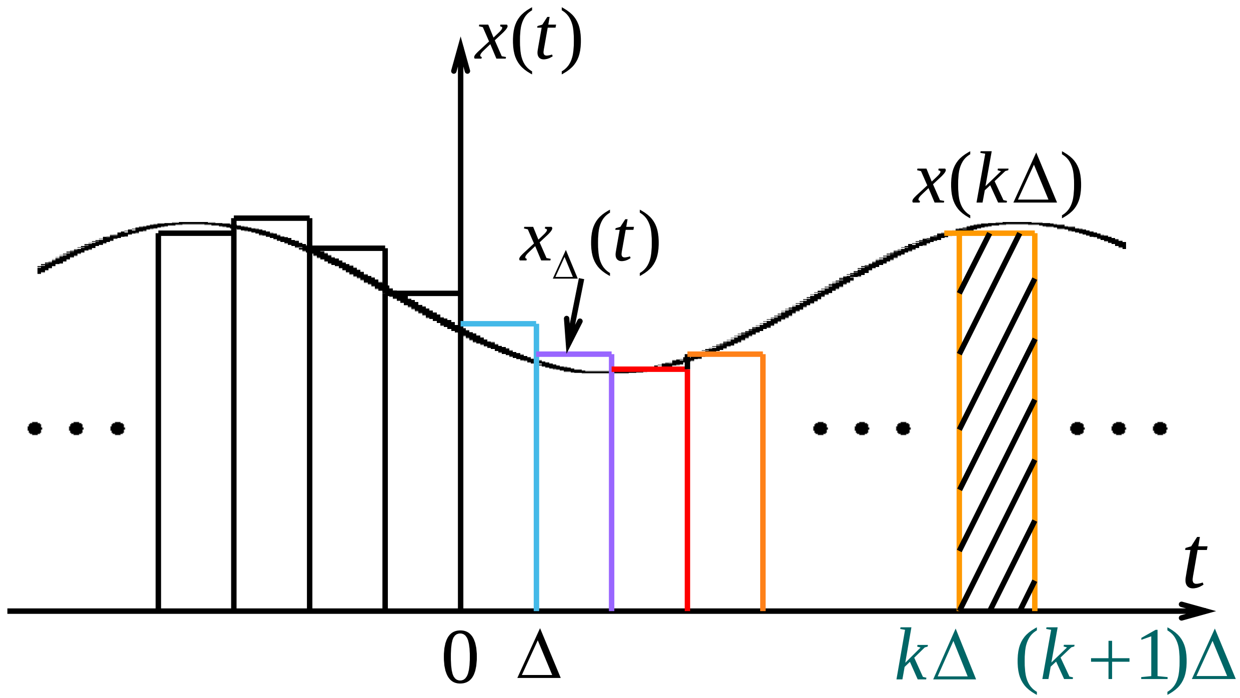
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$




则有：

$$\Delta \cdot \delta_\Delta(t - k\Delta) = \begin{cases} 1 & k\Delta < t < (k+1)\Delta \\ 0 & \text{其它t} \end{cases}$$






第 $k$ 个矩形可表示为：$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

这些矩形迭加起来就成为阶梯形信号 $x_\Delta(t)$ ，

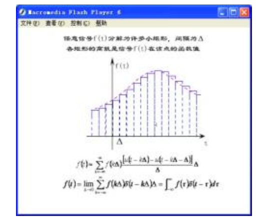
即：

$$x_\Delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

当 $\Delta \to 0$ 时，$k\Delta \to \tau$，$\delta_\Delta(t-k\Delta) \to \delta(t-\tau)$，

$\Delta \to d\tau$，$\sum \to \int$ ，于是：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



这一关系也可以根据 $\delta(t)$ 的性质直接推导而来：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$= x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

**表明：**任何连续时间信号 $x(t)$ 都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的线性组合。

# 2.2 离散时间LTI系统的时域分析:
# ( Discrete - time LTI System Analysis in Time-Domain )

## 一. 卷积和:（Convolution sum）

### 卷积法求解系统响应$y[k]$的思路

1） 将任意信号分解为单位脉冲序列的线性组合

2） 求出单位脉冲序列作用在系统上的响应

—— 单位脉冲响应

3） 利用线性时不变系统的特性，即可求出任意序列$f[k]$激励下系统的响应$y[k]$。

# 卷积法求解系统响应$y_f[k]$推导

$$\delta[k] \Rightarrow h[k]$$

由时不变特性 $$\delta[k-n] \Rightarrow h[k-n]$$

由均匀特性 $$f[n]\delta[k-n] \Rightarrow f[n]h[k-n]$$

由叠加特性

$$T\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta[k-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]h[k-n]$$

$$y_f[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]h[k-n] = f[k]*h[k]$$

因此，只要得到了LTI系统对 $\delta(n)$的响应 $h(n)$

—— 单位脉冲响应(Impulse Response)，

就可以得到LTI系统对任何输入信号 $x(n)$的响应：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)\triangleq x(n)*h(n)$$

这表明：一个LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积和（The convolution sum）。

