

第九章 导行电磁波

主要内容

几种常用的导波系统，矩形波导传播特性，圆波导传播特性，谐振腔，同轴线。

- [1. TEM波、TE波及TM波](#)
- [2. 矩形波导传播特性](#)
- [3. 矩形波导中TE₁₀波](#)
- [4. 电磁波的群速](#)
- [5. 圆波导传播特性](#)
- [6. 波导传输功率和损耗](#)
- [7. 谐振腔](#)
- [8. 同轴线](#)

9-1 TEM波、TE波和TM波

9-1 TEM波、TE波和TM波

沿一定的路径传播的电磁波称为**导行电磁波**，传输导行波的系统称为**导波系统**。

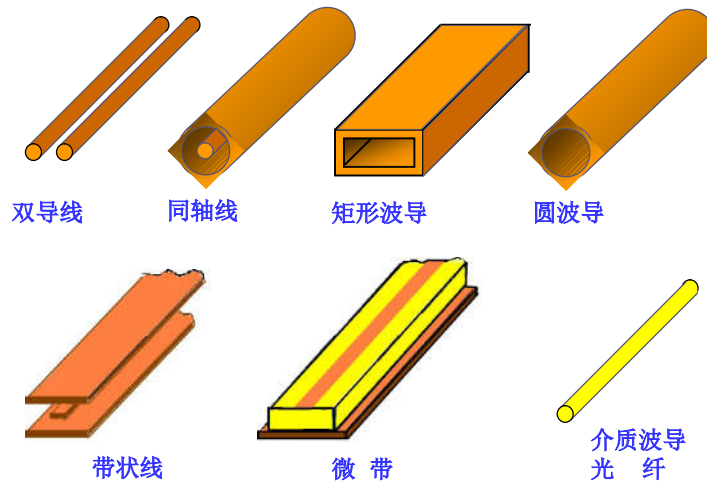
常用的导波系统有双导线、同轴线、带状线、微带、金属波导等。

本章仅介绍**同轴线**和**金属波导**，尤其是**矩形金属波导**的传播特性。

3

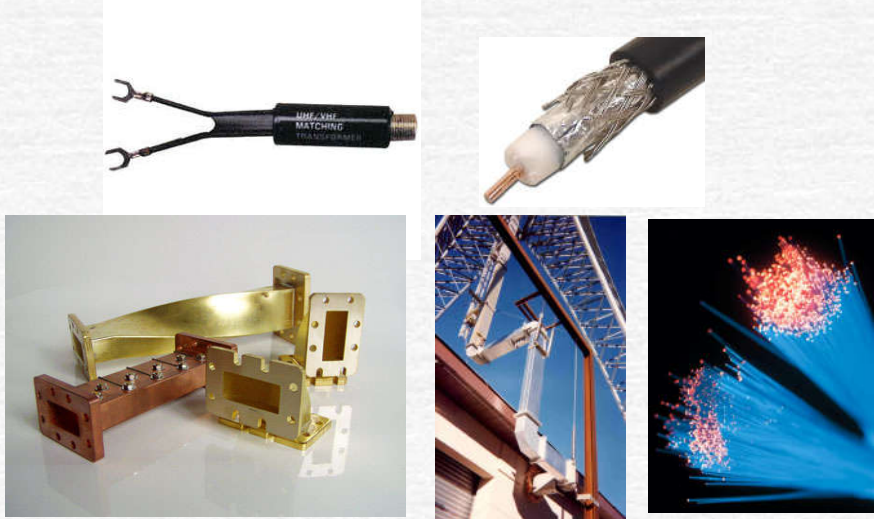
9-1 TEM波、TE波和TM波

几种常用导波系统的示意图



4

9-1 TEM波、TE波和TM波

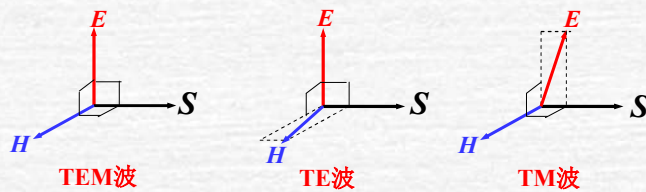


金属波导一般采用铜材料制作，要求很高时需进行镀金处理。

5

9-1 TEM波、TE波和TM波

TEM波、TE波及TM波的结构（电磁波沿+z方向传播）。



$$\begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_z &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z &\neq 0 \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

TEM波、TE波及TM波：电场与磁场总是相互垂直的。

6

9-1 TEM波、TE波和TM波

几种常用导波系统的主要特性

名称	波型	电磁屏蔽	使用波段
双导线	TEM波	差	> 3m
同轴线	TEM波	好	> 10cm
带状线	TEM波	差	厘米波
微带	准TEM波	差	厘米波
矩形波导	TE或TM波	好	厘米波、毫米波
圆波导	TE或TM波	好	厘米波、毫米波
光纤	TE或TM波	差	光波

7

9-1 TEM波、TE波和TM波

根据**导波系统横截面**的形状选取直角坐标系或者圆柱坐标系，且令其沿 z 轴放置，传播方向为正 z 方向。

以**直角坐标系**为例，则电场与磁场可以分别表示为

$$E(x, y, z) = E_0(x, y) e^{-jk_z z}$$

$$H(x, y, z) = H_0(x, y) e^{-jk_z z}$$

且满足下列**矢量亥姆霍兹方程**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

8

9-1 TEM波、TE波和TM波

将沿 z 轴传播的电磁波的表达式代入进行化简，得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \mathbf{E} = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

在理想介质中，无源区电场和磁场满足如下方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

将上面的方程组在直角坐标系中展开，可以得到电场和磁场分量的关系式（P259）。

9-1 TEM波、TE波和TM波

可以求出， x 和 y 分量与 z 分量的关系为

$$E_x = \frac{1}{k_c^2} \left(-jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

只要求出 z 分量，其余分量即可求出。

z 分量为纵向分量，因此这种方法又称为纵向场法。

式中 $k_c^2 = k^2 - k_z^2$

9-1 TEM波、TE波和TM波

对于圆波导，选择圆柱坐标系， r 和 ϕ 横向分量可用 z 纵向分量表示为

$$E_r = -\frac{1}{k_c^2} \left(jk_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + j \frac{\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

$$E_\phi = \frac{1}{k_c^2} \left(-j \frac{k_z}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

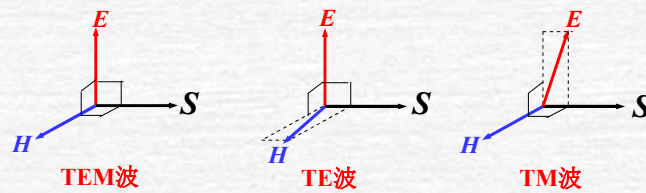
$$H_r = \frac{1}{k_c^2} \left(j \frac{\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + j \frac{k_z}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

11

9-1 TEM波、TE波和TM波

TEM波、TE波及TM波的结构。



可以证明(P260)，能够建立静电场的导波系统必然能够**传输**TEM波。

根据麦克斯韦方程也可说明金属波导**不能**传输TEM波。

12

9-1 TEM波、TE波和TM波

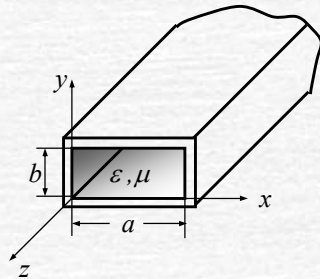
名称	波型	电磁屏蔽	使用波段
双导线	TEM波	差	> 3m
同轴线	TEM波	好	> 10cm
带状线	TEM波	差	厘米波
微带	准TEM波	差	厘米波
矩形波导	TE或TM波	好	厘米波、毫米波
圆波导	TE或TM波	好	厘米波、毫米波
光纤	TE或TM波	差	光波

