

# 信号与系统

王洪广

wanghg@mail.xjtu.edu.cn

## 本章主要内容：

- 连续时间傅里叶级数及其性质
- 连续时间傅里叶变换及其性质
- 周期信号和非周期信号的频谱分析
- 连续时间LTI系统的频域分析



## 傅里叶两个重要贡献——

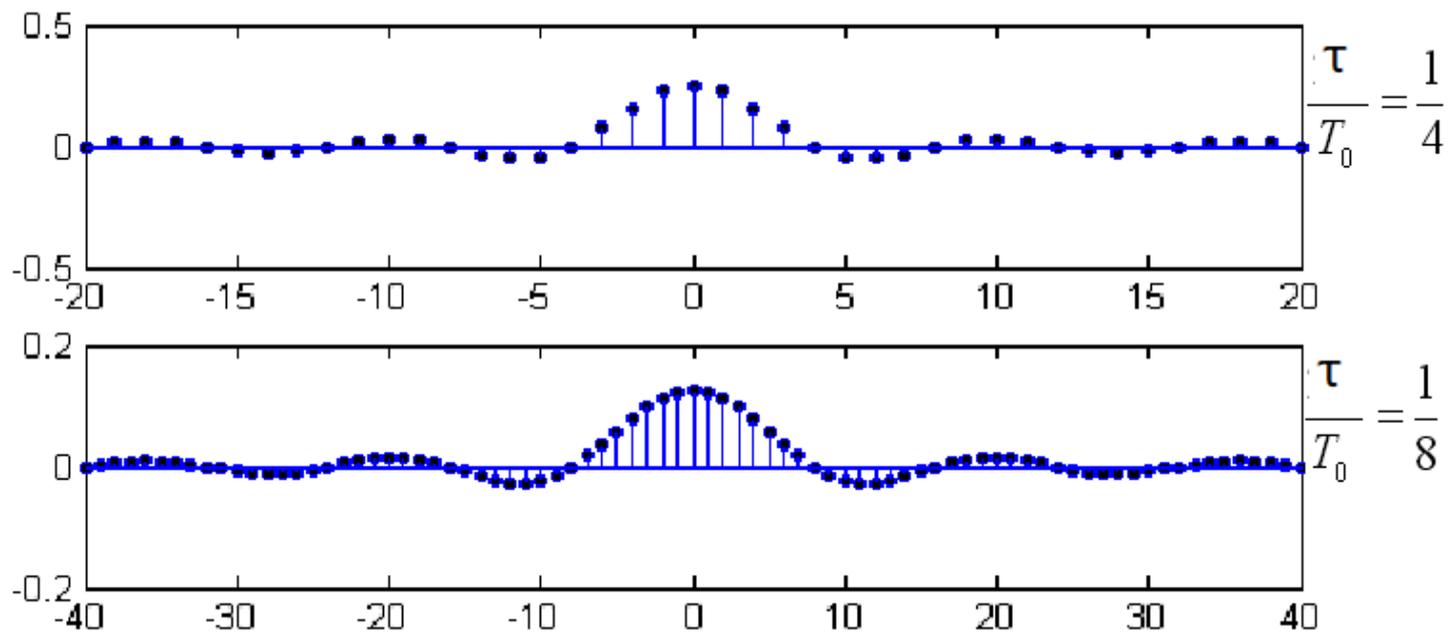
- ❖ “周期函数都可以表示为成谐波关系的正弦函数的加权和” ——傅里叶的第一个主要论点。
- ❖ “非周期函数都可以用正弦函数的加权积分表示” ——傅里叶的第二个主要论点。

我们把非周期信号看成是周期信号在周期趋于**无穷大**时的极限，从而考查连续时间傅里叶级数在 $T$ 趋于无穷时的变化，就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。

周期性矩形脉冲信号的傅里叶级数系数为：

$$A_k = \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin k\Omega_0\tau / 2}{k\Omega_0\tau / 2} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

当  $T_0$  增大时，频谱的幅度随  $T_0$  的增大而下降；谱线间隔随  $T_0$  增大而减小；频谱的包络不变。



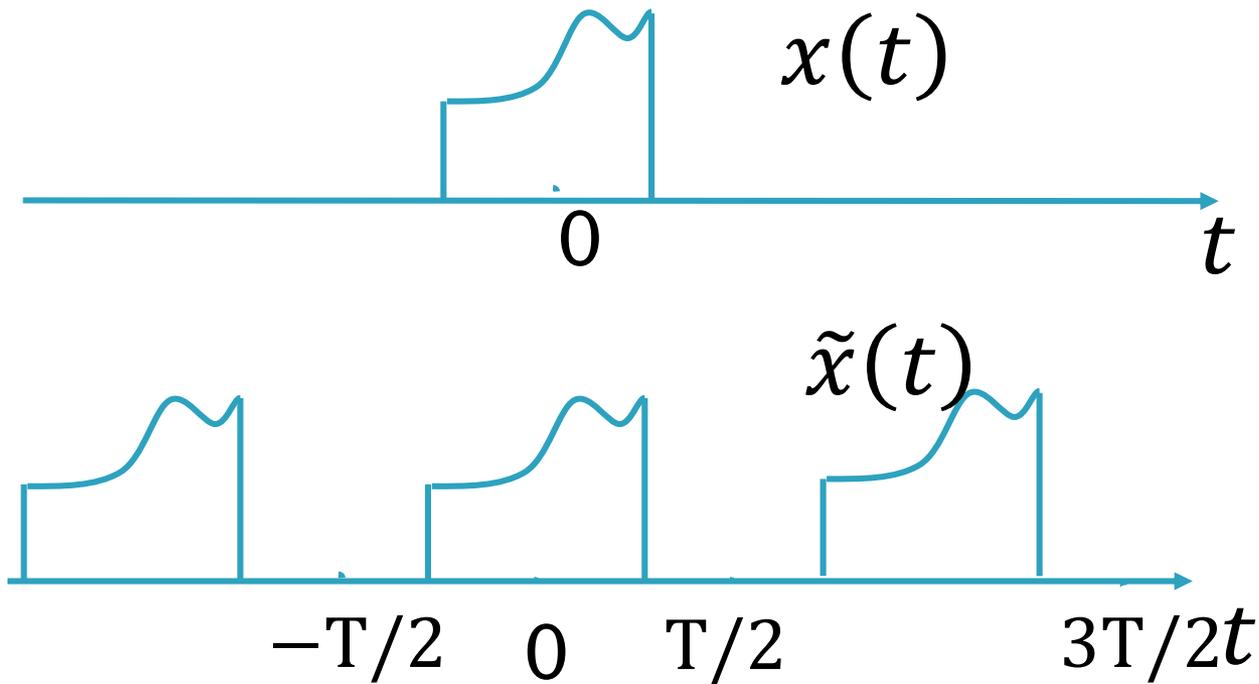
当  $T_0 \rightarrow \infty$  时, 周期性矩形脉冲信号将演变成  
为非周期的单个矩形脉冲信号。

