

信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

本章内容：

- 信号的时域分解——用 $\delta(n)$ 表示离散时间信号；用 $\delta(t)$ 表示连续时间信号；
- LTI系统的时域分析——卷积运算；
- LTI系统的微分方程及差分方程表示；
- LTI系统的框图结构表示。

2.4 LTI系统的性质:

(The Properties of LTI Systems)

LTI系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征, 因而其特性 (记忆性、可逆性、因果性、稳定性) 都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

1. 记忆性:

根据 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, 如果系统是无记忆的, 则在任何时刻 n , $y(n)$ 都只能和 n 时刻的输入有关, 即和式中只能有 $k = n$ 时的一项为非零, 因此必须有: $h(n-k) = 0, \quad k \neq n$

即: $h(n) = 0, \quad n \neq 0$

• 无记忆LTI系统的单位脉冲响应为:

$$h(n) = k\delta(n)$$

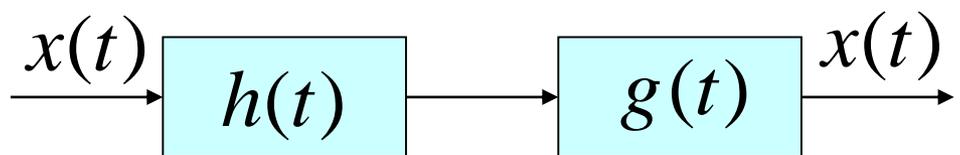
$$h(t) = k\delta(t)$$

此时, $x(n) * h(n) = kx(n)$, 当 $k = 1$ 时是恒等系统。
 $x(t) * h(t) = kx(t)$

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求, 则系统是记忆的。

2. 可逆性:

如果LTI系统是可逆的, 一定存在一个逆系统, 且该逆系统也是LTI系统, 它们级联起来构成一个恒等系统。



因此有： $h(t) * g(t) = \delta(t)$ $h(n) * g(n) = \delta(n)$

例如：**延时器**是可逆的LTI系统，其 $h(t) = \delta(t - t_0)$ ，
其逆系统是 $g(t) = \delta(t + t_0)$ ，显然有：

$$h(t) * g(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

累加器是可逆的LTI系统，其 $h(n) = u(n)$ ，其
逆系统是 $g(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$ ，显然也有：

$$\begin{aligned} h(n) * g(n) &= u(n) * [\delta(n) - \delta(n - 1)] \\ &= u(n) - u(n - 1) = \delta(n) \end{aligned}$$

3. 因果性:

由 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, 当LTI系统是因果系统时,

在任何时刻 n , $y(n)$ 都只能取决于 n 时刻及其以前的输入, 和式中所有 $k > n$ 的项都必须为零。即:

$$h(n-k) = 0, \quad k > n$$

或
$$h(n) = 0, n < 0$$

对连续时间系统, 则有: $h(t) = 0, t < 0;$

• LTI系统具有因果性的充分必要条件是:

$$h(n) = 0, n < 0; \quad h(t) = 0, t < 0;$$

4. 稳定性:

根据稳定性的定义, 由 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$,

若 $x(n)$ 有界, 则 $|x(n-k)| \leq A$, 若系统稳定, 则 $y(n)$

必有界, 由
$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right|$$
$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

可知, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

对连续时间系统, 相应地有 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

这是LTI系统稳定的充分必要条件。

5. LTI系统的单位阶跃响应:

在工程实际中,也常用**单位阶跃响应**来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或 $u(n)$ 所产生的响应。即:

$$s(t) = u(t) * h(t)$$

$$s(n) = u(n) * h(n)$$

单位阶跃响应与单位冲激响应的关系:

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \quad h(n) = s(n) - s(n-1)$$

单位阶跃响应可以通过实验测得。

2.5 LTI系统的微分和差分方程描述：

(The LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

一. 连续时间LTI系统的微分方程描述：

可以用线性常系数微分方程（ Linear Constant - Coefficient Differential Equation ）描述相当广泛的一类连续时间LTI系统。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程。

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad a_k, b_k \text{ 均为常数}$$

求解该微分方程，通常是求出一个特解 $y_p(t)$ 和通解 $y_h(t)$ ，于是 $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

特解 $y_p(t)$ 是与输入 $x(t)$ 同类型的函数；

通解 $y_h(t)$ 是齐次方程 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$ 的解。

欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0 \quad , \quad \text{求出其特征根。}$$

