

西安交通大学航天航空学院
School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University

电磁机械力学

---Electromagnetic Mechanics

• 李勇

5/23/2011 Electromagnetic Mechanics

第五章：电磁场分析-时变电磁场

电磁感应定律 全电流定律

Maxwell方程组

边界面上衔接条件 功流密度, P

达朗贝尔方程 正弦电磁场 坡印亭定理与坡印亭矢量

电磁辐射(应用)

5/23/2011

问题1

时变电磁场?


5/23/2011

时变电磁场

- 在时变电磁场中，电场与磁场都是时间和空间的函数；变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场，电场与磁场相互依存，构成统一的电磁场。
- 英国科学家麦克斯韦将静态场、恒定场、时变场的电磁基本特性用统一的电磁场基本方程组高度概括。电磁场基本方程组是研究宏观电磁场现象的理论基础。

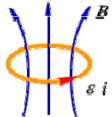
5/23/2011

电磁感应定律



Michael Faraday (1791 - 1867)

当与回路交链的磁通发生变化时，回路中会产生感应电动势，这就是法拉第电磁感应定律 (Faraday's Law of Electromagnetic Induction)。

$$\varepsilon = - \frac{d\psi}{dt}$$


符号表示感应电流产生的磁场总是阻碍原磁场的变化

5/23/2011

磁通变化

- 回路不变，磁场随时间变化

$$\varepsilon = - \frac{d\psi}{dt} = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$
 称为感生电动势，这是变压器工作的原理，又称为变压器电势。
- 回路切割磁力线，磁场不变

$$\varepsilon = - \frac{d\psi}{dt} = \oint_V (V \times B) \cdot dl$$
 称为动生电动势，这是发电机工作原理，又称为发电机电势。
- 磁场随时间变化，回路切割磁力线

$$\varepsilon = - \frac{d\psi}{dt} = \oint_V (V \times B) \cdot dl - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

实验表明：感应电动势 ε 与构成回路的材料性质无关（甚至可以是假想回路），只要与回路交链的磁通发生变化，回路中就有感应电动势。当回路是导体时，才有感应电流产生。

5/23/2011

感应电场 (涡旋电场)

麦克斯韦假设, 变化的磁场在其周围激发着一种电场, 该电场对电荷有作用力 (产生感应电流), 称之为**感应电场** (Electric Field of Induction)。感应电动势与感应电场的关系为:

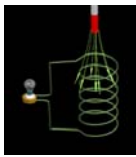
$$\varepsilon = \oint_C E_i \cdot dl = \int_S (\nabla \times E_i) \cdot dS \Leftrightarrow \varepsilon = \oint_C (V \times B) \cdot dl = \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

$$\nabla \times E_i = \nabla \times (V \times B) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

在静止媒质中 $\nabla \times E_i = -\frac{\partial B}{\partial t}$

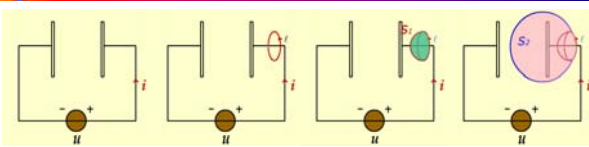
感应电场是非保守场, 电力线呈闭合曲线, 变化的磁场 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 是产生 E_i 的涡旋源。

若空间同时存在库仑电场, 即 $E = E_c + E_i$, 则有

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{变化的磁场产生电场}$$


5/23/2011

全电流定律



作闭合曲线 l 与导线交链, 根据安培环路定律

经过 S_1 面 $\oint_l H \cdot dl = \int_{S_1} J \cdot dS = i$

经过 S_2 面 $\oint_l H \cdot dl = \int_{S_2} J \cdot dS = 0$

$$\oint_l H \cdot dl = \int_S (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS = \int_{S_1} J \cdot dS = i$$

$$\oint_l H \cdot dl = \int_S (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS = \int_{S_2} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \int_{S_2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \cdot dS = \frac{\partial q}{\partial t} = i$$

5/23/2011

全电流定律

恒定场	时变场
$\nabla \cdot J = 0$	$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$
矢量恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times H) = 0$	矢量恒等式 $\nabla \cdot (J + \frac{\partial D}{\partial t}) = 0$
$\nabla \times H = J$	$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$
面积分, 斯氏定理 $\oint_l H \cdot dl = \int_S J \cdot dS$	面积分, 斯氏定理 $\oint_l H \cdot dl = \int_S (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS$