传输TEM波的导波系统本身**必须是理想导体**。

9-2 矩形波导的传输特性

9-2 矩形波导的传输特性

矩形波导如图示，宽壁的内尺寸为 a ，窄壁的内尺寸为 b 。



已知**金属波导**只能传输 TE 波及 TM 波。若仅传输 TM 波，则 $H_z = 0$ 。

按照**纵向场法**，此时仅需求出 E_z 分量，然后即可计算其余各个分量。

15

9-2 矩形波导的传输特性

已知**电场强度**的 z 分量可以表示为

$$E_z = E_{z0}(x, y)e^{-jk_z z}$$

E_z 满足的**齐次标量亥姆霍兹方程**为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad k_c^2 = k^2 - k_z^2$$

考虑到 $E_z = E_{z0}(x, y)e^{-jk_z z}$ ，其**振幅** E_{z0} 也应满足上述方程。

即
$$\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial y^2} + k_c^2 E_{z0} = 0$$

16

9-2 矩形波导的传输特性

$$\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial y^2} + k_c^2 E_{z0} = 0$$

采用**分离变量法**求解上述方程。

令 $E_{z0}(x, y) = X(x)Y(y)$

得 $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k_c^2$

式中 X'' 表示 X 对 x 的**二阶导数**， Y'' 表示 Y 对 y 的二阶导数。

式中的第二项**仅**为 y 函数，而右端为常数，因此，若对 x 求导，得知左端第一项应为常数。

若对 y 求导，获知第二项应为常数。

9-2 矩形波导的传输特性

令 $\frac{X''}{X} = -k_x^2$ $\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$

式中 k_x 和 k_y 称为**分离常数**。

显然 $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$

两个常微分方程的通解分别为

$$X = C_1 \cos k_x x + C_2 \sin k_x x$$

$$Y = C_3 \cos k_y y + C_4 \sin k_y y$$

式中常数 C_1, C_2, C_3, C_4 取决于导波系统的**边界条件**。

已知 $E_z = 0|_{x=0,a; y=0,b}$ ，求出 $E_z = E_{z0}(x, y)e^{-jk_z z} = X(x)Y(y)e^{-jk_z z}$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3, \dots \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3, \dots$$

9-2 矩形波导的传输特性

那么矩形波导中**TM波**的各个分量为

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_z z}$$

$$E_x = -j \frac{k_z E_0}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_z z}$$

$$E_y = -j \frac{k_z E_0}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_z z}$$

$$H_x = j \frac{\omega \epsilon E_0}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_z z}$$

$$H_y = -j \frac{\omega \epsilon E_0}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_z z}$$

19

9-2 矩形波导的传输特性

1. **相位**仅与变量 z 有关，而**振幅**与 x, y 有关。因此，在 z 方向上为**行波**，在 x 及 y 方向上形成**驻波**。

2. z 等于常数的平面为**波面**。但振幅与 x, y 有关，因此上述TM波为**非均匀的平面波**。

3. 当 m 或 n 为零时，上述各个分量均为零，因此 m 及 n 应是非零的整数。 m 为宽壁上的**半个驻波**的数目， n 为窄壁上**半个驻波**的数目。

4. 大的 m 及 n 模式称为**高次模**，小的称为**低次模**。由于 m 及 n 均不为零，故矩形波导中TM波的最低模式是 TM_{11} 波。

20

9-2 矩形波导的传输特性

TE波

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}$$

$$H_x = j \frac{k_z H_0}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}$$

$$H_y = j \frac{k_z H_0}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}$$

$$E_x = j \frac{\omega\mu H_0}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}$$

$$E_y = -j \frac{\omega\mu H_0}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}$$

式中 $m, n = 0, 1, 2, \dots$ 但两者不能同时为零。

与TM波一样，TE波也具有多模特性，但是 m 及 n 不能同时为零。因此，TE波的最低模式为TE₀₁波或TE₁₀波。

21

9-2 矩形波导的传输特性

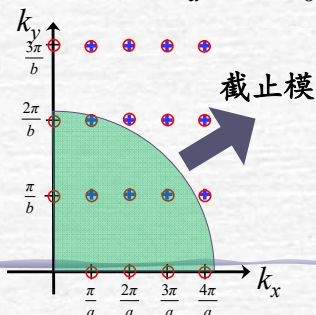
已知 $k_z^2 = k^2 - k_c^2$ 和 $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$

若 $k \leq k_c$ ，则 $k_z^2 \leq 0$ ，意味波的传播被截止，因此，

k_c 称为截止传播常数。

TM波 $k_x = \frac{m\pi}{a}$ ， $k_y = \frac{n\pi}{b}$ ， m, n 均为正整数

TE波 $k_x = \frac{m\pi}{a}$ ， $k_y = \frac{n\pi}{b}$ ， m, n 不同时为0



由 $k = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu}$ 求出对应于截止传播常数 k_c 的截止频率 f_c 。

$$\text{即 } f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

22

9-2 矩形波导的传输特性

传播常数 $k_z = \pm k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \begin{cases} k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}, & f > f_c \quad \checkmark \\ -jk \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}, & f < f_c \end{cases}$

当 $f > f_c$ 时, k_z 为实数, 因子 $e^{-jk_z z}$ 代表向正 z 方向传播的波。

当 $f < f_c$ 时, k_z 为虚数, 因子 $e^{-jk_z z} = e^{-kz \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}}$ 表明电磁场没有传播, 而是沿正 z 方向不断衰减的凋落场。

对于一定的模式和波导尺寸来说, f_c 是能够传输该模式的最低频率, 波导相当于一个高通滤波器。

23

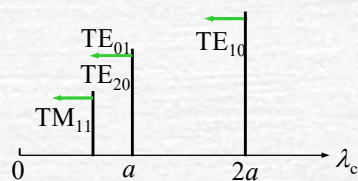
9-2 矩形波导的传输特性

截止波长

由 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, 求得对应于截止传播常数 k_c 的截止波长 λ_c 为 $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} > \lambda \quad \checkmark$

截止频率和截止波长均与波导尺寸 a, b 及模式 m, n 有关。

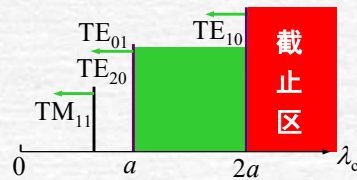
模次越高, 截止频率越高, 截止波长越短。



波导尺寸为 $a = 2b$ 时, 各种模式的截止波长分布如图。

24

9-2 矩形波导的传输特性



当 $\lambda > 2a$ 时，全部模式被截止。

当 $a < \lambda < 2a$ 时，只有 TE_{10} 波存在，其它模式被截止。

当 $\lambda < a$ 时，才有其它模式出现。

若工作波长满足 $a < \lambda < 2a$ ，即可实现**单模传输**，单模传输的惟一模式就是 TE_{10} 波。

TE_{10} 波为矩形波导中的常用模式或称为**主模**。

通常取 $a > 2b$ ，以便在 $a < \lambda < 2a$ 波段内实现 TE_{10} 波单模传输。

25

9-2 矩形波导的传输特性

为了保证仅传输 TE_{10} 波，应该满足下列不等式

$$\frac{\lambda}{2} < a < \lambda \quad (a < \lambda < 2a) \quad b < \frac{\lambda}{2} \quad (a > 2b)$$