## 二. 卷积和的计算:

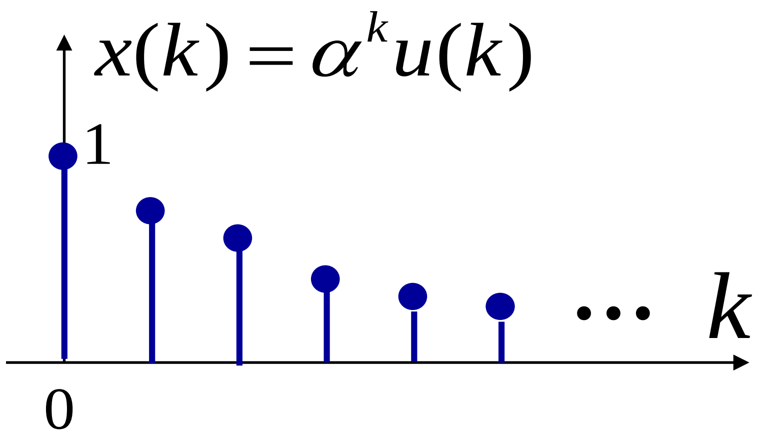
卷积和的计算有图解法、列表法、解析法（包括数值解法）。

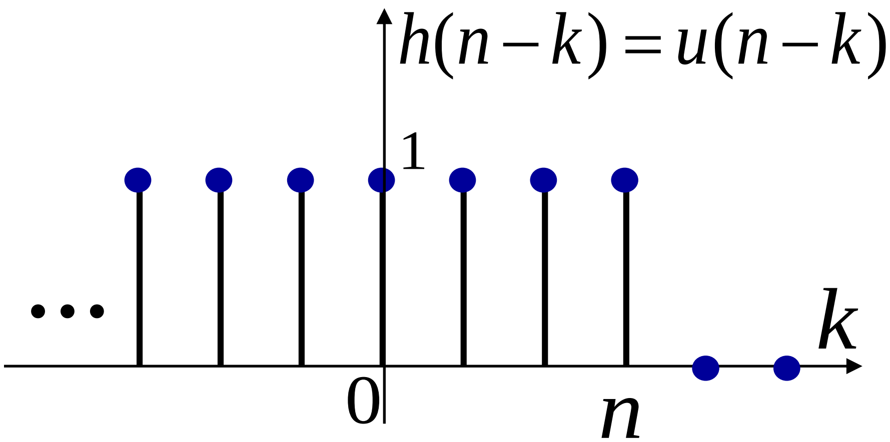
**运算过程:**

将一个信号 $x(k)$ 不动，另一个信号反转成 $h(-k)$，再随参变量 $n$ 移位。在每个 $n$ 值的情况下，将 $x(k)$ 与 $h(n-k)$ 对应点相乘，再把乘积的各点值累加，得到 $n$ 时刻的 $y(n)$。

例1. $x(n)=\alpha^n u(n) \qquad 0<\alpha<1$

$$h(n)=u(n)$$




$$y(n)=x(n)*h(n)$$

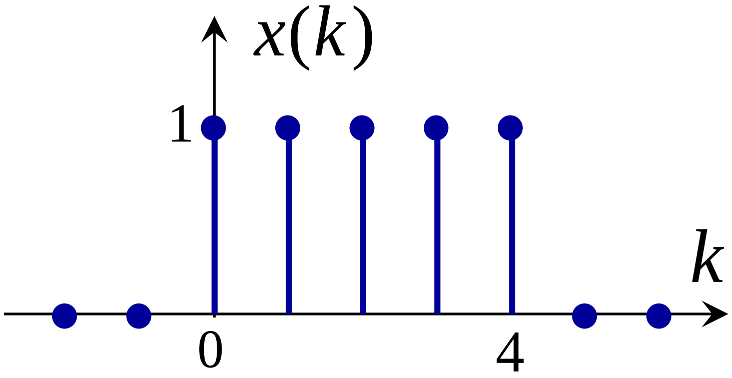
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(n-k)u(k)$$

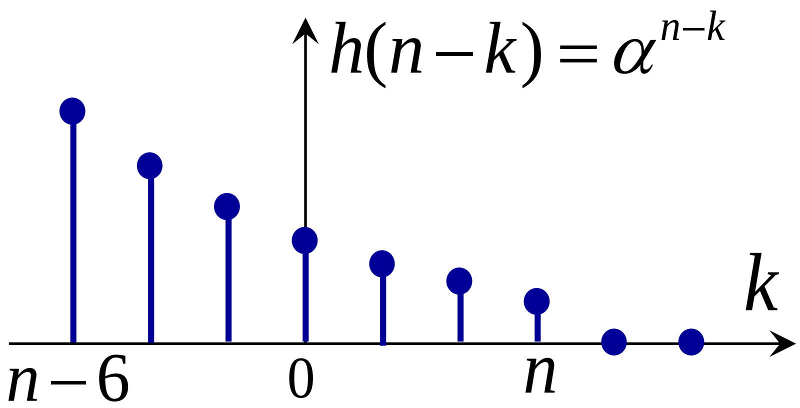
$$=\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$

例2.

$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

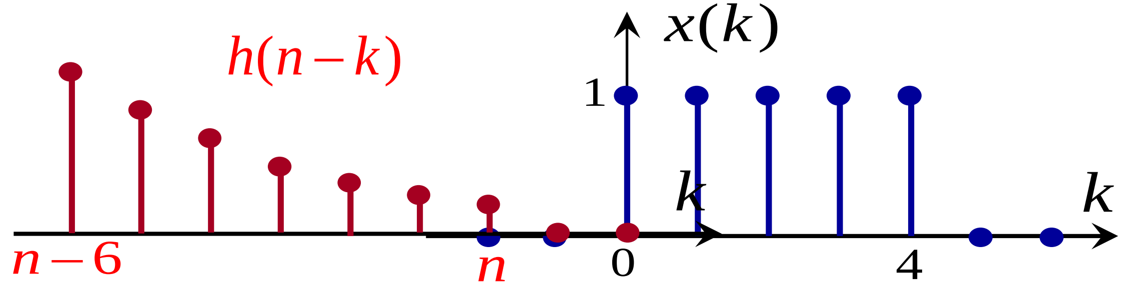
$$h(n)=\begin{cases}\alpha^{n} & \alpha>1, 0\le n\le 6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$