$$\text{当 } T_0 \rightarrow \infty \text{ 时, } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\Omega, \quad k\Omega_0 \rightarrow \Omega$$

由于  $A_k \dot{=} \frac{\tau \sin k\Omega_0 \tau / 2}{T_0 k\Omega_0 \tau / 2}$  也随  $T_0$  增大而减小，并最终趋于0。

考查  $T_0 \dot{A}_k$  的变化，它在  $T_0 \rightarrow \infty$  时应该是有限的。

于是，我们推断出：当  $T_0 \rightarrow \infty$  时，**离散的频谱将演变为连续的频谱。**



由 
$$T_0 \dot{A}_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

如果令  $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 A_k \triangleq X(j\Omega)$  则有

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad A_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

与周期信号的傅里叶级数相比较有：

$$\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} X(jk\Omega_0)$$

这表明：**周期信号的频谱就是与它相对应的非周期信号频谱的样本。**

根据傅里叶级数表示：

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \Omega_0 \end{aligned}$$

当  $T_0 \rightarrow \infty$  时,  $x(t) \rightarrow x(t)$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\Omega \quad k\Omega_0 \rightarrow \Omega \quad \Sigma \rightarrow \int$$

于是有:  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$

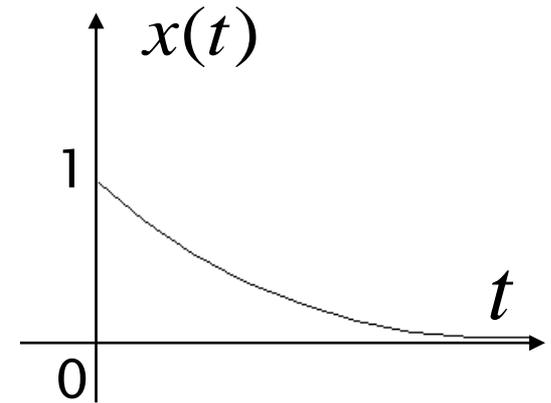
此式表明, 非周期信号可以分解成无数多个频率连续分布的振幅为  $\frac{1}{2\pi} X(j\Omega) d\Omega$  的复指数信号之和。

由于  $X(j\Omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 \dot{A}_k$  具有频谱随频率分布的物理含义, 因而称  $X(j\Omega)$  为**频谱密度函数**。

## 二. 常用信号的傅里叶变换:

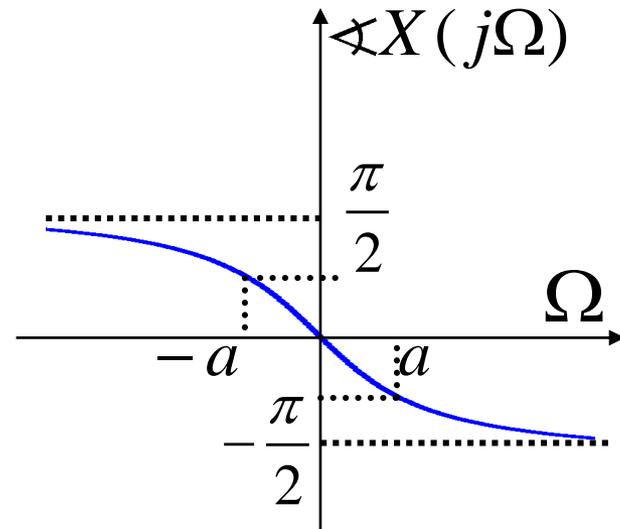
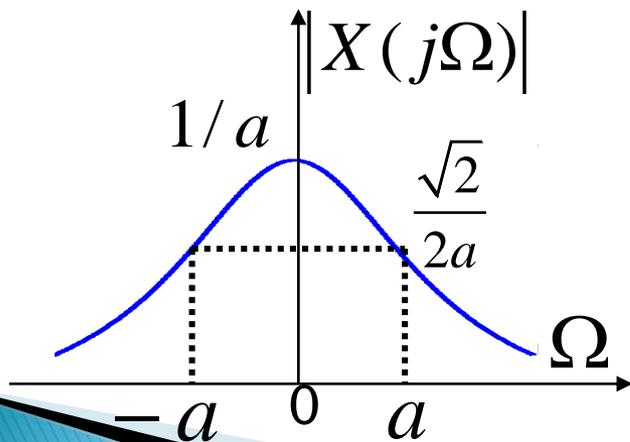
1.  $x(t) = e^{-at} u(t), a > 0$