在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k t} \quad , \quad \text{其中 } c_k \text{ 是待定系数。}$$

通解 $y_h(t)$ 是齐次方程 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$ 的解。

假设上式的一个解为：

$$y_h(t) = ce^{\lambda t}$$

那么

$$\frac{dy_h(t)}{dt} = c\lambda e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2 y_h(t)}{dt^2} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^N y_h(t)}{dt^N} = c\lambda^N e^{\lambda t}$$

将上面的结果代入齐次方程，得到：

$$c(a_N\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda t} = 0$$

对于上面方程的的一个解为

$$a_N\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0 = 0$$

如果用一个多项式 $Q(\lambda)$ 表示上式

$$Q(\lambda) = 0$$

当 $Q(\lambda)$ 表示为分解因式的形式，则

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

则齐次方程的通解为：

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t}$$

其中 c_1, c_2, \cdots, c_N 是任意常数，有附加条件所决定。

要确定系数 C_k ，需要有一组条件，称为**附加条件**。

仅从确定待定系数 C_k 的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

当微分方程描述的系统是线性系统时，必须满足系统**零输入—零输出**的特性。

系统在没有输入即 $x(t) = 0$ 时，微分方程就蜕变成齐次方程。因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，即所有的 C_k 都为零。这就要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零，即**具有零附加条件**，LCCDE才能描述线性系统。

当这组零附加条件在信号加入的时刻给出时，LCCDE描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

结论：LCCDE连同一组全部为零的初始条件可以描述一个LTI因果系统。

这组条件是： $y(0) = 0, y'(0) = 0, \dots, y^{(N-1)}(0) = 0$

如果一个因果的LTI系统由LCCDE描述（方程具有零初始条件），就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。

二. 离散时间LTI系统的差分方程描述:

- 一般的线性常系数差分方程可表示为:

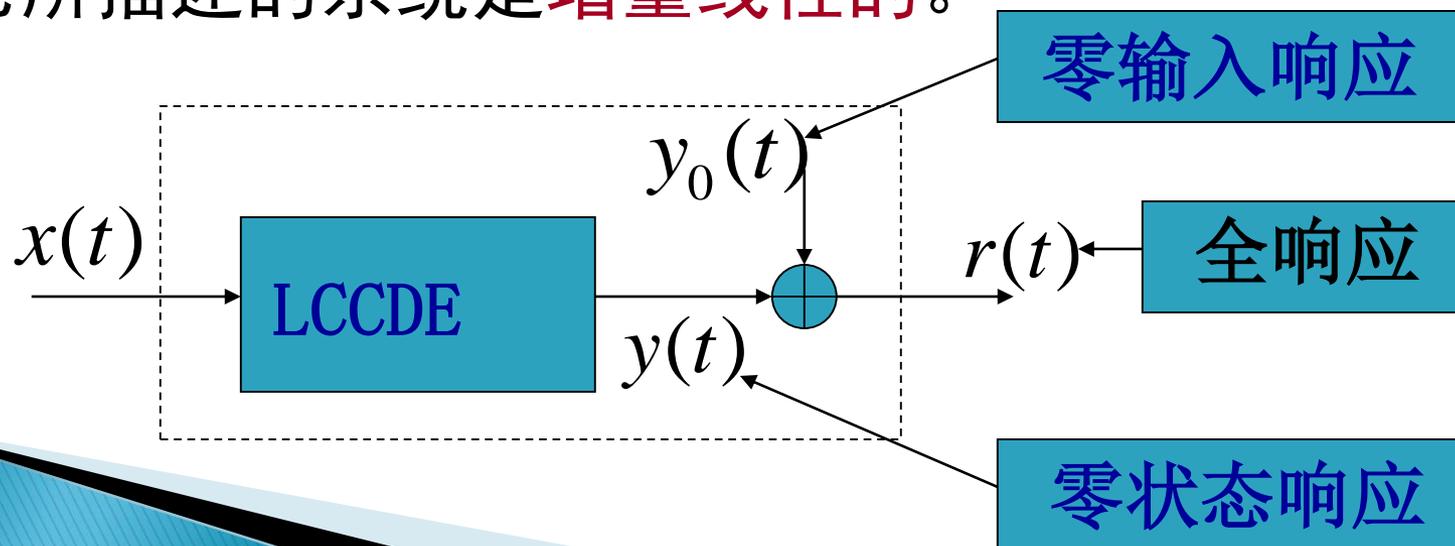
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解 $y_p(n)$ 和通解即齐次解 $y_h(n)$ 来进行，其过程与解微分方程一样。