$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ 微分形式

$\oint_l H \cdot dl = \int_S (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS = i + i_d$ 积分形式


其中, $\frac{\partial D}{\partial t} = J_d$ ——位移电流密度

全电流定律揭示不仅传导电流激发磁场, 变化的电场也可以激发磁场。它与变化的磁场激发电场形成自然界的一个对偶关系。

5/23/2011


问题2

电磁场基本方程组，分界面上的衔接条件？



5/23/2011

电磁场基本方程组（麦克斯韦方程组）



麦克斯韦方程组是英国物理学家麦克斯韦在19世纪建立的描述电场与磁场的四个基本方程。方程组的微分形式，通常称为麦克斯韦方程。在麦克斯韦方程组中，电场和磁场已经成为一个不可分割的整体。该方程组系统而完整地概括了电磁场的基本规律，并预言了电磁波的存在。

$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint_l H \cdot dl = \int_s (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS$	全电流定律
$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint_l E \cdot dl = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	电磁感应定律
$\nabla \cdot B = 0$	$\oint_s B \cdot dS = 0$	磁通连续性原理
$\nabla \cdot D = \rho$	$\oint_s D \cdot dS = q$	高斯定律

5/23/2011

麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} B = \mu H = \mu_0 \mu_r H, H = vB \\ D = \epsilon E \\ J = \sigma E \end{cases}$$


- 全电流定律——**麦克斯韦第一方程**，表明传导电流和变化的电场都能产生磁场；
- 电磁感应定律——**麦克斯韦第二方程**，表明电荷和变化的磁场都能产生电场；
- 磁通连续性原理——表明磁场是无源场，磁力线总是闭合曲线；
- 高斯定律——表明电荷以发散的方式产生电场(变化的磁场以涡旋的形式产生电场)。
- 麦克斯韦第一、二方程是**独立方程**，后面两个方程可以从中推得。
- 静态场和恒定场**是时变场的**两种特殊形式**。

5/23/2011

分界面上的衔接条件

磁场: $B_{1n} = B_{2n} \quad H_{2t} - H_{1t} = k$

电场: $D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad E_{2t} = E_{1t}$

5/23/2011 

动态位, 达朗贝尔方程

由 $\nabla \cdot B = 0 \rightarrow B = \nabla \times A$

由 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow \nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi$

A, ϕ 称为动态位 (potential of Kinetic State) .


由 $\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = J + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon (\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi)$

由 $\nabla \cdot D = \rho \rightarrow \nabla \cdot \epsilon (-\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi) = \rho$

经整理后, 得 $\nabla^2 A - \epsilon \mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J + \nabla(\nabla \cdot A) + \mu \epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

定义A的散度 $\nabla \cdot A = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 洛伦兹条件 (规范)

5/23/2011 

达朗贝尔方程

$\nabla \cdot A = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 洛伦兹条件


$\nabla^2 A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J$

$\nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$

达朗贝尔方程 (D'Alambert Equation) 齐次波动方程

- 确定了 $\nabla \cdot A$ 的值, 与 $B = \nabla \times A$ 共同唯一确定A;
- 简化了动态位与场源之间的关系, 使得A单独由J决定, ϕ 单独由 ρ 决定, 给解题带来了方便;
- 洛伦兹条件是电流连续性原理的体现。

若场不随时间变化, 波动方程蜕变为泊松方程 $\nabla^2 A = -\mu J \quad \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon$

5/23/2011 

正弦电磁场的复数形式

正弦电磁场的复数形式与正弦稳态电路中的相量法类同，后者有三要素：**振幅**（标量，常数）、**频率和相位**。

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{I} = I e^{j\varphi}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}I\omega \cos(\omega t + 90^\circ) \rightarrow j\omega \dot{I} = j\omega I e^{j\varphi}$$

前者也有三要素：**振幅**（矢量、空间坐标的函数）、**频率和相位**。

$$F(x, y, z, t) = \sqrt{2}F(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{F} = F(x, y, z) e^{j\varphi}$$