$$X(j\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{a + j\Omega}$$



$$|X(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \Omega^2}}$$

$$\angle X(j\Omega) = -\tan^{-1} \frac{\Omega}{a}$$

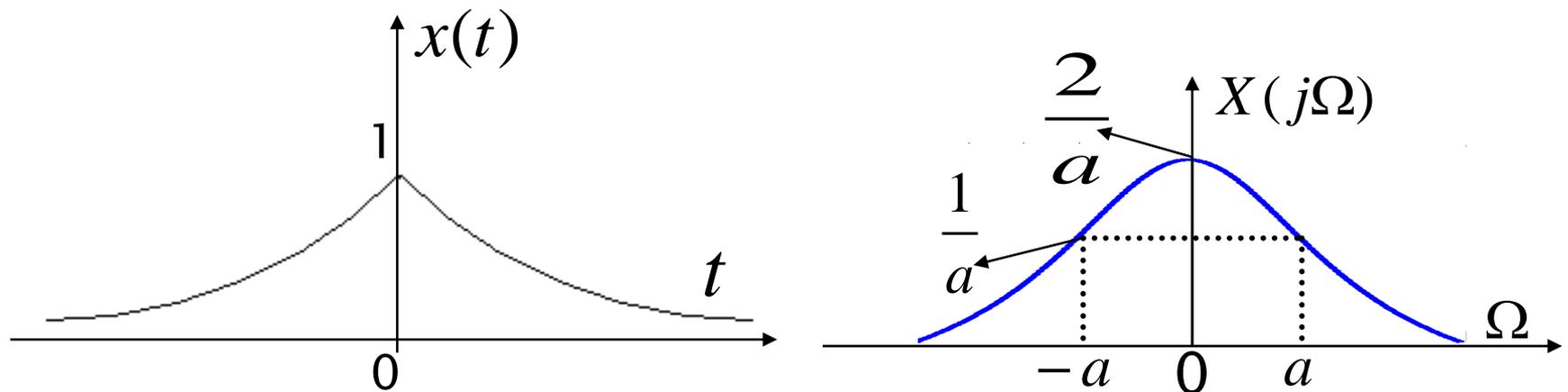


$$2. x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt$$

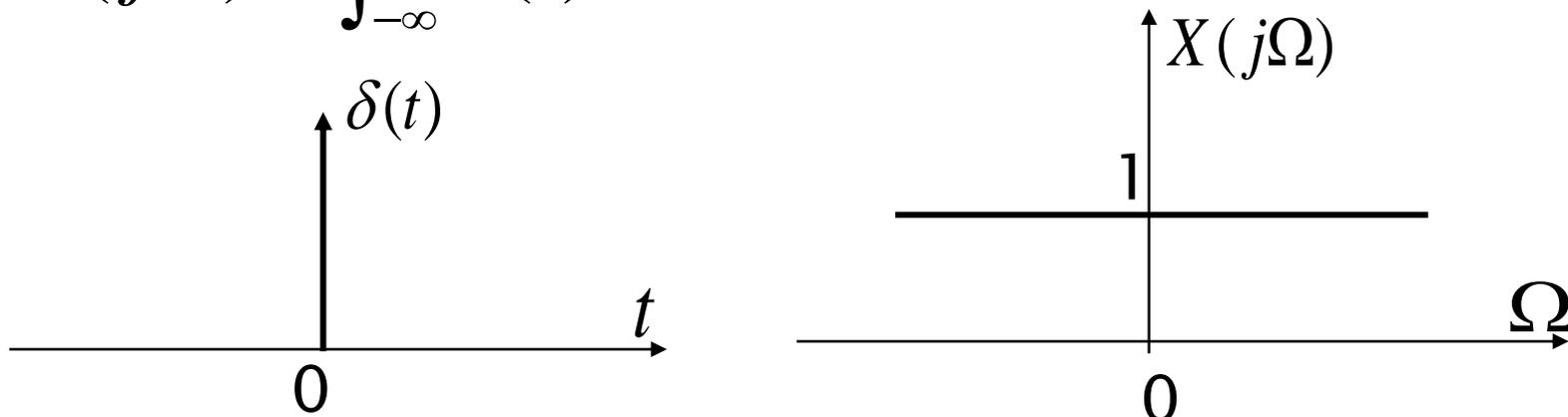
$$= \frac{1}{a - j\Omega} + \frac{1}{a + j\Omega} = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2} \quad \angle X(j\Omega) = 0$$

我们看到：**实偶信号的傅里叶变换是实偶函数**，此时可以用**一幅图**表示信号的频谱。



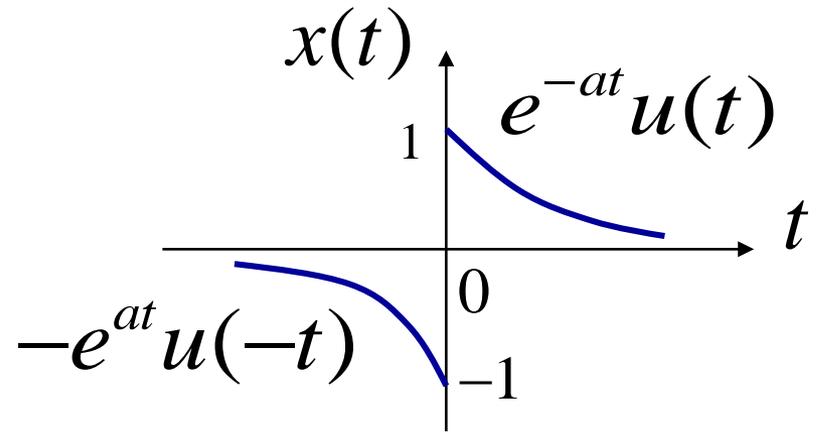
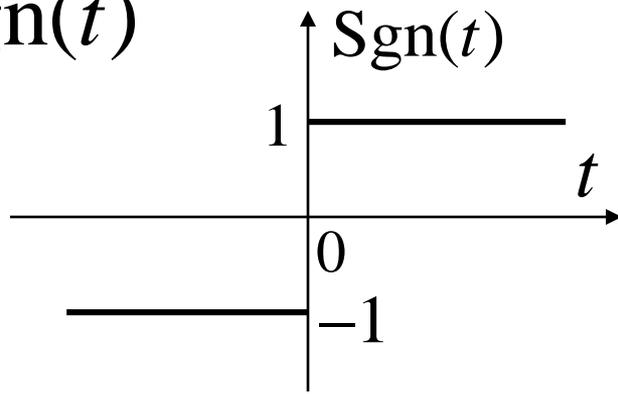
3.  $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\Omega t} dt = 1$$