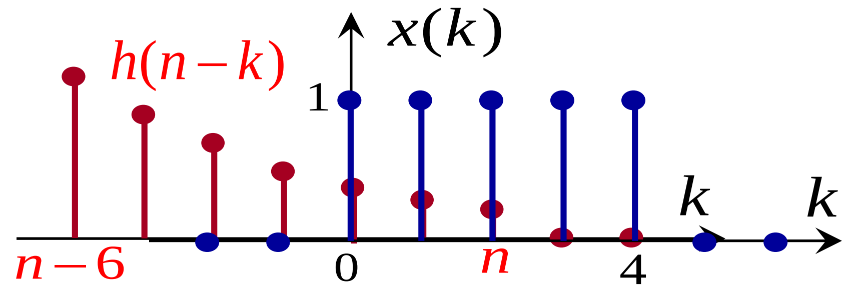



① $n<0$ 时，

$$y(n)=0$$



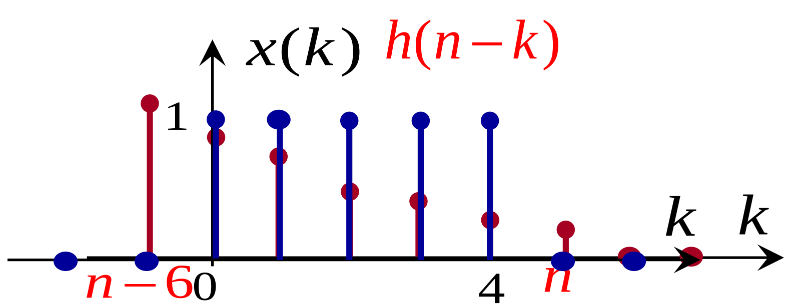

② $0\le n\le 4$时，




$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{-k}$$

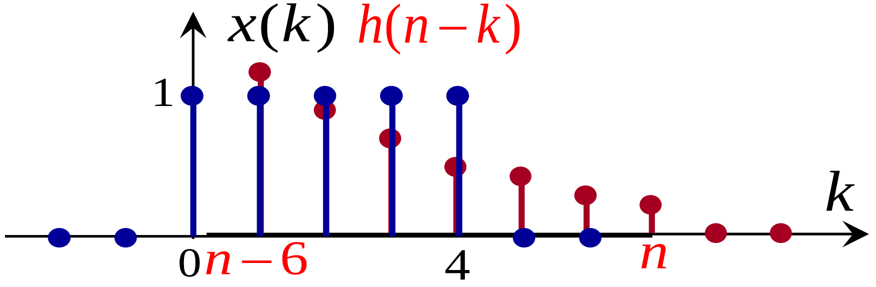
$$=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

③ $4\le n\le 6$时，



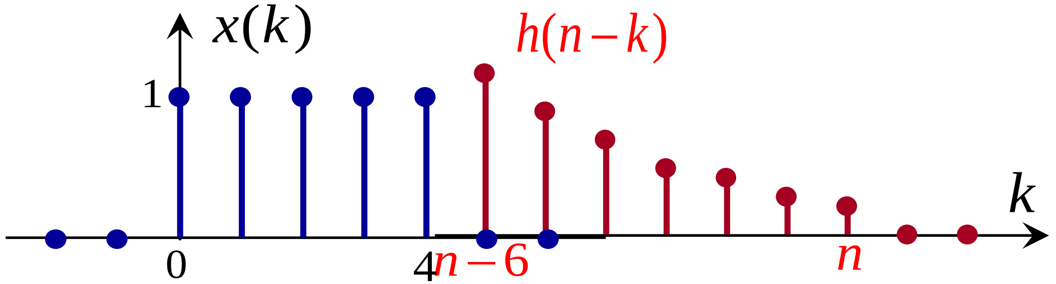
$$y(n)=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

④ $6\le n\le 10$ 时，




$$y(n)=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}$$

$$=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$




⑤ $n>10$ 时， $y(n)=0$

通过图形正确确定反转移位信号的区间表示，对于确定卷积和计算的区段及各区段求和的上、下限是很有用的。

例3. 列表法：

分析卷积和的过程，可以发现：

①$x(n)$ 与 $h(n)$ 所有的各点都要遍乘一次；

②在遍乘后，各点相加时，根据 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

参与相加的各点都具有 $x(k)$ 与 $h(n-k)$ 的宗量之和为 $n$ 的特点。

| | | $x(0)$ | $x(1)$ | $x(2)$ | $x(3)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(n)$ | $x(n)$ | 1 | 0 | 2 | 1 |
| $h(-1)$ | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| $h(0)$ | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| $h(1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $h(2)$ | 3 | 3 | 0 | 6 | 3 |
| $h(3)$ | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 |

$y(-1)$ $y(0)$ $y(1)$ $y(2)$ $y(3)$ $y(4)$ $y(5)$ $y(6)$

优点：计算非常简单。

缺点：① 只适用于两个有限长序列的卷积和；

② 一般情况下，无法写出 $y(n)$ 的封闭表达式。

## 三. 卷积和的性质:

- 卷积和满足交换律、结合律、分配律。同时，也满足时移、差分及求和特性。

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

- 从系统的观点也可以对这些性质作出相同的物理解释。这些解释也有相同的条件限制。

- 信号与$\delta(n)$ 、$u(n)$ 的卷积和也有类似的结果:

$$x(n)*\delta(n)=x(n)$$

$$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

$$x(n-n_1)*\delta(n-n_2)=x(n-n_1-n_2)$$

若：$x(n)*h(n)=y(n)$

则：$x(n-n_1)*h(n-n_2)=y(n-n_1-n_2)$

$$x(n)*\left[h(n)-h(n-n_0)\right]=y(n)-y(n-n_0)$$

$$x(n)*\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}y(k)$$

$$x(n)*u(n)=\sum_{k=0}^{n}x(k)$$

## 2.3连续时间LTI系统的时域分析：
## ( Continuous - time LTI System Analysis in Time-Domain )

### 一．卷积积分：（The convolution integral）

**卷积法求解LTI系统响应$y(t)$的思路**

1）将任意信号分解为单位冲激信号的线性组合

2）求出单位冲激信号作用在系统上的响应

—— 冲激响应

3）利用线性时不变系统的特性，即可求出任意信号$f(t)$激励下系统的响应$y(t)$。

# 卷积法求解系统响应$y(t)$推导

$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$

由时不变特性　$\delta(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau)$

由均匀特性　$f(\tau)\delta(t-\tau) \Rightarrow f(\tau)h(t-\tau)$

由积分特性

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

于是系统对任意输入 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \triangleq x(t)*h(t)$$

这表明，LTI系统可以完全由它的单位冲激响应$h(t)$来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积积分（The convolution integral）。

二．卷积积分的计算:

卷积积分的计算有图解法、解析法和数值解法。

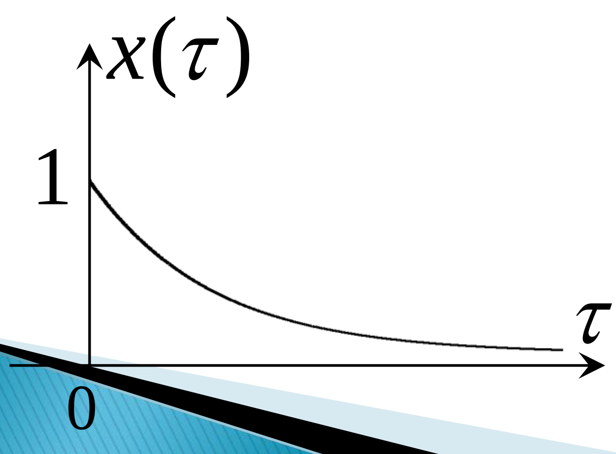
运算过程的实质：参与卷积的两个信号中，一个不动，另一个反转后随参变量 $t$ 移动。