窄壁尺寸的下限取决于**传输功率**，容许的**波导衰减**以及**重量**等。

将可获知，窄壁减小会使传输衰减增大。

工程上常取 $a = 0.7\lambda$ 左右， $b = (0.4 \sim 0.5)a$ 或 $(0.1 \sim 0.2)a$ 。

可见，当工作波长增加时，为保证单模传输，波导的尺寸必须相应地加大。因此，实际中**金属波导**适用于 3000 MHz 以上的微波波段。

国际上对于各波段使用的波导尺寸已有统一规定。

GB 11450.6.89 矩形和方形铜及铜合金波导管。

26

9-2 矩形波导的传输特性

矩形波导的相速 v_p 为

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} > v$$

式中 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 。对于真空波导， $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$ 。

已知 $f > f_c$, $\lambda < \lambda_c$, 求得真空波导中 $v_p > c$ 。

波导中的相速不代表能速。

波导中的相速与频率有关。因此，电磁波在波导中传播时会出现色散现象。

波导尺寸及模式不同，其相速也不同。

27

9-2 矩形波导的传输特性

矩形波导中电磁波的波长 λ_g 为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

式中 λ 为工作波长。 λ_g 称为波导波长。

已知 $f > f_c$, $\lambda_c > \lambda$, 故 $\lambda_g > \lambda$ 。

波导中的横向电场与磁场之比称为波导波阻抗。

对于TM波，其波阻抗为 $Z_{\text{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$

求得

$$Z_{\text{TM}} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

28

9-2 矩形波导的传输特性

$$Z_{\text{TM}} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = Z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

同理可得，TE波的波阻抗为

$$Z_{\text{TE}} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

可见，当 $f < f_c$ ， $\lambda > \lambda_c$ 时， Z_{TM} 及 Z_{TE} 均为虚数，表明横向电场与横向磁场相位相差 $\frac{\pi}{2}$ ，因此，沿 z 方向没有能量单向流动，这就表明电磁波的传播被截止。

29

9-2 矩形波导的传输特性

例 某一内部为真空的矩形金属波导，其截面尺寸为 $25\text{mm} \times 10\text{mm}$ ，当频率 $f = 10^4 \text{MHz}$ 的电磁波进入波导中以后，该波导能够传输的模式是什么？当波导中填充介电常数 $\epsilon_r = 4$ 的理想介质后，能够传输的模式有无改变？

解 当内部为真空时，工作波长为

$$\lambda = \frac{c}{f} = 30 \text{ mm}$$

$$\text{截止波长为 } \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{50}{\sqrt{m^2 + 6.25n^2}}$$

30

9-2 矩形波导的传输特性

因为 $(\lambda_c)_{\text{TE}_{10}} = 50\text{mm}$, $(\lambda_c)_{\text{TE}_{20}} = 25\text{mm}$, 更高次模的截止波长更短, 可见, 当该波导中为真空时, 仅能传输的模式为 TE_{10} 波。

若填充 $\varepsilon_r = 4$ 的理想介质, 则工作波长为

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 15(\text{mm})$$

因此, 除 TE_{10} 波及 TE_{20} 波外, 还可传输其它模式。

计算表明, TE_{01} , TE_{30} , TE_{11} , TM_{11} , TE_{21} , TM_{21} 等模式均可传输。

9-2 矩形波导的传输特性

七、(14分) 设内部为真空的矩形金属波导在 x 方向的边长 $a = 8\text{cm}$, 在 y 方向的边长 $b = 4\text{cm}$, 波导中传输频率 $f = 3\text{GHz}$ 的电磁波, 试求:

(1) 该波导能够传输哪些模式的电磁波?

(2) 如果波导中填充相对介电常数为 4 的介质, 该波导能够传输哪些模式的电磁波? (要求至少给出 5 个模式)

解: 截止波长为 $\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{8}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2}} = \frac{16}{\sqrt{m^2 + 4n^2}} \text{cm}$ (2分)

(1) 波导能够传输的电磁模式满足如下条件

$$f = 3 \times 10^9 \text{ Hz}, \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 10 \text{ cm}$$

电磁波要能够在该波导中传输, 则该电磁波的波长必须小于截止波长, 即

9-2 矩形波导的传输特性

$$\lambda < \lambda_c, \quad 10 < \frac{16}{\sqrt{m^2 + 4n^2}}, \quad \text{化简为 } n < \frac{1}{10} \sqrt{64 - 25m^2}$$

当 $m=0$ 时, $n < \frac{4}{5} < 1$, $n=0$, 无波型存在

当 $m=1$ 时, $n < \frac{\sqrt{39}}{10} < 1$, $n=0$, TE_{10} 波

当 $m=2$ 时, $n < \frac{\sqrt{-36}}{10} < 1$, n 不存在

因此只能传输 TE_{10} 波 (4 分)

33

9-2 矩形波导的传输特性

(2) 波导能够传输的电磁模式满足如下条件

$$f = 3 \times 10^9 \text{ Hz}, \quad \lambda = \frac{c}{\sqrt{4}f} = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^9} = 5 \text{ cm} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\lambda < \lambda_c, \quad 5 < \frac{16}{\sqrt{m^2 + 4n^2}}, \quad \text{化简为 } n < \frac{1}{10} \sqrt{256 - 25m^2}$$

当 $m=0$ 时, $n < \frac{16}{10} < 2$, $n=1$, TE_{01} 波

当 $m=1$ 时, $n < \frac{\sqrt{231}}{10} < 2$, $n=0, 1$, TE_{10} 波, TE_{11} 波, TM_{11} 波

当 $m=2$ 时, $n < \frac{\sqrt{156}}{10} < 2$, $n=0, 1$, TE_{20} 波, TE_{21} 波, TM_{21} 波

当 $m=3$ 时, $n < \frac{\sqrt{31}}{10} < 1$, $n=0$, TE_{30} 波

当 $m=4$ 时, $n < \frac{\sqrt{-12}}{10}$, n 不存在

因此, 波导能够传输的电磁模式为:

TE_{10} 波, TE_{20} 波, TE_{01} 波, TE_{11} 波, TM_{11} 波, TE_{21} 波, TM_{21} 波, TE_{30} 波 (6 分, 写出 5 个及以上即可)。

34

9-3 矩形波导中TE₁₀波

35

9-3 矩形波导中TE₁₀波

令 $m=1, n=0$ ，求得TE₁₀波方程为

$$E_y(\mathbf{r}) = -j \frac{\omega\mu H_0}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$

$$H_x(\mathbf{r}) = j \frac{k_z H_0}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z}$$

$$H_z(\mathbf{r}) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z} \quad \text{其余分量为零}$$

对应的瞬时值为

$$E_y(\mathbf{r}, t) = -\frac{\sqrt{2}\omega\mu H_0}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z + \frac{\pi}{2})$$

$$H_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2}k_z H_0}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z + \frac{\pi}{2})$$

$$H_z(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2}H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

36

9-3 矩形波导中TE₁₀波

上式可简化为

$$E_y(\mathbf{r}, t) = -A \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z + \frac{\pi}{2})$$