**这表明  $\delta(t)$  中包括了所有的频率成分, 所有频率分量的幅度、相位都相同。因此单位冲激响应  $h(t)$  才能完全描述一个LTI系统的特性,  $\delta(t)$  才在信号与系统分析中具有如此重要的意义。**

## 4. Sgn(t)

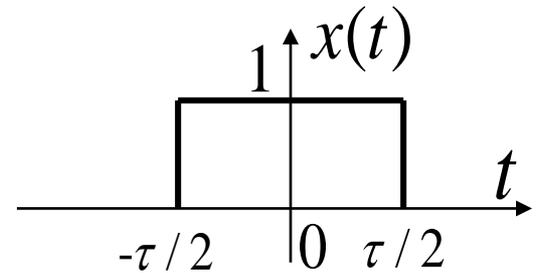


当  $a \rightarrow 0$  时,  $x(t) \rightarrow \text{Sgn}(t)$

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^0 -e^{at} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{a + j\Omega} - \frac{1}{a - j\Omega} = \frac{-j2\Omega}{a^2 + \Omega^2}, \quad a > 0 \end{aligned}$$

当  $a \rightarrow 0$  时,  $X(j\Omega) \rightarrow \frac{2}{j\Omega} \quad \therefore \quad \text{Sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\Omega}$

5. 矩形脉冲:  $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$

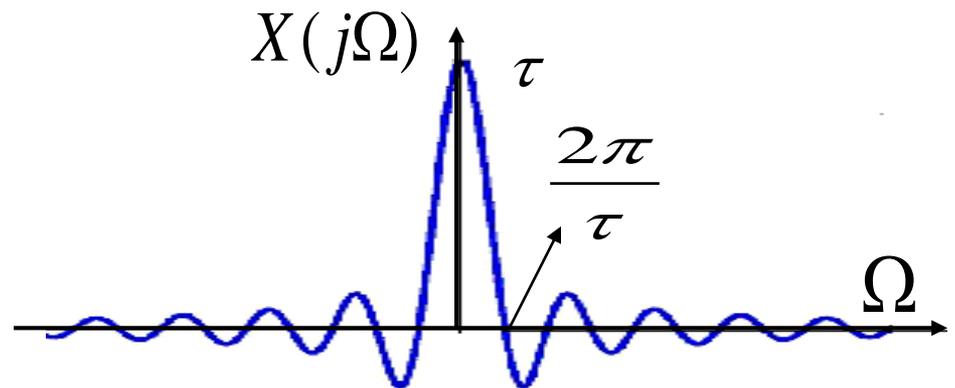


$$X(j\Omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\Omega t} dt = \frac{2\text{Sin}(\Omega\tau/2)}{\Omega}$$

$$= \frac{\tau \text{Sin}(\Omega\tau/2)}{\Omega\tau/2} = \tau \text{Sa}(\Omega\tau/2) = \tau \text{Sinc}\left(\frac{\Omega\tau/2}{\pi}\right)$$

显然，和对应的周期信号之间满足：

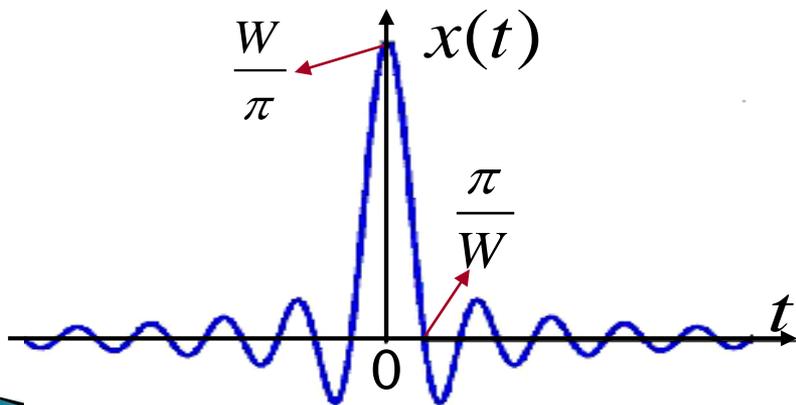
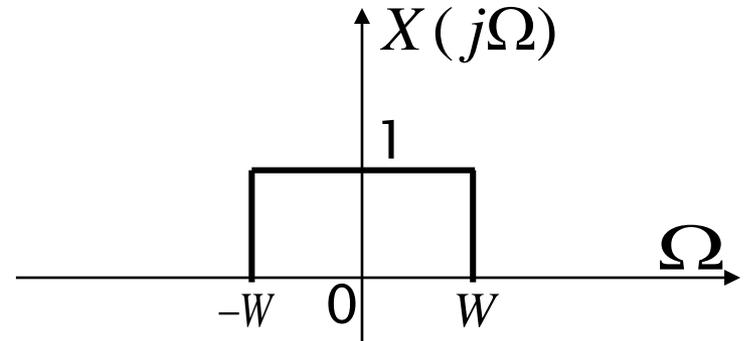
$$\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} X(jk\Omega_0)$$



$$6. X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases} \quad (\text{具有此频率特性的系统称为理想低通滤波器})$$