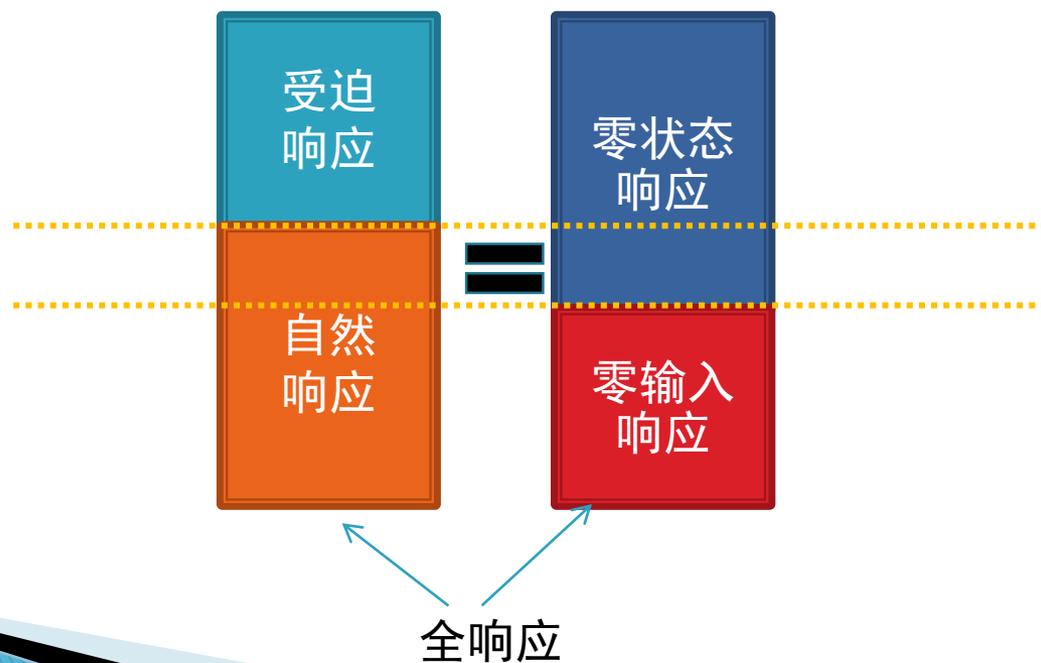
- 要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当线性常系数差分方程具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

- 无论微分方程还是差分方程，由于其特解都与输入信号具有相同的函数形式，也就是说它是完全由输入决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为**受迫响应**或**强迫响应**。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的**自然响应**。

如果LCCDE具有一组非零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是**增量线性的**。



- 增量线性系统的响应有零状态响应和零输入响应。
零输入响应与输入信号无关，因此属于自然响应。
- 零状态响应既与输入信号有关，也与系统特性有关，因而它包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。



- 线性常系数差分方程还可以采用迭代的方法求解，将方程改写为：

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

可以看出，要求出 $y(0)$ ，不仅要知道所有的 $x(n)$ ，还要知道 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ ，这就是一组初始条件，由此可以得出 $y(0)$ 。进而，又可以通过 $y(0), y(-1), \dots, y(-N+1)$ ，求得 $y(1) \dots$ ，

依此类推可求出所有 $n \geq 0$ 时的解。

- 若将方程改写为：

$$y(n-N) = \frac{1}{a_N} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k) \right]$$

则可由 $y(1), y(2), \dots, y(N)$ 求得 $y(0)$ ，进而由 $y(0)$ 和 $y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ 求得 $y(-1) \dots$ ，依此可推出 $n \leq 0$ 时的解。

- 由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为 **递归方程** (recursive equation)。

例. 考虑如下差分方程

$$y(n) - \frac{1}{3} y(n-1) = x(n)$$

上式可以表示成

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3} y(n-1)$$

可以看出，为了求出当前的输出值，需要前一个输出值

因此，要开始进行递归就要求一个初始条件。

例如，假设强加给初始松弛条件，并且考虑输入：

$$x(n) = \delta(n)$$

这时，因为 $n \leq -1, x(n) = 0$ ，初始松弛条件意味着对于 $n \leq -1, y(n) = 0$ ，所以就有一个初始条件为 $y(-1) = 0$ 。