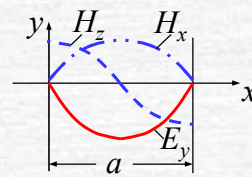
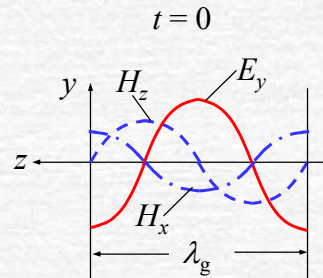
$$H_x(\mathbf{r}, t) = B \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z + \frac{\pi}{2})$$

$$H_z(\mathbf{r}, t) = C \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

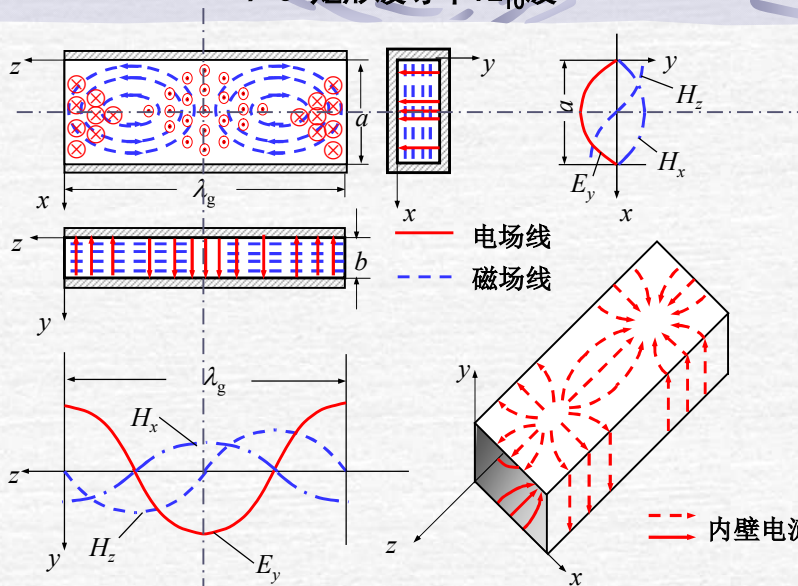
式中A, B, C为**正实数**。

沿x方向为**驻波**，沿z方向为**行波**。

H_z 的振幅沿x按余弦分布， H_x 及 E_z 的振幅沿x按正弦分布，但是其振幅均与y**无关**。

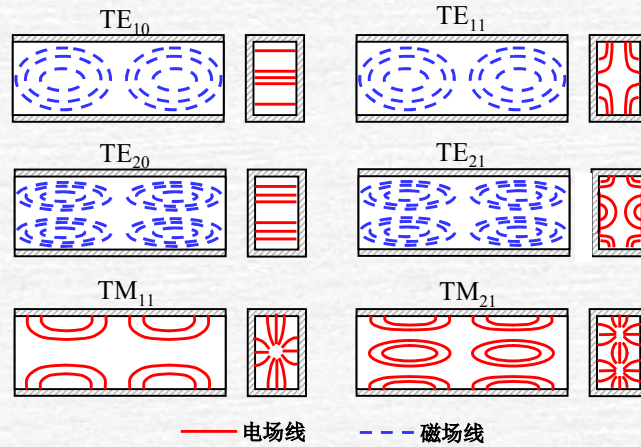


9-3 矩形波导中TE₁₀波



9-3 矩形波导中TE₁₀波

几种高次模的场分布



39

9-3 矩形波导中TE₁₀波

令 $m = 1, n = 0$, 求得TE₁₀波的截止波长为

$$\lambda_c = 2a$$

可见, TE₁₀波的截止波长与窄壁尺寸无关。

根据 λ_c , 求得

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

为了说明TE₁₀波的 v_p 、 λ_g 及 v_c 的物理意义以及它们之间关系, 将电场分量 E_y 改写为

$$E_y = E_0 \left(e^{-j\frac{\pi}{a}x} - e^{j\frac{\pi}{a}x} \right) e^{-jk_z z} \quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{\pi}{a}x} - e^{-j\frac{\pi}{a}x} \right) \right)$$

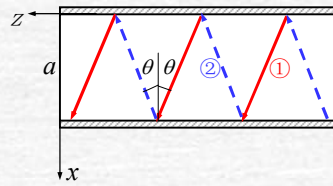
40

9-3 矩形波导中TE₁₀波

利用三角公式，上式改写为

$$E_y = E_0 e^{-jk(x \cos \theta + z \sin \theta)} - E_0 e^{-jk(-x \cos \theta + z \sin \theta)} \quad \left(\cos \theta = \frac{\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)$$

上式可以看成是传播常数为 k ，但传播方向不同的两个均匀平面波。

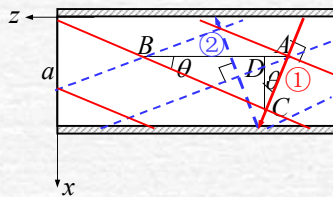


两个均匀平面波又可合并为在两个窄壁之间来回反射的一个均匀平面波。

当 $\lambda = \lambda_c$ 时， $\theta = 0$ 。那么，该均匀平面波在两个窄壁之间垂直来回反射。因此，无法传播而被截止。

9-3 矩形波导中TE₁₀波

两个平面波的波峰相遇处形成合成波的波峰，波谷相遇处形成合成波的波谷。



实线表示平面波①的波峰，虚线表示平面波②的波峰。

线段 AB 长度等于波导波长，AC 长度等于工作波长。

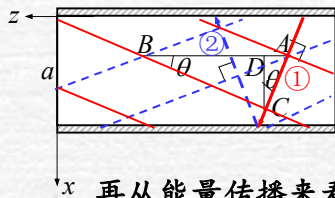
若波导为真空，则 AC 长度等于真空中波长。

由图得 $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} \rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$

$$\left(\cos \theta = \frac{\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{\lambda_c} \right)$$

9-3 矩形波导中TE₁₀波

平面波①由A至C的相位变化为 2π ，而合成波的空间相位变化 2π 时经过距离为AB。可见，**合成波的相速大于均匀平面波的相速。**



由图求出

$$v_p = \frac{v}{\sin \theta} \rightarrow v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

再从能量传播来看，当平面波①的能量由A传播到C时，就传播方向z而言，此能量传输的距离仅为AD长度，可见**波导中能速小于均匀平面波的能速。**

$$\text{由图求出 } v_c = v \sin \theta \rightarrow v_c = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

9-4 电磁波的群速

9-4 电磁波的群速

相速无法描述含有多种频率分量的电磁波在色散介质中的传播速度。本节介绍的群速，将可用来描述窄带信号在色散介质中的传播特性。

设电磁波仅具有两个频率非常接近的频率分量为

$$\begin{cases} A_1(z,t) = A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) \\ A_2(z,t) = A_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z) \end{cases}$$

其合成信号为

$$A = A_1 + A_2 = 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz) \cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

式中

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) & k_0 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ \Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) & \Delta k = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) \end{cases}$$

45

9-4 电磁波的群速

$$A = A_1 + A_2 = 2A_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta kz) \cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

由于 $\omega_1 \sim \omega_2$, $\Delta\omega \ll \omega_0$, 因而在一个足够小的时间间隔内, 上式中的第一个余弦项尚未发生明显变化时, 第二个余弦项已经历了几个周期的变化, ω_0 所以代表载频, $\Delta\omega$ 代表调制频率。

这是一个幅度变化缓慢的调幅信号。

若介质是非色散的, 波包随载波一起运动, 载波及波包都保持正弦波形。

波包的移动速度称为群速, 以 v_g 表示。

$$\text{由 } \Delta\omega t - \Delta kz = \text{常数, 求得群速为 } v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

46

9-4 电磁波的群速

对于**非色散**介质， k 与 ω 的关系是线性的，因此 $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ ，求得**群速**为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