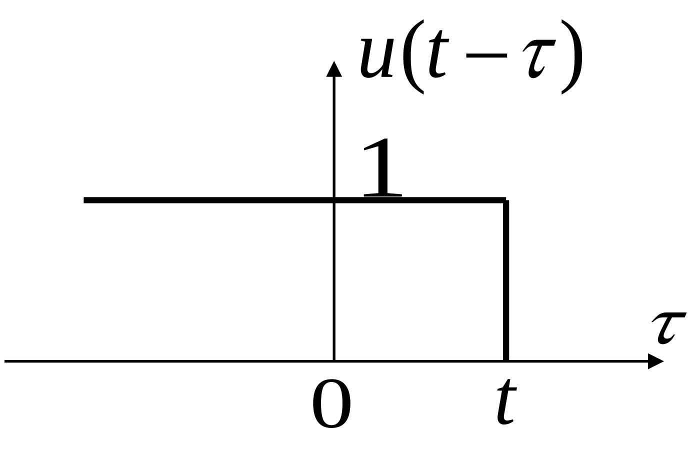
- 对每一个 $t$ 的值，将 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 对应相乘，再计算相乘后曲线所包围的面积。

- 通过图形帮助确定积分区间和积分上下限往往是很有用的。

1. 解析法：

例1. $x(t)=e^{-at}u(t), a>0; \quad h(t)=u(t)$



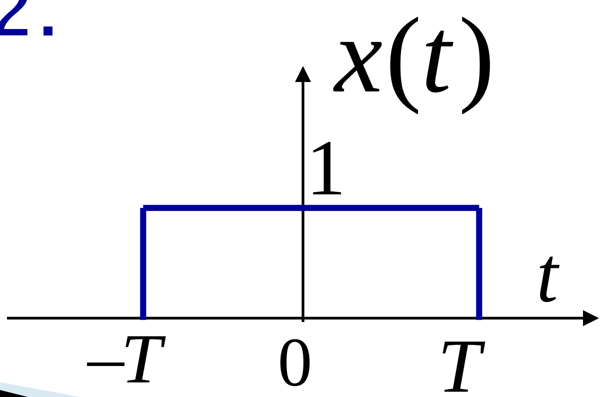
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

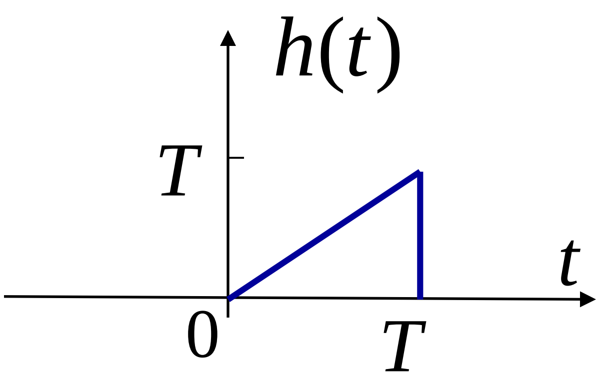
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

2．图解法：

例2.



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

1. $t < -T, y(t) = 0$

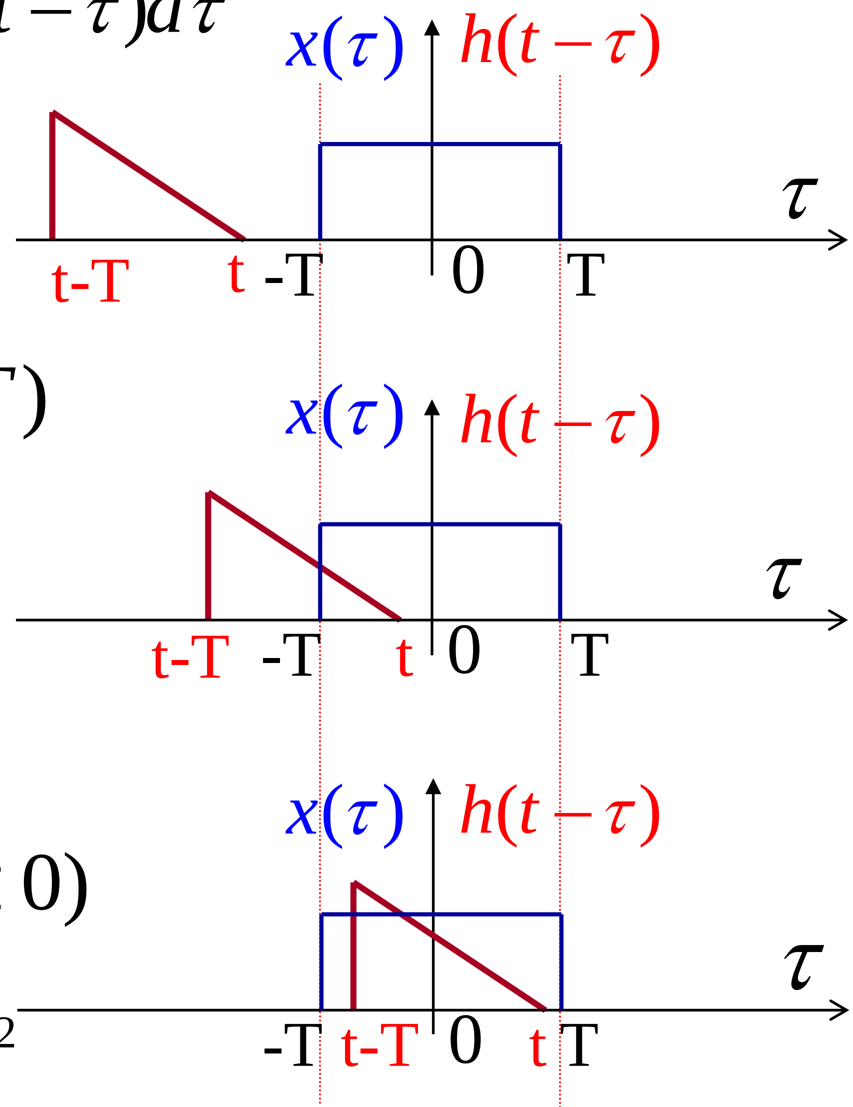
2. $-T < t < 0, \quad (t - T < -T)$

$$y(t) = \int_{-T}^{t} (t-\tau)d\tau$$

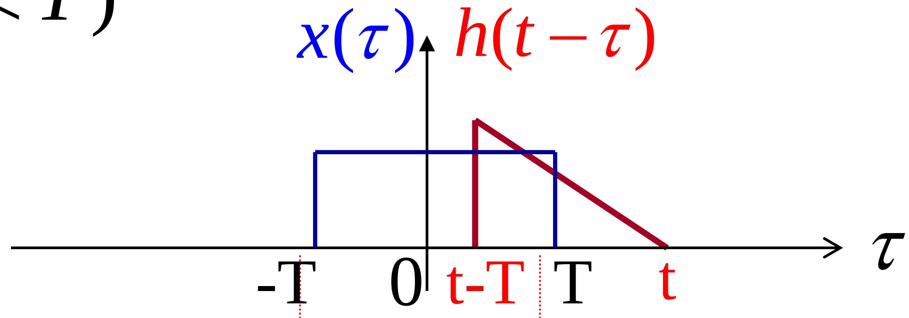
$$= \frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{1}{2}T^2$$