由这个初始条件出发，对 $n \geq 0$ 的各个 $y(n)$ 值如下：

$$y(0) = x(0) + \frac{1}{3} y(-1) = 1$$

$$y(1) = x(1) + \frac{1}{3} y(0) = \frac{1}{3}$$

$$y(2) = x(2) + \frac{1}{3} y(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

⋮

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3} y(n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

因为初始松弛条件，上述差分方程表征的系统就是LTI的
它的输入输出特性完全由它的单位脉冲响应表征

该系统的单位脉冲响应就是

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

• FIR与IIR系统:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

若 $a_k = 0, k \neq 0$, 则方程变为:

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad \text{此时方程无须递推。}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad h(n) = b_k / a_0, \quad 0 \leq k \leq M$$

显然, $h(n)$ 为有限长序列, 此时方程描述的系统称为 **FIR (Finite Impulse Response) 系统**。

若 $k \neq 0$ 时, a_k 不全为零, 则方程为递推型, $h(n)$ 为无限长, 称为 **IIR (Infinite Impulse Response) 系统**。

2.6 LTI系统的方框图表示:

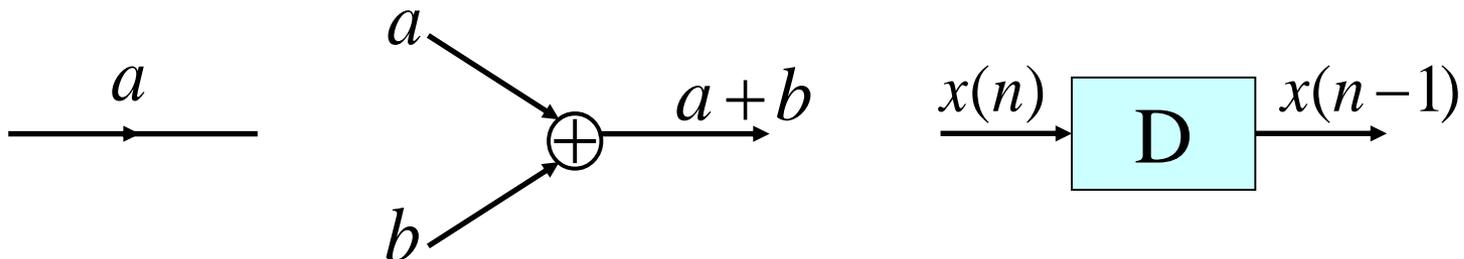
系统分析的一个重要目的是为了设计并实现满足要求的系统，其实质就是完成系统模型所包括的各种运算。利用基本运算单元来表示系统模型的运算功能，就形成了系统的模拟框图。它有助于系统的分析、模拟仿真、设计与实现。

1 离散时间LTI系统的方框图表示:

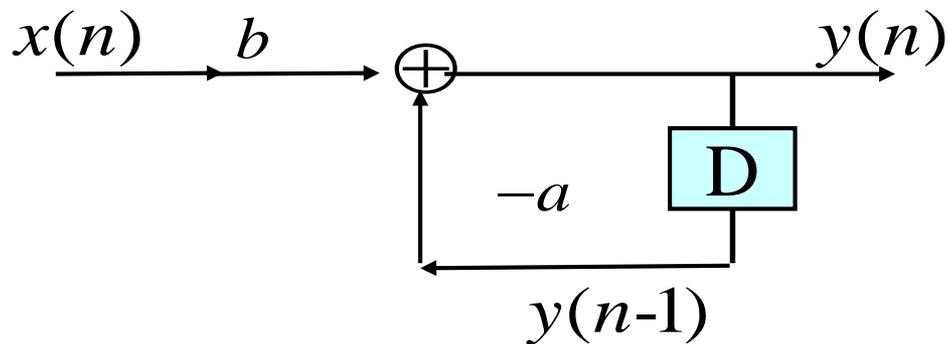
由
$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$
 可看出:

方程中包括三种基本运算：**乘系数、相加、移位。**

这些运算可用以下符号表示：



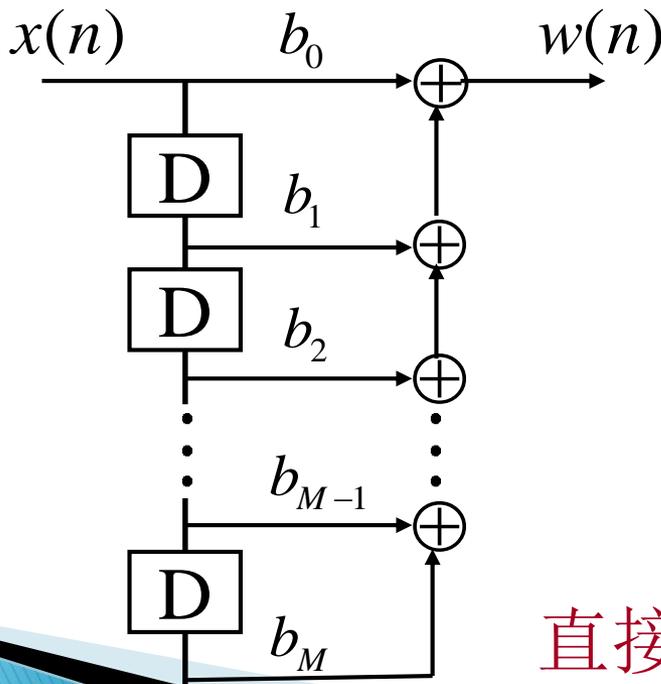
$$y(n) + ay(n-1) = bx(n)$$



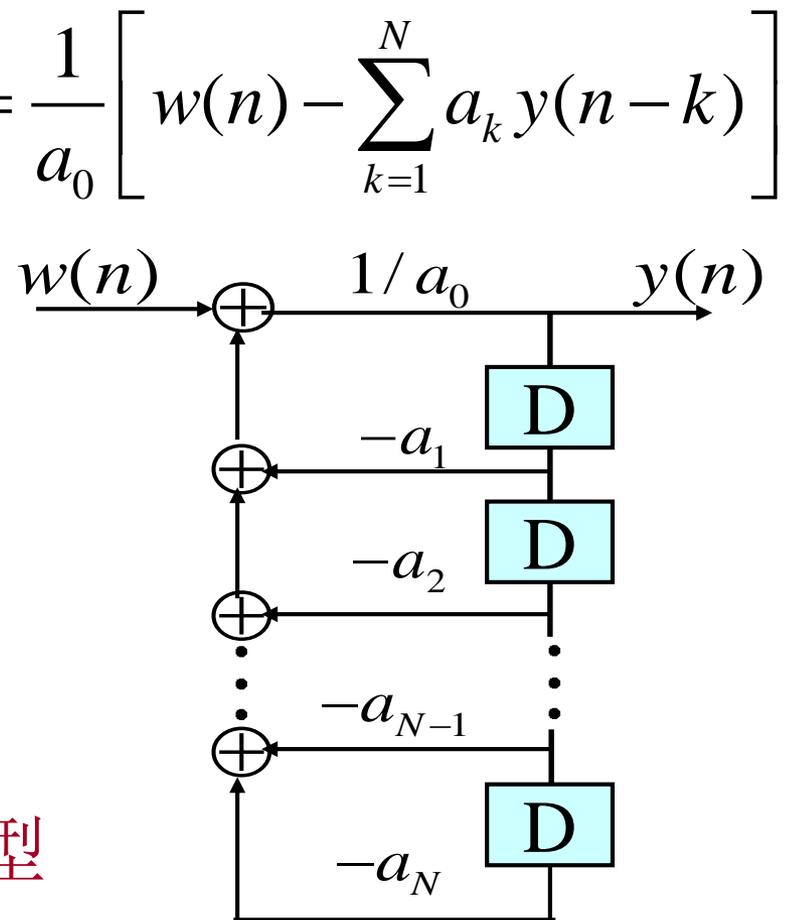
$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

令 $w(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$, 则 $y(n) = \frac{1}{a_0} \left[w(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$