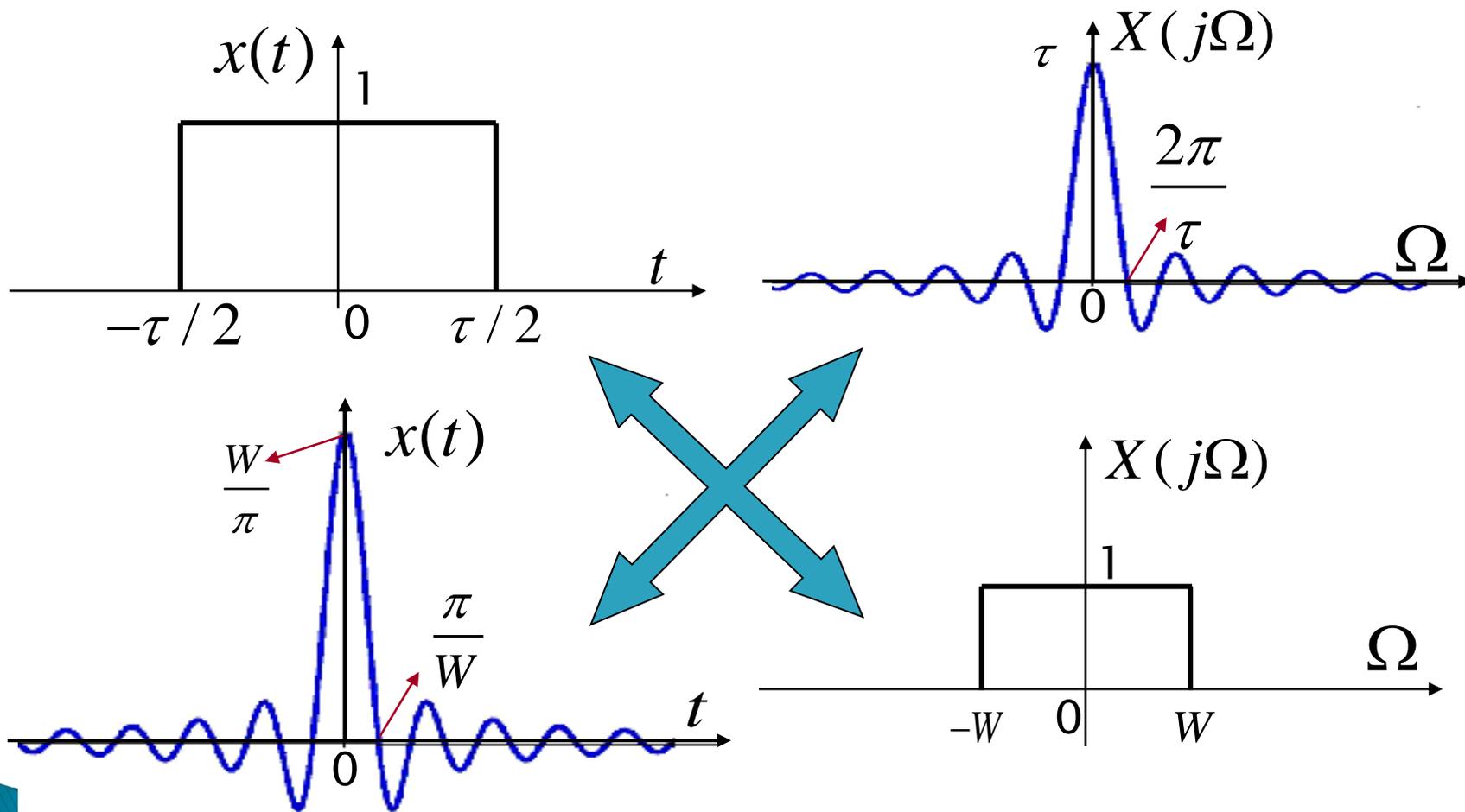
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\text{Sin } Wt}{\pi t}$$

$$= \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) = \frac{W}{\pi} \text{Sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



和矩形脉冲的情况相比较, 可以发现: **信号在时域和频域之间存在着一种对偶关系.**

上例的对偶关系如图：



同时可以看到，**信号在时域和频域之间有一种相反的关系**，即信号在时域脉冲越窄，则其频谱主瓣越宽，反之亦然。

对上例我们可以想到，如果  $W \rightarrow \infty$ ，则  $x(t)$  将趋于一个冲激。

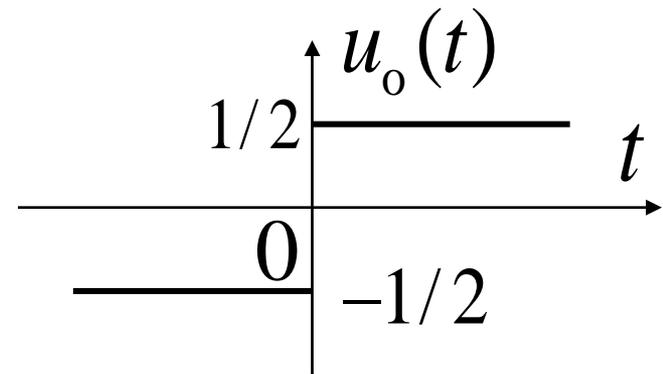
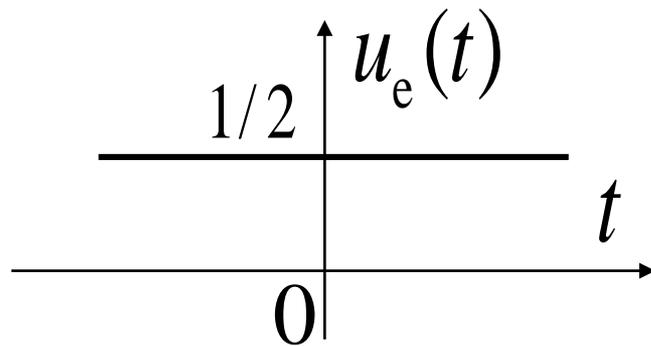
7. 若  $x(t) = 1$ ，则有  $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$ ，

因为 
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \delta(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi}$$

所以 
$$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$8. \quad x(t) = u(t)$$

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$



$$u_e(t) = \frac{1}{2} [u(t) + u(-t)] = \frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\Omega)$$

$$u_o(t) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}$$

$$\therefore u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

### 三. 信号的带宽：( Bandwidth of Signals )

从信号的频谱，我们已经看到信号的主要能量集中于低频分量。事实上，传输信号的系统都具有自己的频率特性。工程中在传输信号时，也没有必要把信号的所有频率分量都有效地传输，而只要保证将占据信号能量主要部分的频率分量有效传输即可。因此，需要对信号定义带宽。通常有如下定义带宽的方法：

1.  $X(\Omega)$ 下降到最大值的  $1/\sqrt{2}$ 时对应的频率范围

2. 对包络是  $\text{Sa}(x)$  形状的频谱，通常定义主瓣宽度(即频谱第一个零点内的范围)为信号带宽。

以矩形脉冲为例，按带宽的定义，可以得出，脉宽乘以带宽等于C (脉宽带宽积是一个常数)。这清楚地反映了频域和时域的反关系。

## 3.4 吉布斯现象：（Gibbs phenomenon）

本节旨在解决信号分解为复指数信号线性组合的广泛性问题。

### 一. 傅里叶级数的收敛：

傅里叶级数的收敛有两层含义：

➤  $\dot{A}_k$  是否存在； ➤ 级数是否收敛于  $x(t)$  .