3. $0 < t < T, (-T < t - T < 0)$

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} (t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}T^2$$



④ $T < t < 2T, \ (0 < t - T < T)$

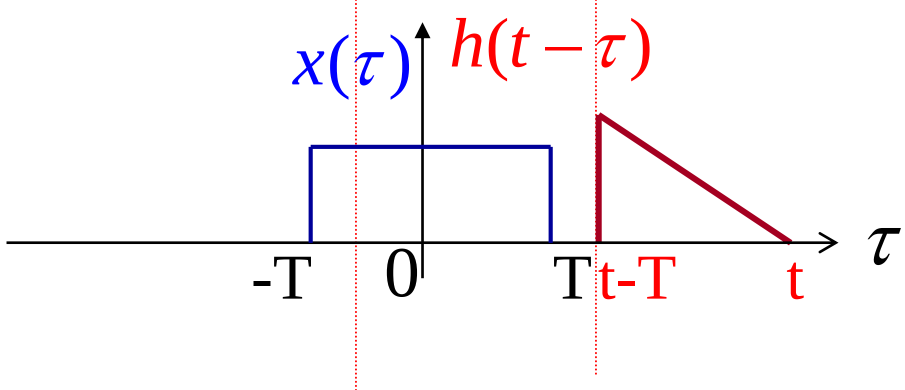


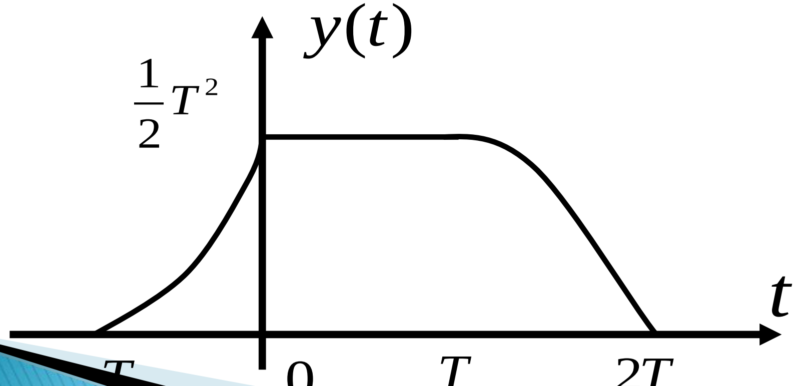

$$y(t) = \int_{t-T}^{T} (t-\tau)\,d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + Tt$$

⑤ $t > 2T, (t - T > T)$

$$y(t) = 0$$



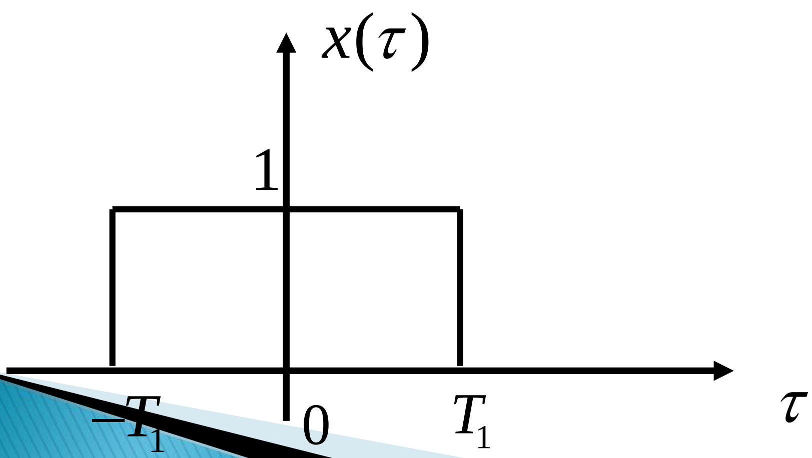



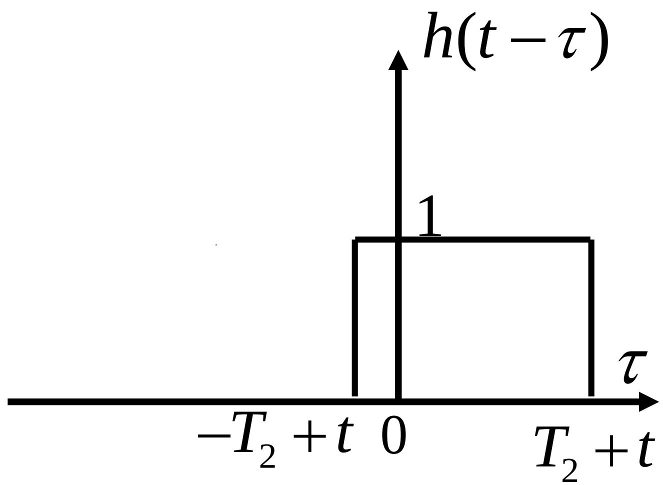
例3：

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad h(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