再由 $\omega_0 t - k_0 z = \text{常数}$ ，求得**载波相速** v_p 为

$$v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$$

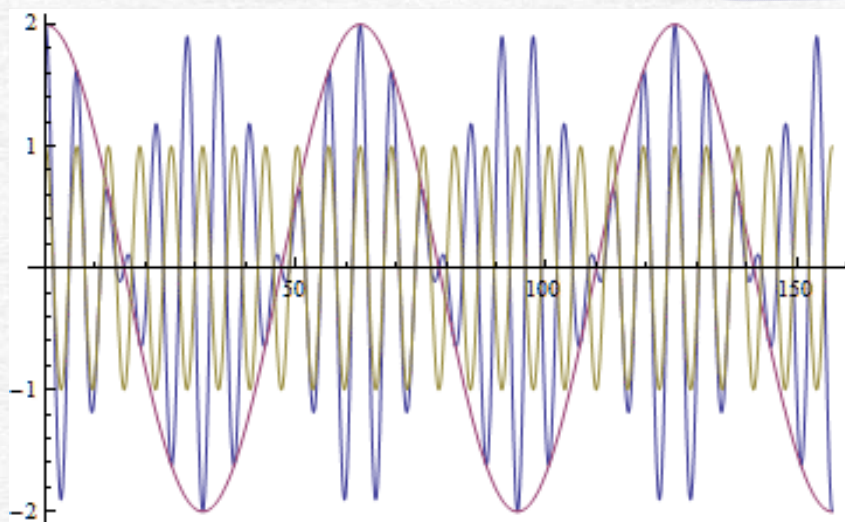
已知非色散介质中， $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ，得

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

可见，**非色散介质中** $v_g = v_p$

47

9-4 电磁波的群速



非色散介质中

$$v_g = v_p$$

48

9-4 电磁波的群速

对于色散介质，对于给定的频率 ω_0 ，可将 k 作为频率 ω 的函数在 ω_0 附近展开为泰勒级数，即

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

对于窄带信号，仅取前两项，即

$$k(\omega) \approx k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

$$\text{且可认为 } v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}, \text{ 得 } v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}^{-1} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$$

由于色散介质的 k 与 ω 的关系是非线性的，不同的载波频率，其群速不同。群速不再等于相速。

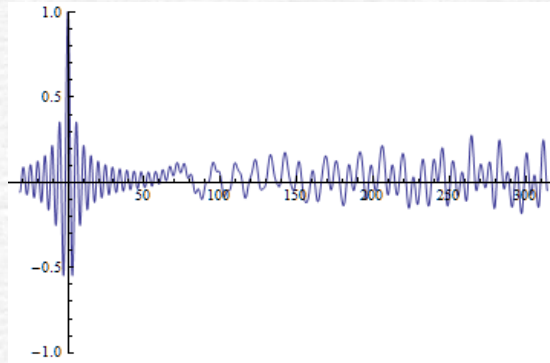
9-4 电磁波的群速

载波以相速传播，波包以群速传播。 P' 为波包等相位点， P 为载波等相位点。当 P 点位移为 d 时，由于波包速度较慢， P' 点仅位移 d' ($d' < d$)。

传播一段距离后，波包变形，导致信号失真。

$$v_p = 2v_g$$

9-4 电磁波的群速



波包变形，信号失真。（40个单频波的叠加）

51

9-4 电磁波的群速

根据上述关系，求得
$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}}$$

对于窄带信号，上式应为

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \left(\frac{dv_p}{d\omega} \right)_{\omega_0}}$$

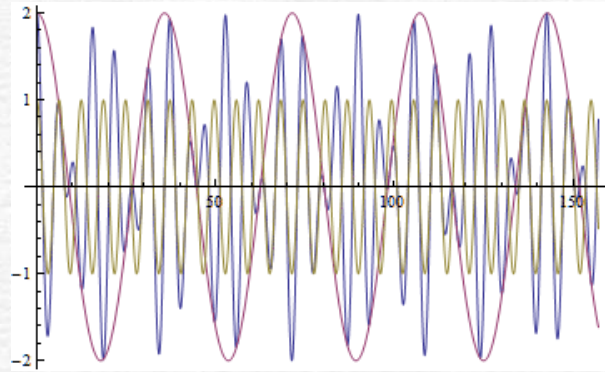
若 $\frac{dv_p}{d\omega} = 0$ ，则 $v_g = v_p$ ，即**无色散**时相速等于群速。

若 $\frac{dv_p}{d\omega} < 0$ ，则 $v_g < v_p$ ，这种情况称为**正常色散**。

若 $\frac{dv_p}{d\omega} > 0$ ，则 $v_g > v_p$ ，这种情况称为**非正常色散**。

52

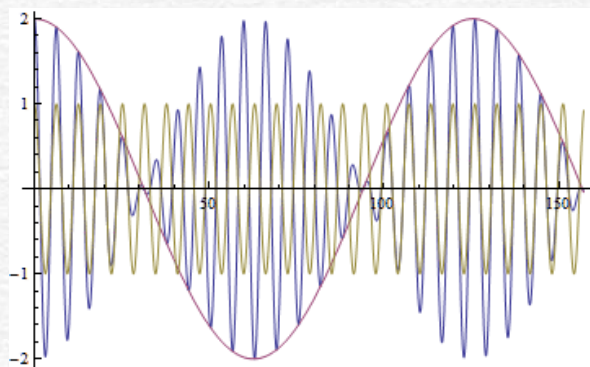
9-4 电磁波的群速



$\frac{dv_p}{d\omega} < 0$, $v_g < v_p$, 称为**正常色散**。

53

9-4 电磁波的群速



$\frac{dv_p}{d\omega} > 0$, $v_g > v_p$, **非正常色散**。

54

9-4 电磁波的群速

金属波导有 $k_z^2 + k_c^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - k_c^2} = \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$

相速 $v_p = \frac{\omega}{k_z} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$ 群速 $v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = v_c$

即**金属波导**中电磁波的**群速**等于**能速**，这是**正常色散**介质的共性。

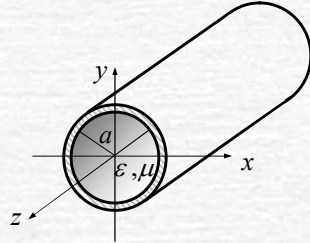
根据上面结果，求得金属波导中电磁波的 v_p 与 v_g 满足下列方程 $v_p v_g = v^2$

当电磁波在**导电介质**中传播时，电磁波发生**非正常色散**。此时， $v_c \neq v_g$ ，上述关系不再成立。

9-5 圆波导传输特性

9-5 圆波导传输特性

圆波导的惟一尺寸是**内半径** a 。



与矩形波导类似，采用**纵向场法**，即先求出纵向分量 E_z 或 H_z ，然后再导出其余分量： E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ 。

电场和磁场的**纵向分量**可分别表示为

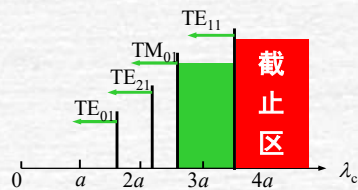
$$E_z(r, \phi, z) = E_{z0}(r, \phi)e^{-jk_z z}$$

$$H_z(r, \phi, z) = H_{z0}(r, \phi)e^{-jk_z z}$$

57

9-5 圆波导传输特性

圆波导中各种模式的**截止波长**分布如图。



根据前面公式，求得

$$TE_{11}: \lambda_c = 3.41a$$

$$TM_{01}: \lambda_c = 2.62a$$

若工作波长 λ 满足 $2.62a < \lambda < 3.41a$ ，即可实现 TE_{11} 波的**单模传输**。

TE_{11} 波是圆波导的**主模**。

反之，若工作波长 λ 给定，为了实现 TE_{11} 波单模传输，圆波导半径 a 必须满足

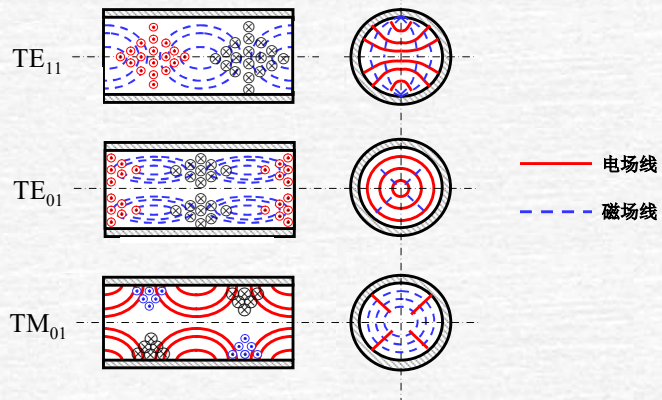
$$\frac{\lambda}{3.41} < a < \frac{\lambda}{2.62}$$