若  $x(t)$  以  $T_0$  为周期  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$      $\Omega_0 = 2\pi / T_0$

用有限个谐波分量近似  $x(t)$  时，有：

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t}$$

误差为  $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

以均方误差作为衡量误差的准则，其均方误差为：

$$\begin{aligned} E_N(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[ x(t) - \sum_{k=-N}^N \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} \right] \left[ x(t) - \sum_{k=-N}^N \dot{A}_k e^{jk\Omega_0 t} \right]^* dt \end{aligned}$$

**在均方误差最小的准则下，可以证明：此时  $\dot{A}_k$**

**应满足：**  $\dot{A}_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$

**——这就是傅氏级数的系数**

**这表明：在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。**

**傅里叶级数收敛的两组条件：**

**1. 平方可积条件：** 如果  $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$  则  $A_k$  必存在。  $\because x(t)$  功率有限， $\therefore \dot{A}_k$  一定存在。

**2. Dirichlet 条件：**

**1) 信号在任何周期内绝对可积**  $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$

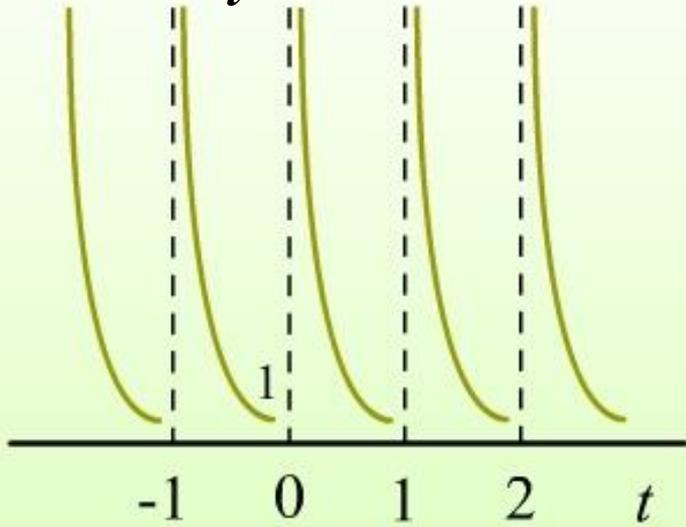
$$|\dot{A}_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) e^{-jk\Omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

- 2) 信号在任何有限区间内，只有有限个极值点，且极值为有限值。
- 3) 信号在任何有限区间内，只有有限个第一类间断点。

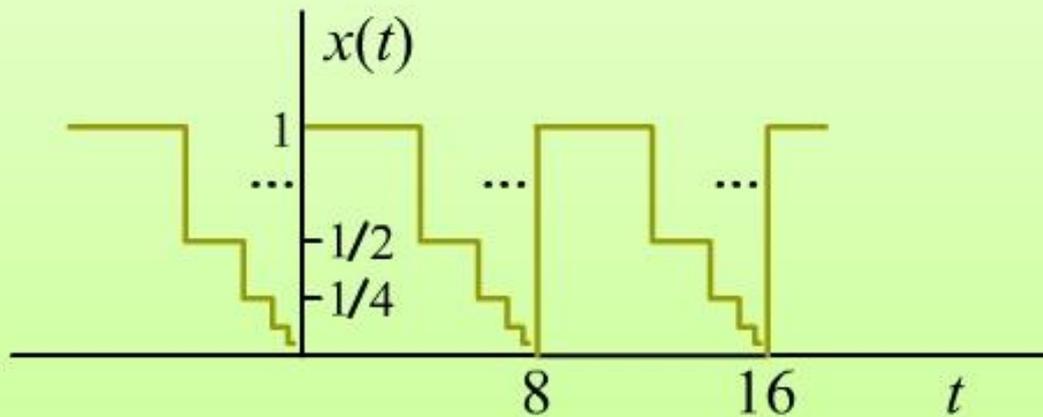
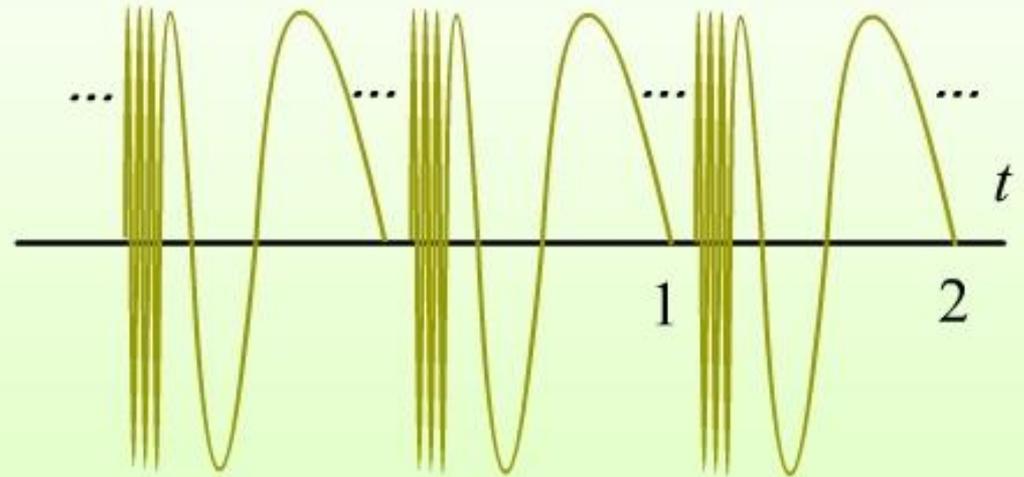
这两组条件并不完全等价。它们都是**傅里叶级数收敛的充分条件**。相当广泛的信号都能满足这两组条件中的一组，因而**用傅里叶级数表示周期信号具有相当广泛的适用性**。