且　$T_1>T_2$

解：　$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



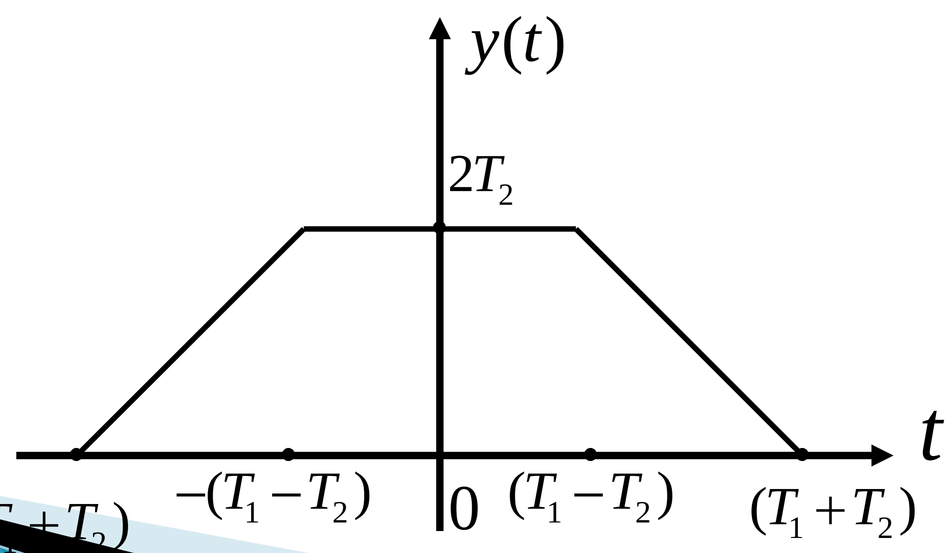
① 当 $t<-(T_1+T_2)$时，　$y(t)=0$

② 当 $-(T_1+T_2)<t<-(T_1-T_2)$时，$y(t)=\int_{-T_1}^{T_2+t}d\tau=t+T_1+T_2$

③ 当 $-(T_1-T_2)<t<(T_1-T_2)$时，　$y(t)=\int_{-T_2+t}^{T_2+t}d\tau=2T_2$

④ 当 $T_1-T_2<t<T_1+T_2$时，　$y(t)=\int_{t-T_2}^{T_1}d\tau=T_1+T_2-t$

⑤ 当 $t>T_1+T_2$ 时，　$y(t)=0$



- 与$\delta(t)$ 和$u(t)$ 的卷积：

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$$

$$x(t)*u(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$$

若： $x(t)*h(t)=y(t)$

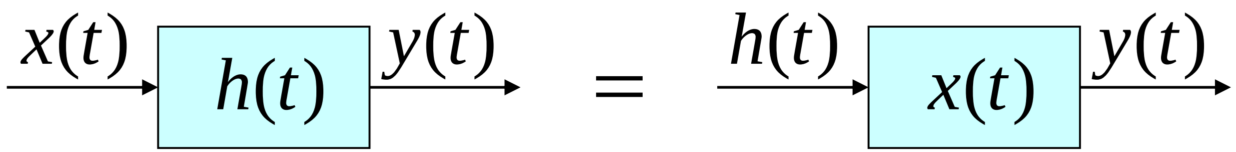
则： $x(t-t_1)*h(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

## 三. 卷积积分的性质:

### 1. 交换律:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

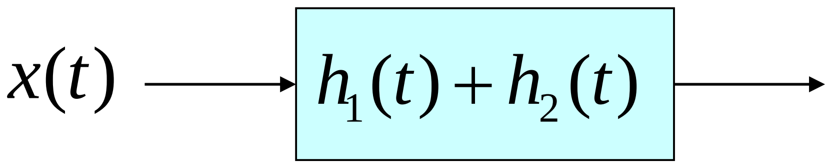
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=h(t)*x(t)$$




表明: 一个单位冲激响应是 $h(t)$ 的LTI系统对输入信号 $x(t)$ 所产生的响应，与另一个单位冲激响应是 $x(t)$ 的LTI系统对输入信号 $h(t)$ 所产生的响应相同。

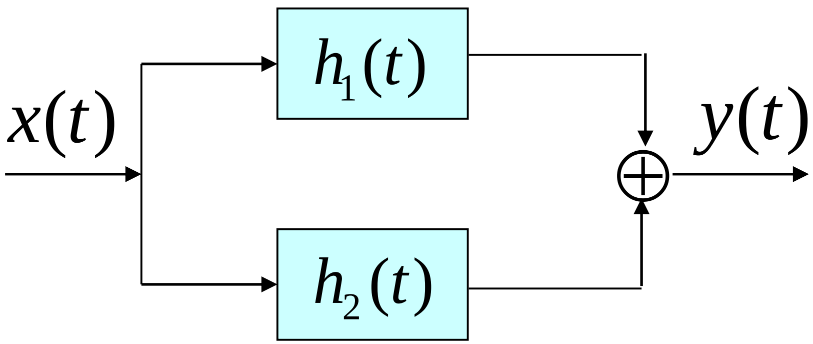
## 2．分配律：

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



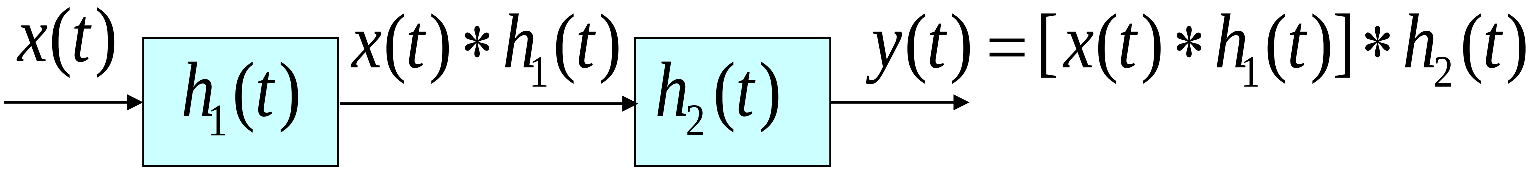

$$y(t)=x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$

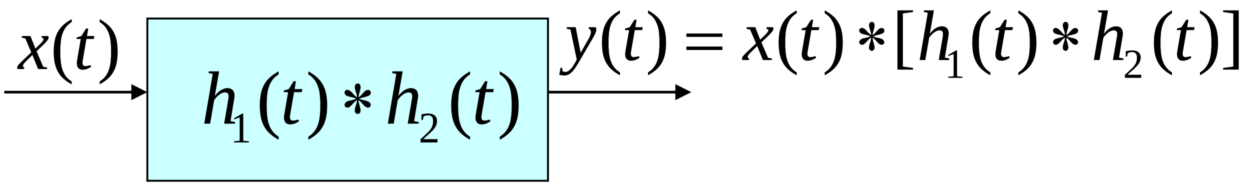
**表明：** 两个LTI系统并联，其总的单位冲激响应等于各个子系统的单位冲激响应之和。