$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sqrt{2}F(x, y, z) \omega \cos(\omega t + \varphi + 90^\circ) \rightarrow j\omega \dot{F} = j\omega F e^{j\varphi}$$

正弦电磁场基本方程组的复数形式 **场与动态位的关系**


$$\oint \dot{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega \dot{D}) \cdot d\mathbf{S} \quad \oint_S \dot{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \cdot \dot{A} = -j\omega \mu \epsilon \dot{\phi}$$

$$\oint \dot{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S j\omega \dot{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \oint_S \dot{D} \cdot d\mathbf{S} = \dot{q} \quad \dot{B} = \nabla \times \dot{A}$$


$$\dot{E} = -j\omega \dot{A} - \nabla \dot{\phi} = -j\omega \dot{A} + \frac{1}{j\omega \mu \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \dot{A})$$

5/23/2011 

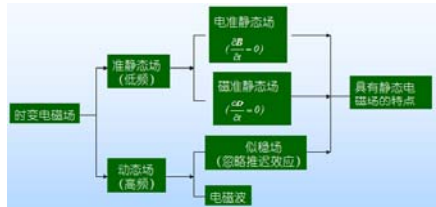
问题3



准静态电磁场?

5/23/2011 


准静态电磁场



```

    graph LR
      A[时变电磁场] --> B[准静态场 (低频)]
      A --> C[动态场 (高频)]
      B --> D["电准静态场 (∂B/∂t = 0)"]
      B --> E["磁准静态场 (∂A/∂t = 0)"]
      C --> F[似稳场 (忽略推迟效应)]
      C --> G[电磁波]
      D --> H[具有静态电磁场的特点]
      E --> H
      F --> H
      G --> H
  
```

随时间缓慢变化的电磁场称为准静态电磁场。

5/23/2011 

电准静态场


低频时，忽略二次源 $\frac{\partial B}{\partial t} (=0)$ 的作用，即 $E_s \approx 0$ ，电磁场基本方程为

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \times E &\approx 0, \quad \nabla \cdot D = \rho \end{aligned}$$

特点：电场的有源无旋性与静电场相同，称为电准静态场（EQS）。

用洛仑兹规范 $\nabla \cdot A = -\partial \phi / \partial t$ ，得到动态位满足的微分方程

$$\nabla^2 A = -\mu J, \quad \nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon$$

5/23/2011 


磁准静态场

低频时，忽略二次源 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 的作用，即 $H_s \approx 0$ ，电磁场基本方程为

$$\begin{aligned} \nabla \times H &\approx J, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \cdot J = 0 \\ \nabla \times E &= -\partial B / \partial t, \quad \nabla \cdot D = \rho \end{aligned}$$

用库仑规范 $\nabla \cdot A = 0$ ，得到动态位满足的微分方程

$$\nabla^2 A = -\mu J, \quad \nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon$$

5/23/2011 

集肤效应

在正弦电磁场中， $J = J_c + J_s = \gamma E + j\omega \epsilon E$ ，满足 $\gamma \gg \omega \epsilon$ 的材料称为良导体，良导体中可以忽略位移电流，场为MQS：

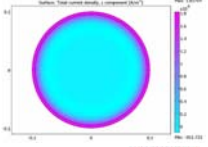
$$\nabla \times H = J_c \quad \text{和} \quad \nabla \times E = -j\omega \mu H$$


在导体中，MQS场中同时存在自由电流和感应电流。靠近轴线处，场量减小；靠近表面处，场量增加，称为集肤效应（skin effect）。

在正弦稳态下，电流满足扩散方程（热传导方程）

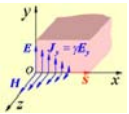
$$\nabla^2 j = k^2 j$$

$$k^2 = j\omega \mu \gamma$$

$$j_r(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$


5/23/2011 

集肤效应



$$\dot{J}_y(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

当 $x \rightarrow \infty$, J_y 有限, 故 $C_2 = 0$, $C_1 = J_y(0) = J_0$, 则 $\dot{J}_y(x) = J_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$

由 $J = \gamma \dot{E}$, 有 $\dot{E}_y(x) = \frac{1}{\gamma} \dot{J}_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$ $k = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\omega\mu\gamma} \angle 45^\circ = \sqrt{\omega\mu\gamma} / \sqrt{2} (1 + j)$
 $= \frac{1}{d} (1 + j) = \alpha + j\beta$