几个不满足 Dirichlet 条件的信号

$$x(t) = \frac{1}{t} \quad 0 < t \leq 1$$



$$x(t) = \sin \frac{2\pi}{t} \quad 0 < t \leq 1$$



## 二. 傅里叶变换的收敛:

根据傅里叶变换与傅里叶级数的关系, 可以想到, 傅里叶变换的收敛条件应该和傅里叶级数的收敛条件相类似。也有相应的两组条件:

1. 若  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$  则  $X(j\Omega)$  存在。

**这表明: 所有能量有限的信号其傅里叶变换一定存在。**

2. Dirichlet 条件:

a. 绝对可积条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

b. 在任何有限区间内,  $x(t)$  只有有限个极值点, 且极值为有限值。

c. 在任何有限区间内,  $x(t)$  只有有限个第1类间断点。

这些条件只是**傅里叶变换存在的充分条件**, 这两组条件并不等价。

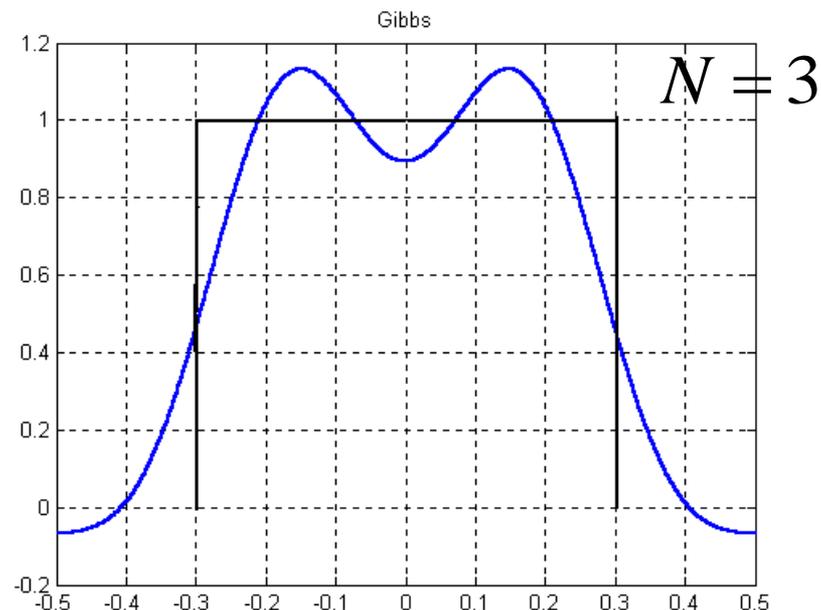
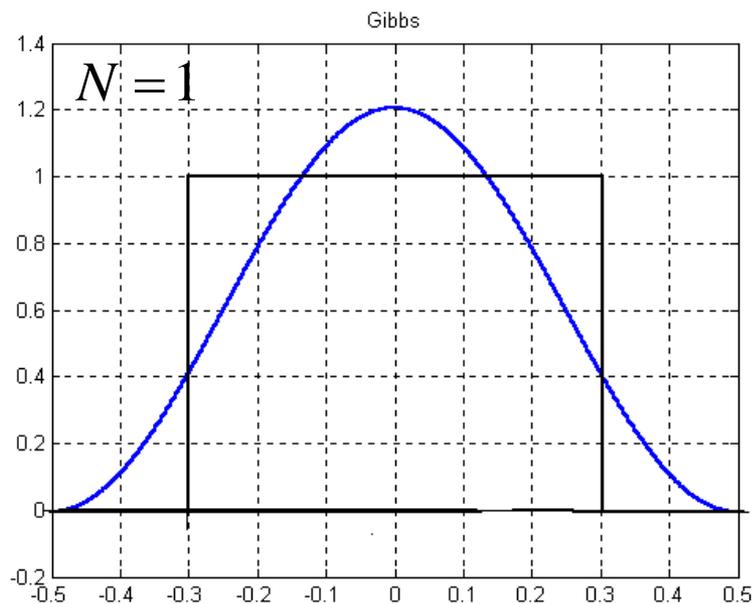
例如:  $\frac{\sin t}{t}$  是平方可积的, 但是并不绝对可积。  $u(t)$ ,