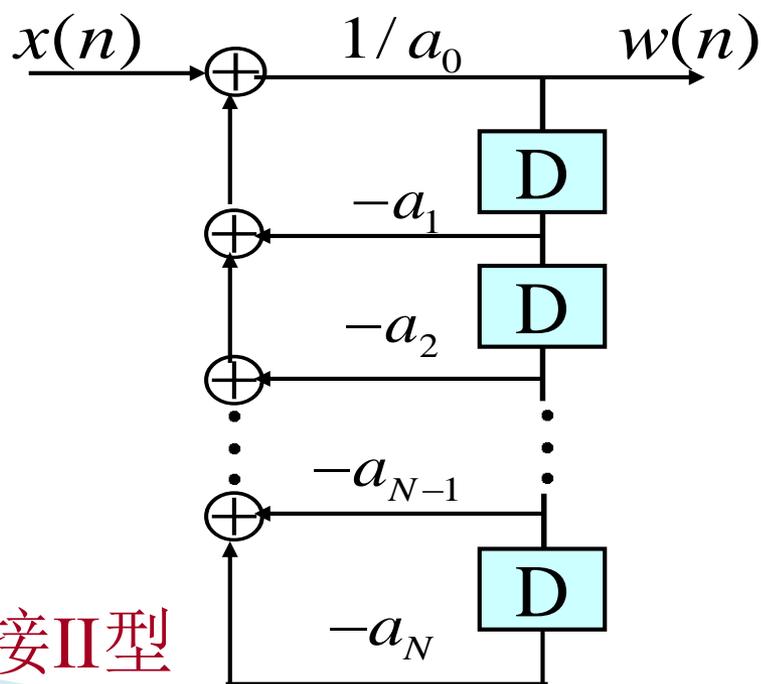
可得图:



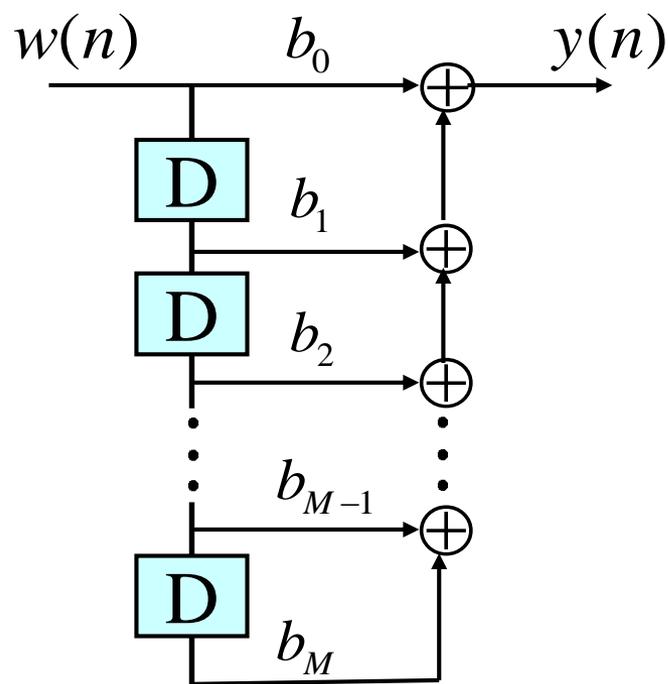
直接I型

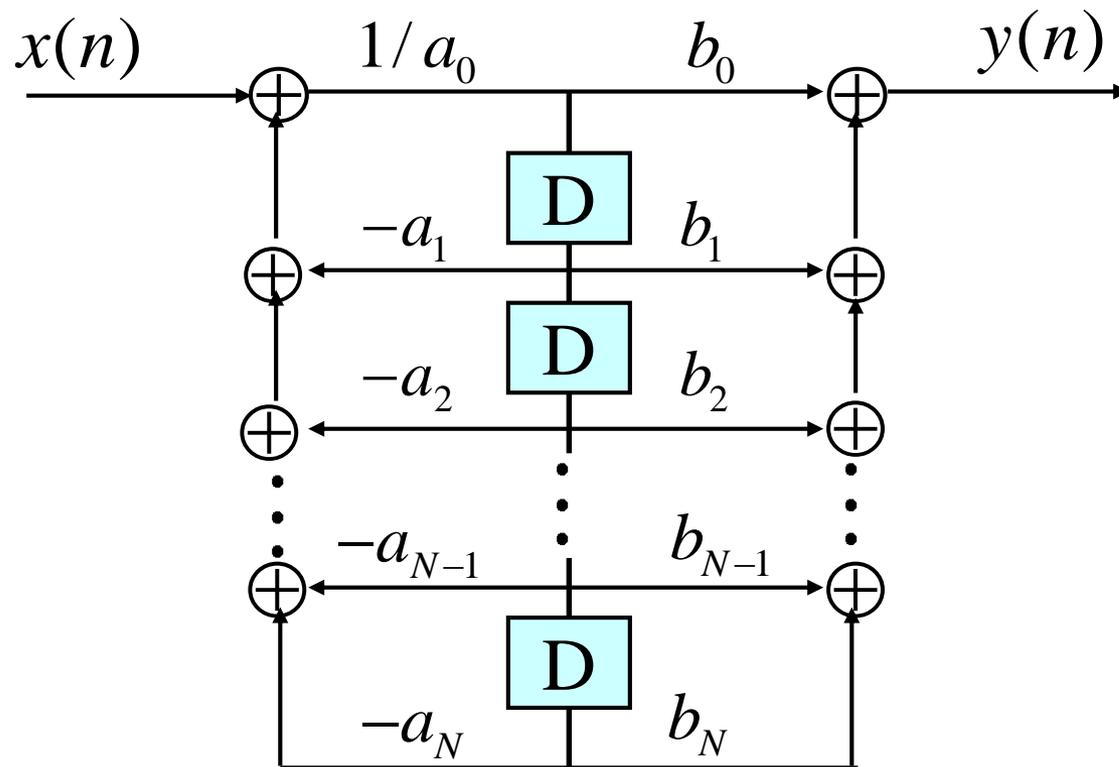


将其级联起来，就成为LCCDE 描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。显然，作为两个级联的系统，可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，得到：



直接II型





直接II型

2 连续时间LTI系统的方框图表示:

由 $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 看出它也包括三种基本运算：**微分、相加、乘系数**。

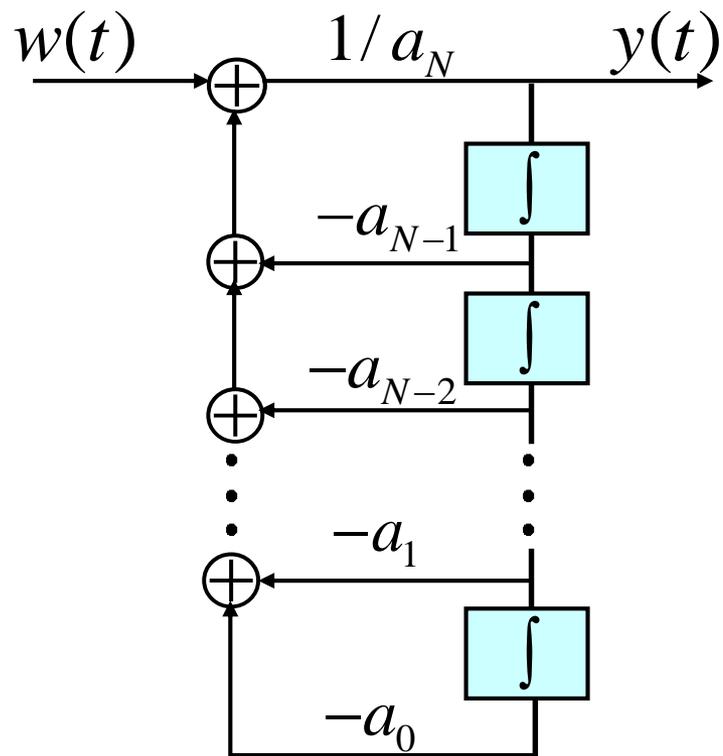
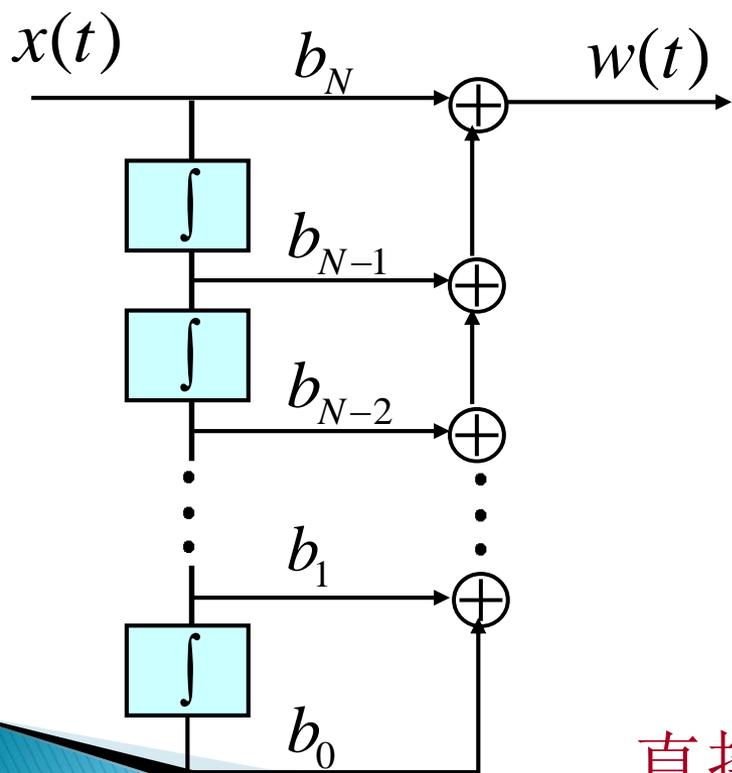
但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，工程上通常使用**积分器**而不用微分器。