由 $\nabla \times \dot{E} = -j\omega\mu \dot{H}$ 有 $\dot{H}_z(x) = -j \frac{k J_0}{\mu\gamma\omega} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$

5/23/2011 22

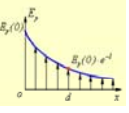
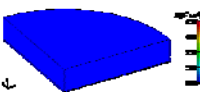
集肤效应

令 $d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$ 称为透入深度 (Skin depth), d 的大小反映电磁场衰减的快慢。

当 $x = x_0$ 时, 幅值 $J_y(x_0) = J_0 e^{-\alpha x_0}$

当 $x = x_0 + d$ 时, 幅值 $J_y(x_0 + d) = J_0 e^{-\alpha(x_0 + d)} = J_0 e^{-\alpha x_0} e^{-1} = J_y(x_0) \times 36.8\%$

d 表示电磁场衰减到原来值的 36.8% 所经过的距离。

当材料确定后, $\omega \uparrow \rightarrow d \downarrow$ 衰减快 \rightarrow 电流不均匀分布。

式中, 通常满足 $\beta x \ll 1$, 即 $e^{-j\beta x} \approx 1$, 不计滞后效应, 因此, 此电流场属于似稳场。

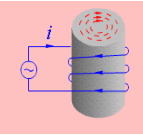
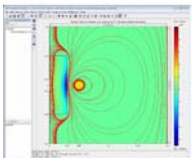
5/23/2011 23

涡流及其损耗

当导体置于交变的磁场中, 与磁场正交的曲面上将产生闭合的感应电流, 即涡流 (eddy current)。其特点:

- 热效应: 涡流是自由电子的定向运动, 有与传导电流相同的热效应。
- 去磁效应: 涡流产生的磁场反对原磁场的变化。

工程应用: 涡流无损检测、叠片铁芯 (电机、变压器、电抗器等)、电磁屏蔽、电磁炉等。

5/23/2011 24

涡流场分布

假设: $l, h \gg a$, 场量仅是 x 的函数:

- $B = B_z e_z$, 故 E, J 分布在 xOy 平面, 且仅有 y 分量;
- 磁场呈 y 轴对称, 且 $x = 0$ 时, $B_z = \dot{B}_0$.

在MQS场中, 磁场满足涡流场方程

$$\nabla^2 H = k^2 \dot{H} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_z = k^2 \dot{H}_z$$

5/23/2011

涡流场分布

$$\dot{H}_z(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx} \quad c_1 = c_2 = c/2 \quad \dot{H}_z = \dot{B}_0 ch(kx)/\mu$$

$$\dot{H}_z\left(\frac{a}{2}\right) = \dot{H}_z\left(-\frac{a}{2}\right) \quad \dot{B}_z(0) = \dot{B}_0 \Rightarrow c\mu = \dot{B}_0 \quad \dot{B}_z = \dot{B}_0 ch(kx)$$

$$J_y = |j_0| \left[\frac{J}{2} (ch2Kx - \cos2Kx) \right]^{1/2}$$

可见: 去磁效应, 薄板中心处磁场最小;
集肤效应, 电流密度奇对称于 y 轴, 表面密度大, 中心处 $J_y = 0$ 。

5/23/2011

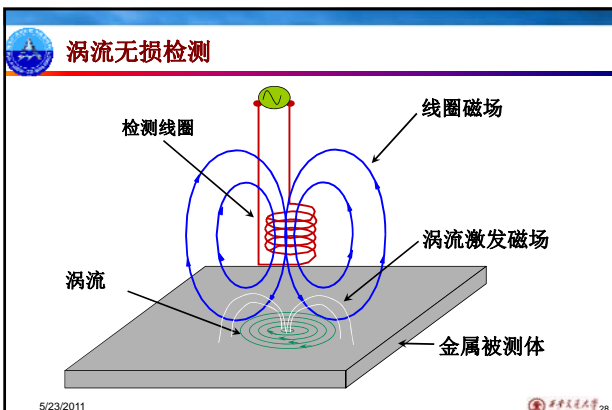
涡流损耗

体积 V 中导体损耗的平均功率为

$$P_e = \int_V \frac{1}{\gamma} |j_y|^2 dV = B_{zav}^2 \cdot lh \cdot \frac{\omega Ka^2}{2\mu} \frac{shKa - \sin Ka}{chKa - \cos Ka}$$