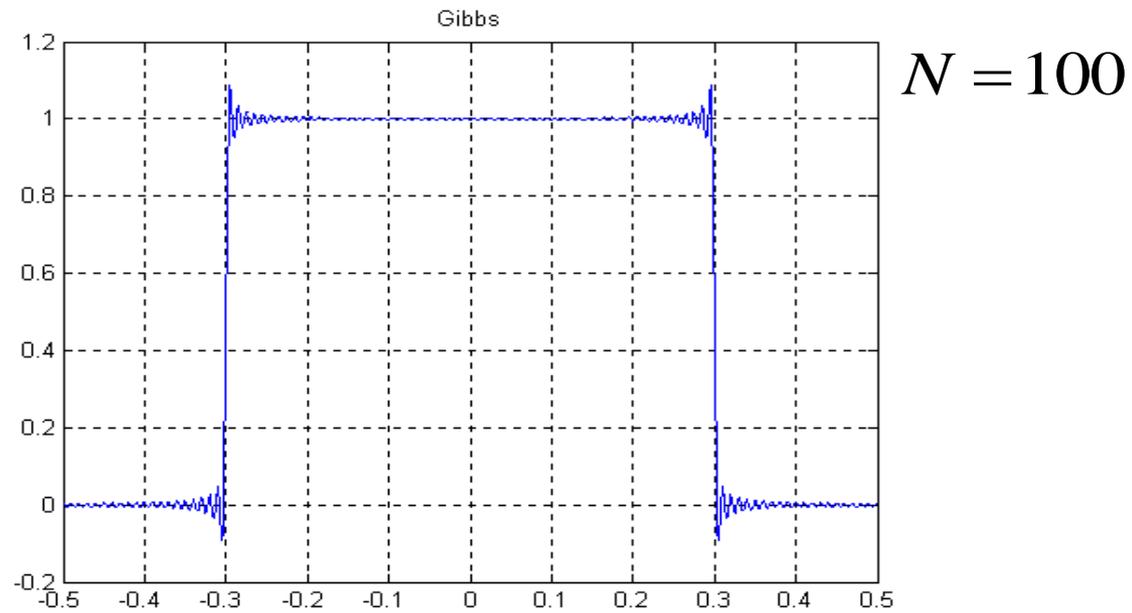
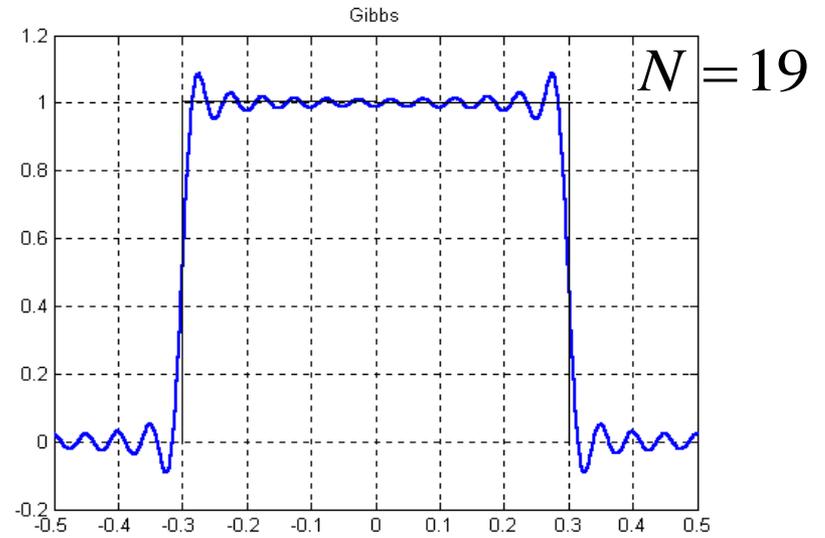
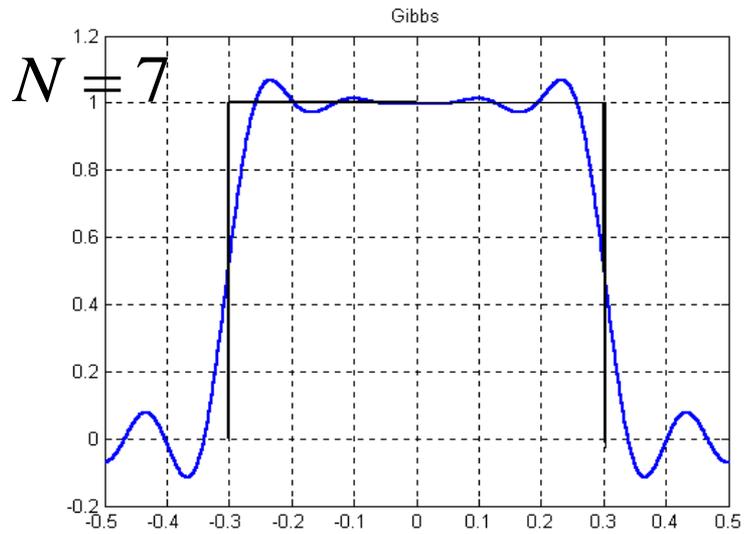
$\text{Sgn}(t)$  都不满足绝对可积, 但傅里叶变换存在。

### 三. 吉布斯现象:

满足Dirichlet条件的信号, 其傅里叶级数是如何收敛于  $x(t)$  的。特别当  $x(t)$  具有间断点时, 在间断点附近, 如何收敛于  $x(t)$ ?

1898年Michelson在用谐波分析仪研究周期信号时，发现了意想不到的情况：对方波信号，用各个谐波叠加时，在信号的间断点处始终存在振荡和超量，并不随所取谐波分量的增加而有所减小。





1899年Gibbs解释了这一现象。

### **Gibbs现象表明：**

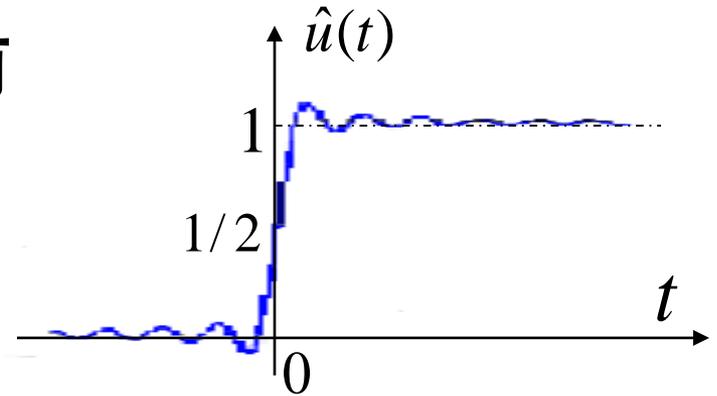
傅氏级数在信号的连续点处收敛于信号本身，在间断点处收敛于间断点左右极限的平均值。用有限项傅氏级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随项数的增加而减少。只是随着项数的增多，振荡频率变高，向间断点处压缩，从而使它所占有的能量逐步减少。

这正是由于**傅里叶级数是在均方误差最小的准则下对信号的最佳近似**所导致的必然结果。

对非周期信号也是如此。以  $u(t)$  为例：

将  $U(j\Omega)$  在  $\Omega_1$  处截断，则有

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_1}^{\Omega_1} U(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$



被截断后的频谱为：

$$\hat{U}(j\Omega) = U(j\Omega)W(j\Omega) \quad W(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_1 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_1 \end{cases}$$

在时域： $\hat{u}(t) = u(t) * w(t)$

$$w(t) = \frac{\sin \Omega_1 t}{\pi t} = \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1 t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{u}(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\Omega_1 t} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_1 t} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

定义正弦积分： $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$

则： $\hat{u}(t) = \frac{1}{2} + \text{Si}(\Omega_1 t)$

正是这一原因，导致了Gibbs现象的产生。