58

9-5 圆波导传输特性

圆波导的相速、群速、波导波长及波阻抗公式与矩形波导的相应公式完全相同。

TE_{11} ， TE_{01} 及 TM_{01} 波的电场线及磁场线分布。



59

9-6 波导传输功率与损耗

60

9-6 波导传输功率与损耗

根据电场及磁场的横向分量，算出复能流密度矢量，将其实部沿横截面积分，即可求得传输功率。

TE₁₀波电磁场的分量为

$$E_y(\mathbf{r}) = -j \frac{\omega \mu H_0}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-jk_z z}$$

$$H_x(\mathbf{r}) = j \frac{k_z H_0}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-jk_z z}$$

$$H_z(\mathbf{r}) = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-jk_z z}$$

$$\mathbf{S}_c = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{e}_x + H_z \mathbf{e}_z$$

61

9-6 波导传输功率与损耗

传输功率等于复能量密度的实部沿横截面积分

$$P = \int_S \operatorname{Re}[\mathbf{S}_c] \cdot d\mathbf{S} = \int_S \operatorname{Re}[\mathbf{S}_c] \cdot dS$$

当波导中填充理想介质时，波阻抗为实数，横向电场和横向磁场相位相同

$$\operatorname{Re}[\mathbf{S}_c] = EH = ZH^2 = \frac{1}{Z} E^2$$

Z表示Z_{TE}或者Z_{TM}，电磁场为横向合成分量。

$$\text{取 } E = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

对波导横截面进行积分可以得到：

62

9-6 波导传输功率与损耗

当**矩形波导**传输 TE_{10} 波时，求得的传输功率为

$$P = \frac{abE_0^2}{2Z_{TE}}$$

若波导中填充介质的**击穿场强**为 E_b ，则矩形波导的**最大传输功率**为

$$P_b = \frac{abE_b^2}{4Z_{TE}}$$

为了安全起见，通常取 $P = \left(\frac{1}{3} \sim \frac{1}{5}\right)P_b$

9-6 波导传输功率与损耗

波导中的损耗主要来自**填充介质**和**波导壁**。

计算填充介质产生的损耗，仅以有耗介质的**等效介电常数**代替原来的**介电常数**即可。

即
$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

波导壁损耗的严格计算非常复杂，通常仍然利用**理想导电壁**情况下的场强公式计算波导壁的损耗。

设衰减常数为 k'' ，则**电场振幅**可以表示为

$$E = E_0 e^{-k''z}$$

传输功率可以表示为

$$P = P_0 e^{-2k''z} \quad (P \propto E^2)$$

9-6 波导传输功率与损耗

$$P = P_0 e^{-2k''z}$$

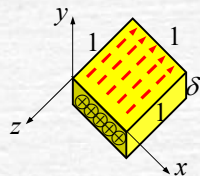
将上式对 z 求导，得单位长度内的功率衰减为

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = 2k''P$$

此功率衰减就是单位长度内的功率损耗，即

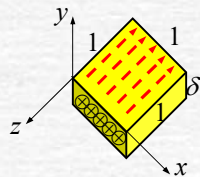
$$P_{11} = 2k''P$$

因此，衰减常数为 $k'' = \frac{P_{11}}{2P}$



为了计算波导壁损耗，在宽壁上取一小块导体，其长度及宽度均为单位长度，深度等于集肤厚度，如图示。

9-6 波导传输功率与损耗



表面电阻率

金属	R_s
银	$2.52 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
铜	$2.61 \times 10^{-7} \sqrt{f}$
铝	$3.26 \times 10^{-7} \sqrt{f}$

当电流为 z 方向时，该小块导体的电阻为

$$R_s = \frac{l}{\sigma S} = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$$

式中 σ 为波导壁的电导率， R_s 称为表面电阻率。

单位宽度且单位长度波导壁内的损耗功率为

$$P_{1s} = J_s^2 R_s$$

式中表面电流 $J_s = e_n \times H_s$

H_s 为波导壁表面的磁场强度。

9-6 波导传输功率与损耗

将 P_{IS} 沿单位长度波导内壁进行积分，即可求得单位长度内波导壁引起的损耗功率 P_{l1} 。

当矩形波导尺寸一定时， TE_{10} 波的损耗最小。

当宽壁尺寸一定时，窄壁愈窄，衰减愈大。

TM_{11}

67

9-6 波导传输功率与损耗

由左图可见，在高频端，圆波导中 TE_{01} 波损耗最小。

但是 TE_{01} 波的截止波长并不是最长。若要实现 TE_{01} 波单模传输，必须设法抑制 TM_{01} 、 TE_{21} 及 TE_{11} 波。

当横截面的面积相等时，矩形的周长大于圆的周长，因此，圆波导损耗较小。

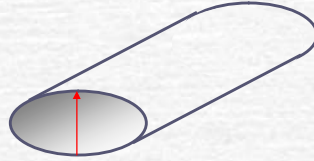
圆波导

68

9-6 波导传输功率与损耗

但是圆波导传输 TE_{11} 波时，其场分布会发生横向偏转。

椭圆波导既可避免场型偏转，又可获得较小的损耗。



为了减少波导壁的损耗，应提高表面的光洁度，可以镀银或金。还可在波导中充入干燥的惰性气体以防止表面氧化。

9-7 谐振腔

9-7 谐振腔

随着频率升高，必须减小 LC 谐振电路的电感量和电容量，但是当 LC 很小时，分布参数的影响不可忽略。电容器的引线电感、线圈之间以及器件之间的分布电容必须考虑。

此外，随着频率升高，回路的电磁辐射效应显著，电容器中的介质损耗也随之增加，这些因素导致谐振电路的品质因素 Q 值显著下降。

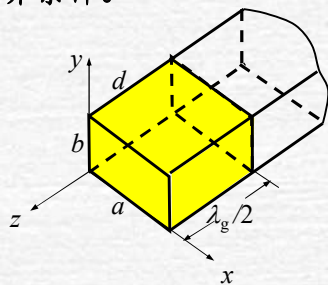
微波波段必须使用相应波段的传输线形成谐振器件，这种谐振器件称为谐振腔。

71

9-7 谐振腔

当矩形波导终端短路时，波导中形成驻波。若工作于主模，TE₁₀波的电场仅有横向分量，短路端形成电场驻波的波节。

在离短路端半个波导波长处，又形成第二个电场驻波的波节。若在此处放置一块横向短路片，仍然满足电场边界条件。



根据场强公式及边界条件，求得谐振腔中电磁场方程式为

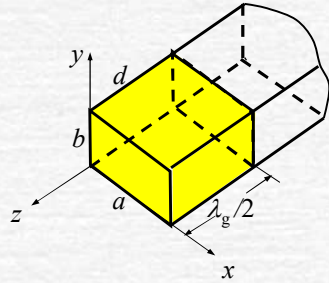
$$H_z = H_0(e^{-jk_z z} - e^{jk_z z}) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = j \frac{k_z a H_0}{\pi} (e^{-jk_z z} + e^{jk_z z}) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$E_y = -j \frac{\omega \mu a H_0}{\pi} (e^{jk_z z} - e^{-jk_z z}) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