$P_e \propto a, \gamma, \omega, I^2 / \mu$ 。若要减少 P_e , 必须减小 γ (采用硅钢), 减小 a (采用叠片), 提高 h (但要考虑磁滞损耗)。

5/23/2011



涡流无损检测

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} & \text{in the area of vacuum} \\ (\nabla^2 + \gamma^2) \vec{A} = 0 & \text{in the non-vacuum region} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A(r, z, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A(r, z, \omega)}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A(r, z, \omega)}{\partial r} - \frac{A(r, z, \omega)}{r} \right] = 0 \\ \frac{\partial^2 A(r, z, \omega)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A(r, z, \omega)}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A(r, z, \omega)}{\partial r} - \frac{A(r, z, \omega)}{r} \right] - j\omega\mu\sigma A(r, z, \omega) = 0 \end{cases}$$

涡流无损检测

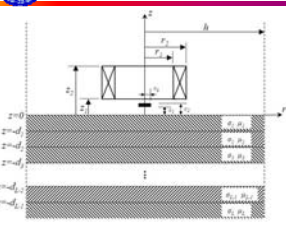
$$F(a z_1, a z_2, a z) = \begin{cases} e^{a(z_2-z)} - e^{a(z_1-z)} & z \geq z_2 \\ 2 - e^{a(z-z_2)} - e^{a(z_1-z)} & z_2 \geq z \geq z_1 \\ e^{a(z-z_2)} - e^{a(z-z_1)} & z_1 \geq z \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} x J_1(x) dx$$

$$A(r, z, \omega) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(ar) \chi(ar_1, ar_2)}{a} \left[e^{-az} (e^{-az_1} - e^{-az_2}) R(a) + F(a z_1, a z_2, a z) \right] da$$

$$A(r, z, \omega) = \mu_0 I_0 \sum_{n=1}^\infty \frac{J_1(a r) \chi(a r_1, a r_2)}{a_n^2 [h_0^2(a, b)]^2} \left[e^{-a_n z} (e^{-a_n z_1} - e^{-a_n z_2}) R(a_n) + F(a_n z_1, a_n z_2, a_n z) \right]$$

涡流无损检测



$$B_z(r, z, \omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial [rA(r, z, \omega)]}{\partial r} \text{ for a time-harmonic field}$$

$$B_z(r, z, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial [rA(r, z, t)]}{\partial r} \text{ for a transient field}$$

$$A(r, z, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} J_1(a_n r) [C_n e^{-a_n z} + D_n e^{a_n z}] \quad z \geq 0$$

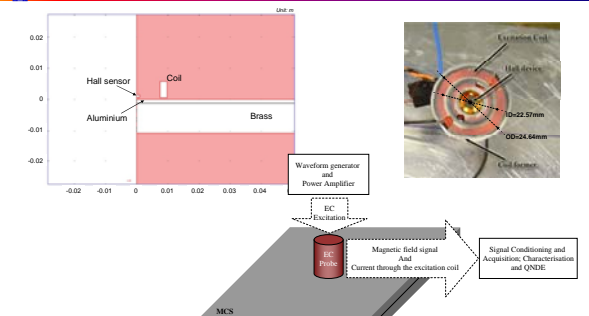
$$A(r, z, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} J_1(a_n r) [C_n e^{-a_n z} + D_n e^{a_n z}] \quad z < 0$$

$$B_z^{(1)}(r, z, \omega) = \mu_0 j_0(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r) \chi(a_n r_1, a_n r_2) F(a_n z_1, a_n z_2, a_n z)}{a_n^2 [h J_0(a_n h)]^2}$$

$$B_z^{(2)}(r, z, \omega) = \mu_0 j_0(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r) \chi(a_n r_1, a_n r_2) e^{-a_n z} (e^{-a_n z_1} - e^{-a_n z_2})}{a_n^2 [h J_0(a_n h)]^2} \cdot \frac{V_1}{U_1}$$

5/23/2011

涡流无损检测



Waveform generator and Power Amplifier

EC Probe

Magnetic field signal And Current through the excitation coil

Signal Conditioning and Acquisition, Characterization and QNDE

5/23/2011