## 3．结合律:

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

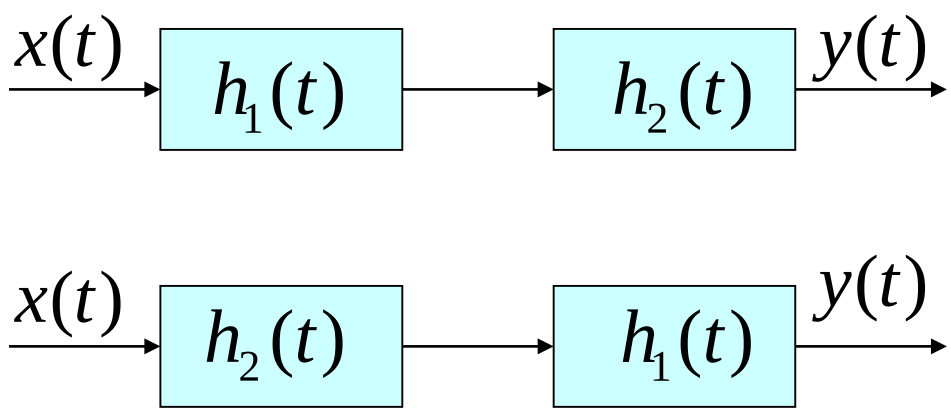



**表明:**两个LTI系统级联时，系统总的单位冲激响应等于各个子系统单位冲激响应的卷积。

由于卷积满足交换律，因此，系统级联的先后次序可以调换。

$$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*h_2(t)*h_1(t)$$

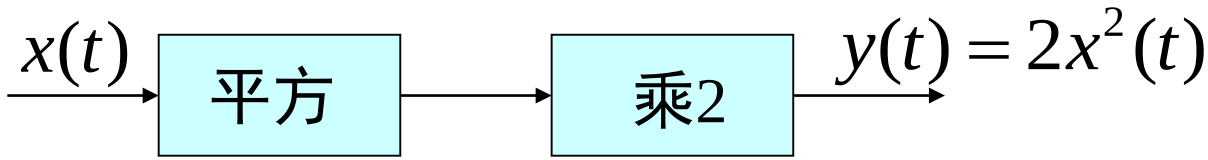



产生以上结论的前提条件：

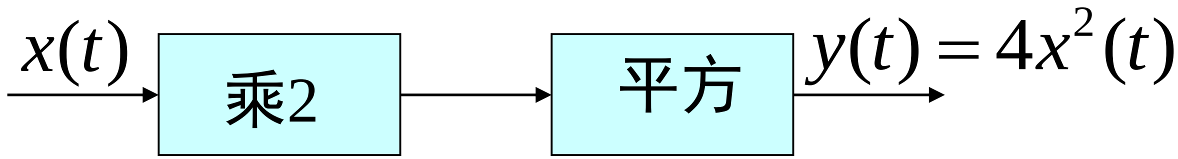
① 系统必须是LTI系统；

② 所有涉及到的卷积运算必须收敛。

如：



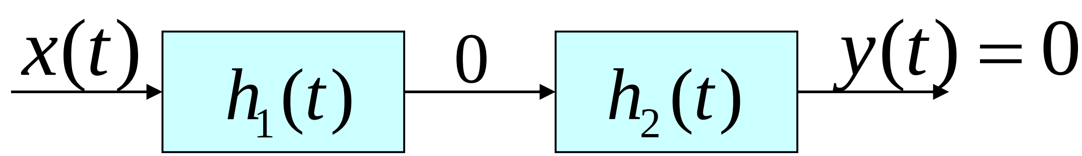

若交换级联次序，即：




显然是不等价的。

又如：若 $h_1(t)=\delta(t)-\delta(t-1), h_2(t)=u(t)$ 系统都是LTI系统。

当 $x(t)=1$ 时，




由于 $x(t)*u(t)$ 不收敛，因而也不能交换级联次序。

## 4．卷积还有如下性质：

卷积积分满足微分、积分及时移特性：

① 若 $x(t)*h(t)=y(t)$，则

$$x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)=y'(t)$$

$$[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau]*h(t)=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau]=[\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau]$$

② 若 $x(t)*h(t)=y(t)$，则

$$x(t-t_0)*h(t)=x(t)*h(t-t_0)=y(t-t_0)$$

## 卷积的微分性质的证明

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)*h(t)\right]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\frac{d}{dt}h(t-\tau)d\tau$$