将方程两边同时积分N次，即可得到一个积分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)$$

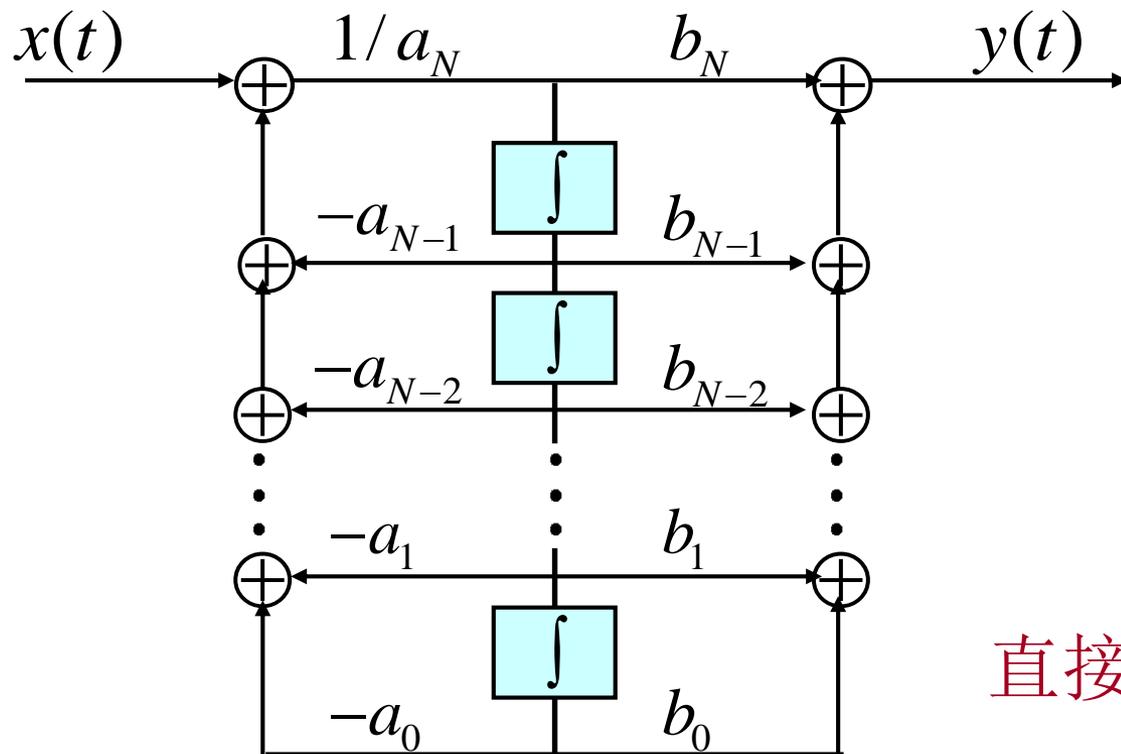
对此积分方程完全按照前面差分方程的办法即可有：

$$y(t) = \frac{1}{a_N} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)}_{w(t)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) \right]$$



直接I型

通过交换级联次序，合并积分器可得**直接II型**：



直接II型

不同的结构会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如在系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

小结 (Summary)

1. 信号的时域分解:
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2. LTI系统的时域分析——卷积积分与卷积和;

3. LTI系统的描述方法:

① 用 $h(t)$ 、 $h(n)$ 或 $s(t)$ 、 $s(n)$ 描述LTI系统;

② 用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统;

③ 用系统方框图描述系统 (等同于LCCDE 描述)。

4. LTI系统的特性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系:

- ① 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$ 、 $h(n)$ 的关系;
- ② 系统级联、并联时, $h(t)$ 、 $h(n)$ 与各子系统之间的关系。

作业：

2.2 (a)

2.3

2.4 (c)

2.5 (b)

2.6 (b)

2.8

2.9

2.12(a)、(f)

2.16(b)

2.17(a)