72

9-7 谐振腔



利用三角公式，上式又可写为

$$H_z = -2jH_0 \sin(k_z z) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = 2j \frac{k_z a H_0}{\pi} \cos(k_z z) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$E_y = -\frac{2\omega\mu a H_0}{\pi} \sin(k_z z) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

可见，电场及磁场在 x 及 z 方向上均形成驻波，但两者时间相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 。

电场能量达到最大值时，磁场能量为零；反之，磁场能量达到最大值时，电场能量为零。

电磁能量在电场与磁场之间不断地交换，这种现象称为谐振。因此这种金属腔称为谐振腔。

9-7 谐振腔

谐振腔电磁场的性质

通过谐振腔壁的电磁能量为零。 $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} = 0$

电场能量达到最大值时，磁场能量为零；反之，磁场能量达到最大值时，电场能量为零。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\epsilon}{2} E^2 dV &= \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dV \\ &= \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dV = - \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mu}{2} H^2 dV \end{aligned}$$

电磁场总能量保持不变，电磁能量在电场与磁场之间不断地交换。

9-7 谐振腔

对于尺寸一定的谐振腔，仅对特定的频率出现谐振现象。发生谐振的频率称为**谐振频率**，对应的波长称为**谐振波长**。

谐振腔的谐振频率具有多值性，每一个频率对应一个模式。频率最低的称为**主模**。

波导型谐振腔的模式可以看做相应波导模式形成的驻波。根据驻波形成的条件，**谐振腔的长度与波长**之间应该满足一定的关系 $d=l\lambda_g/2$

75

9-7 谐振腔

$$k = \sqrt{k_c^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

矩形谐振腔的**谐振波长**为

$$\lambda_{mnl} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}}$$

矩形谐振腔的**谐振频率**为

$$f_{mnl} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}$$

76

9-7 谐振腔

矩形谐振腔主模为 TE_{101}

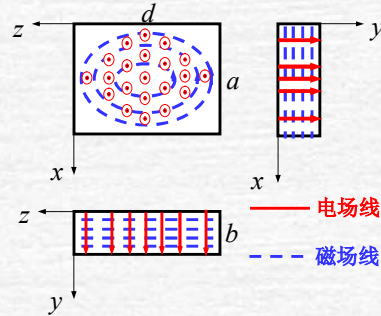
$$(m=1, n=0, l=1), \quad d = \frac{\lambda_g}{2}, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\pi}{d}$$

场方程及场分布如下：

$$E_y = -C \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_z = -jA \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = jB \cos\left(\frac{\pi}{d}z\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$



77

9-7 谐振腔

为了衡量谐振腔的损耗大小，通常使用品质因素 Q 值，其定义为

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P_l}$$

式中 ω_0 为谐振角频率， W 为腔中总储能，也就是电场储能的时间最大值或磁场储能的时间最大值， P_l 为腔中的损耗功率。

根据前述 TE_{101} 模的场强公式，求出电场储能的时间最大值为

$$W = \frac{\epsilon a^3 b d \omega_0^2 \mu^2 |H_0|^2}{2\pi^2}$$

78

9-7 谐振腔

采用波导壁的损耗计算方法，可以求出矩形谐振腔中TE₁₀₁模式的**损耗功率**为

$$P_l = \frac{2a^3b + a^3d + ad^3 + 2d^3b}{d^2} 2R_s |H_0|^2$$

求得**矩形谐振腔**工作于TE₁₀₁模式时的**Q**值为

$$Q = \frac{\omega_0^3 \mu^2 \varepsilon a^3 b d^3}{4\pi^2 R_s (2a^3b + a^3d + ad^3 + 2d^3b)}$$

谐振角频率为 $\omega_{101} = 2\pi f_{101} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2}$

那么，TE₁₀₁模式的**Q**值可表示为

$$Q_{101} = \frac{\pi Z b \sqrt{(a^2 + d^2)^3}}{4R_s (2a^3b + a^3d + ad^3 + 2d^3b)} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

79

9-7 谐振腔

波导谐振腔可以获得很高的**Q**值，圆柱谐振腔的**Q**值更高。

圆柱谐振腔的计算方法同前，结果如下：

$$f_{\text{TM}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{P'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad Q_{\text{TM}} \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\sqrt{P_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi a}{d}\right)^2}}{2\pi\left(1 + \frac{2a}{d}\right)}$$

$$f_{\text{TE}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{P'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

$$Q_{\text{TE}} \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\left[1 - \left(\frac{m}{P'_{mn}}\right)^2\right] \sqrt{\left[P'_{mn}\right]^2 + \left(\frac{l\pi a}{\lambda}\right)^2}}{2\pi \left[\left(P'_{mn}\right)^2 + \frac{2a}{d} \left(\frac{l\pi a}{d}\right)^2 + \left(1 - \frac{2a}{d}\right) \left(\frac{m l \pi a}{P'_{mn} d}\right)^2 \right]}$$

80

9-7 谐振腔

TE_{011} 模式具有较高的 Q 值。 TE_{011} 模式的最大 Q 值发生在 $d \approx 2a$ 附近。若 $\lambda = 3\text{cm}$ ，则 Q 值可达 $10^4 \sim 4 \times 10^4$ 。

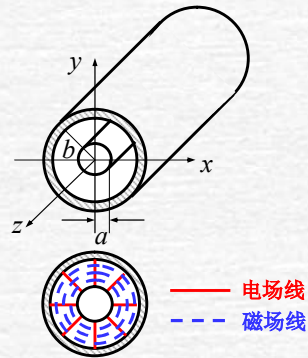
提高 Q 值的方法与减小波导壁损耗相同。此外，**体积** 应尽可能大，以增加储能。**腔壁面积** 应尽可能小，以减小损耗。

圆柱谐振腔

9-8 同轴线

9-8 同轴线

同轴线的主要尺寸是内导体的半径 a 和外导体的内半径 b 。内外导体之间可以填充**介质**或为**空气**。



同轴线中**电场线**为沿半径方向的径向线，**磁场线**为沿角度方向的闭合圆。

同轴线是一种典型的**TEM波**传输线。

83

9-8 同轴线



84

9-8 同轴线

TEM波场的基本性质

TEM波的**纵向分量**全部为零, 故而不能直接利用纵向分量来得到所有的场分量, 而需要从 $E_t = E$ 出发

$$\nabla \times E = (\nabla_t - jk_z e_z) \times E_t = \nabla_t \times E_t - jk_z e_z \times E_t$$

$$\text{上面的纵向分量 } \nabla_t \times E_t = -j\omega\mu H_z e_z = 0$$

再结合

$$\nabla \cdot E = (\nabla_t - jk_z e_z) \cdot E_t = \nabla_t \cdot E_t - jk_z a_z \cdot E_t = \nabla_t \cdot E_t = 0$$

TEM波的电场满足的方程与**二维无源区域**内静电场满足的方程完全相同, 而**边界条件**都是电场垂直于导体边界。

85

9-8 同轴线

TEM波的场满足Helmholtz方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= (\nabla_t^2 - k_z^2) E + k^2 E \\ &= \nabla_t^2 E + (k^2 - k_z^2) E \\ &= (k^2 - k_z^2) E = 0 \end{aligned}$$