$$=x(t)*\frac{d}{dt}h(t)$$

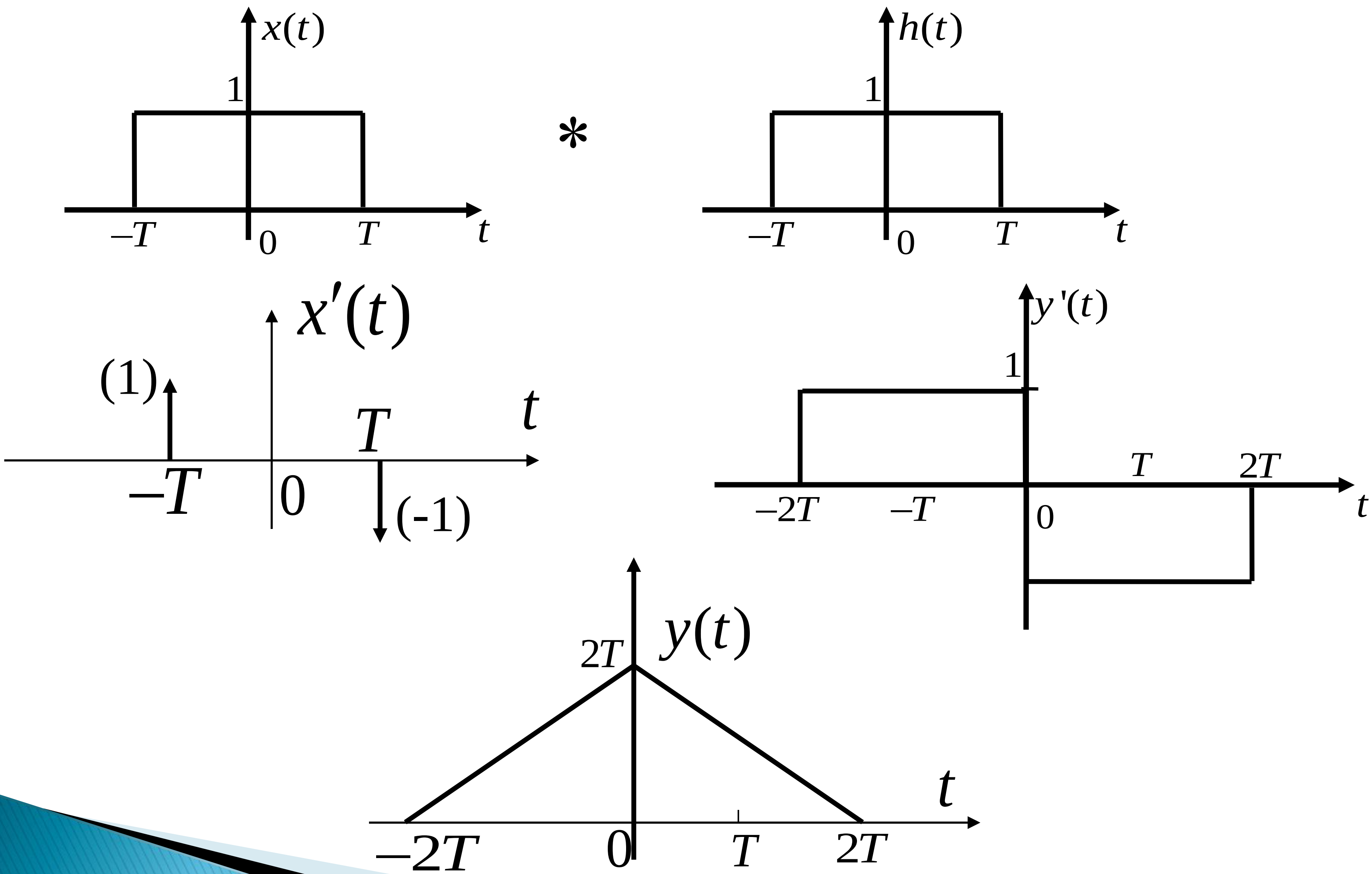
# 卷积的积分性质的证明

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda) * h(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\lambda - \tau) d\tau \right] d\lambda$$

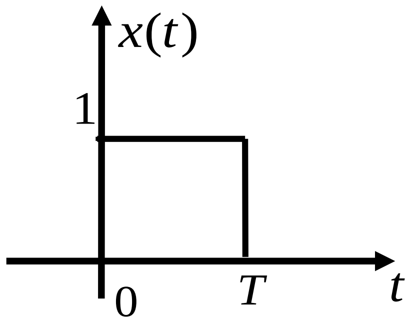
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{t} h(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau$$

$$= x(t) * \int_{-\infty}^{t} h(\lambda) d\lambda$$

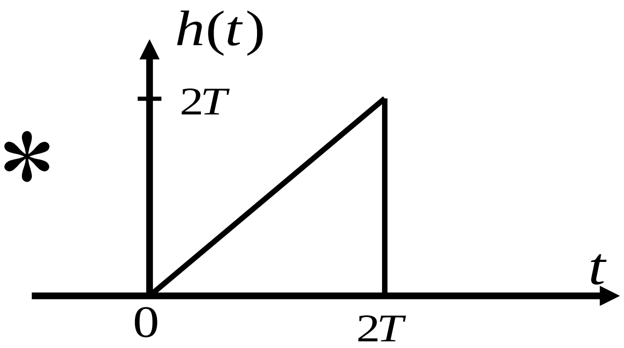
恰当地利用卷积的性质可以简化卷积的计算。

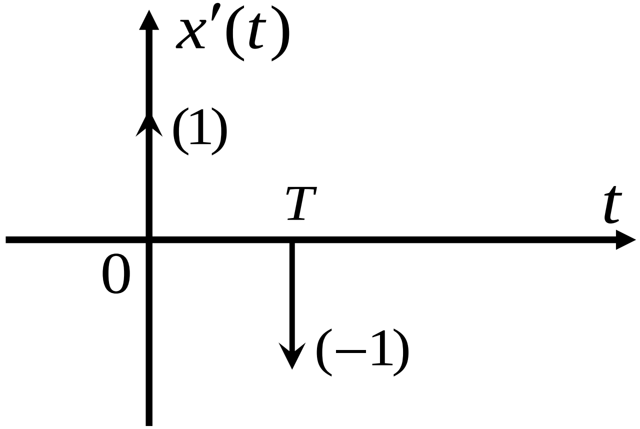


例如:




*



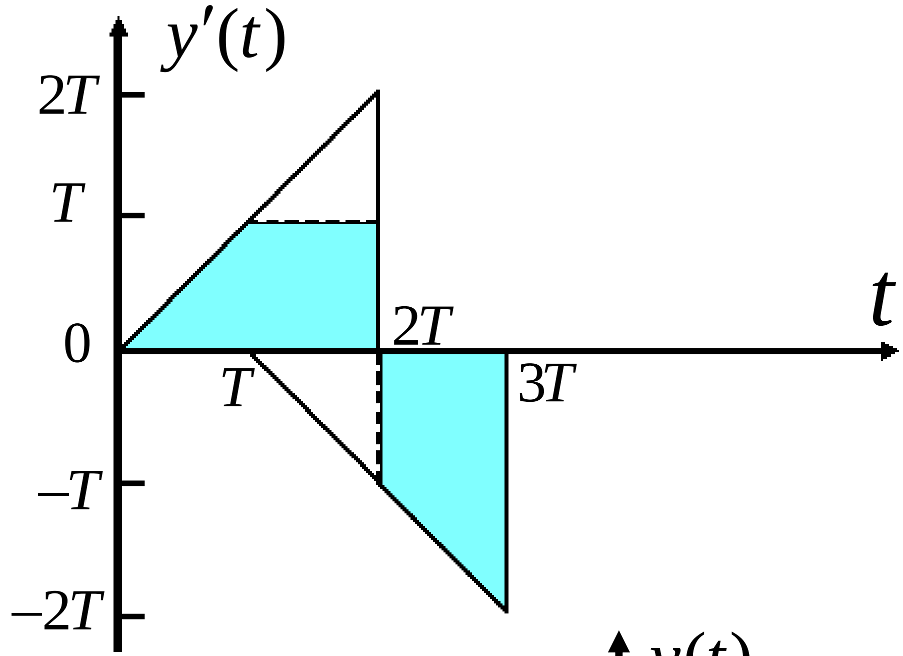




将$x(t)$微分一次有:

$$x'(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$$

根据微分特性有:

$$y'(t)=x'(t)*h(t)=h(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$
$$=h(t)-h(t-T)$$




利用积分特性即可得：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$$