由于场不为零, 故有

$$k^2 - k_z^2 = 0 \Rightarrow k_z = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

即TEM波的**传播常数**与均匀平面波相同, 相速度也相同, 波长也相同, 波阻抗也相同。TEM波的场的性质和均匀平面波非常相似, 实际上,**均匀平面波为一特殊的TEM波**。

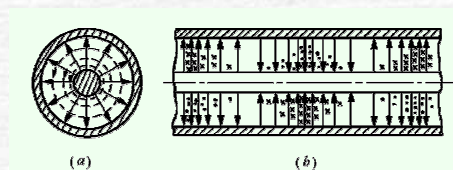
86

9-8 同轴线

同轴线传输的主模是TEM模，求解电场的方法与二维静电场的求解方法相同，磁场可以通过电场的旋度得到：

$$E_t = e_r \frac{U_0}{\ln(D/d)} \frac{e^{-jkz}}{r} \quad H_t = e_\phi \frac{U_0}{Z_{TEM} \ln(D/d)} \frac{e^{-jkz}}{r}$$

同轴线中TEM模的场结构如图



87

9-8 同轴线

电压波与电流波

TEM波的场在二维横截面上**旋度为零**，可定义导体间的电压为

$$U(z) = e^{-jkz} \int_{in}^{out} E_t(x, y) \cdot dl = U(0) e^{-jkz}$$

它是一个沿 z 向传播的波，称为**电压波**。

在导体的表面，由于电磁场的感应会出现**面电流**，电流只有 z 方向，即波导方向。一个导体上的总电流为

$$I(z) = e^{-jkz} \int_{\Gamma} H(x, y) dl = I(0) e^{-jkz}$$

导体上电流也是一个 z 向传播的波，称为**电流波**。

波导的**特性阻抗** $Z_c = U(0)/I(0)$ ，仅与波导结构有关

88

9-8 同轴线

同轴线中TEM模的特性参量

对于同轴线中的TEM模, $k_c = 0$

相移常数为 $k_z = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

相速与光速的关系为 $v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$

特性阻抗为 $Z_c = \frac{U}{I} = \frac{Z_{TEM}}{2\pi} \ln \frac{D}{d} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d} = \frac{1}{Cv}$

C 为单位长度的静电电容, v 为波速。

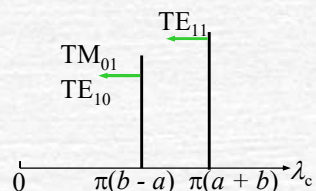
特性阻抗与电容的关系对**所有**TEM波都成立

89

9-8 同轴线

同轴线也可看作为一种**圆波导**, 除了传输TEM波以外, 还可存在TE波及TM波。但是, 根据工作频率适当地设计同轴线的尺寸, 即可抑制这些非TEM波成分。

同轴线中非TEM波的分析方法与圆波导类似。但是同轴线具有内导体, 在 $r=0$ 处为无限大的第二类贝塞耳函数也应作为贝塞耳方程的解。

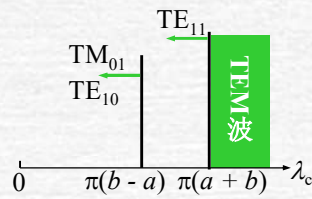


即 $R = BJ_m(x) + CN_m(x)$

利用边界条件求出**传播常数** k_c , 然后即可计算各个模式的截止波长。

90

9-8 同轴线



TE₁₁波具有最长的截止

波长，等于 $\pi(a+b)$

为了抑制同轴线中的非

TEM波，工作波长 λ 必须
满足 $\lambda > \pi(a+b)$

或者说，同轴线的尺寸应满足 $a+b < \frac{\lambda}{\pi} \approx \frac{\lambda}{3}$

为了消除高次模，随频率升高，尺寸必须减小。但尺寸过小，损耗增加，且限制了传输功率。因此，同轴线的使用频率一般低于 3GHz。但是，同轴线的传输频率并无下限，这也TEM波传输线的共性。

同轴线也可构成谐振腔，设计方法同前。

主要内容

几种常用的导波系统及其主要特性，金属波导的传输特性，矩形波导中的 TE₁₀ 波，波导和同轴线的尺寸设计，波导的传输功率及损耗，谐振腔的特性。

主要概念

TEM 波、TE波和 TM波，纵向场方法，多模特性，截止传播常数，截止波长和截止频率，工作波长和波导波长，波导中的相速、能速和群速，谐振腔的谐振频率和谐振波长。

第九章习题：4, 12, 14, 16, 21, 25

93

2017 (A)

七、(10分) 设内部为真空的矩形金属波导在 x 方向的边长为 a ，在 y 方向的边长为 b ， $a > b$ ，如果波导中单模传输的电磁波工作频率范围限定为 8 GHz 到 12 GHz，试设计波导的几何尺寸。

解答：↵

· (1) 确定最低的高次模式 (5分) ↵

····· 对于矩形金属波导，最低的高次模式有两种选择： TE_{01} 波和 TE_{20} 波 ↵

$$\text{····· } (f_c)_{TE_{10}} = \frac{c}{2a}, \text{ ···· } (f_c)_{TE_{01}} = \frac{c}{2b}, \text{ ···· } (f_c)_{TE_{20}} = \frac{c}{a} \text{ ↵}$$

····· 如果最低的高次模式选择为 TE_{20} 波，由于 TE_{20} 波的截止频率始终为 TE_{10} 波截止频率的 2 倍，无法满足所限定的电磁波频率范围。↵

····· 因此，最低的高次模式应该选择为 TE_{01} 波。↵

94

(2) 计算波导的几何尺寸 (5分)。

此时, $b < a < 2b$, 主模是 TE_{10} 波, 最低的高次模是 TE_{01} 波。

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{c}{2a} = 8 \times 10^9 \dots\dots\dots (f_c)_{TE_{01}} = \frac{c}{2b} = 12 \times 10^9$$

$$\dots a = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 8 \times 10^9} = 0.01875m = 1.875cm$$

$$\dots b = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 12 \times 10^9} = 0.0125m = 1.25cm$$

2017 (B)

七. (10分) 设内部为真空的矩形金属波导在 x 方向的边长 $a=1.5\text{cm}$, 在 y 方向的边长 $b=0.8\text{cm}$ 。

- (1) 试求该波导中 TE_{10} 波单模传输的电磁波工作频率范围。
- (2) 如果波导中填充相对介电常数为 4 的非磁性介质, 试求该波导中 TE_{10} 波单模传输的电磁波工作频率范围。

解答:

(1) (5分) 由于 $a < 2b$, 主模为 TE_{10} 波, 最低的高次模 TE_{01} 波。

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 1.5 \times 10^{-2}} = 1 \times 10^{10} = 10\text{GHz}$$

$$(f_c)_{TE_{01}} = \frac{c}{2b} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0.8 \times 10^{-2}} = \frac{3}{1.6} \times 10^{10} = 18.75\text{GHz}$$

因此, 电磁波单模传输的工作频率为: $10\text{GHz} < f < 18.75\text{GHz}$ 。

(2) (5分) 如果波导中填充相对介电常数为4的非磁性介质, 主模和最低高次模的截止频率为

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{c}{2a\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 1.5 \times 10^{-2} \times 2} = 0.5 \times 10^{10} = 5GHz$$

$$(f_c)_{TE_{01}} = \frac{c}{2b\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0.8 \times 10^{-2} \times 2} = \frac{3}{3.2} \times 10^{10} = 9.375GHz$$

此时, 电磁波单模传输的工作频率为: $5GHz < f < 9.375GHz$ 。