

第二章作业

题目：

2.1 2.3(4)(7)(9) 2.4(1) 2.6 2.7(2)(5)(7) 2.10(
b)(d) 2.12 2.16 2.20(1)(4)(8) 2.23 2.24

提交时间：**10.10周四（第一、二章一起交）**

提交方式：纸质版

第2章 离散时间信号与系统

郑南宁 教授

2.1 离散时间信号：序列

■ 在数学上表示成数值的序列

一个序列 x 的第 n 个数，记作 $x(n)$

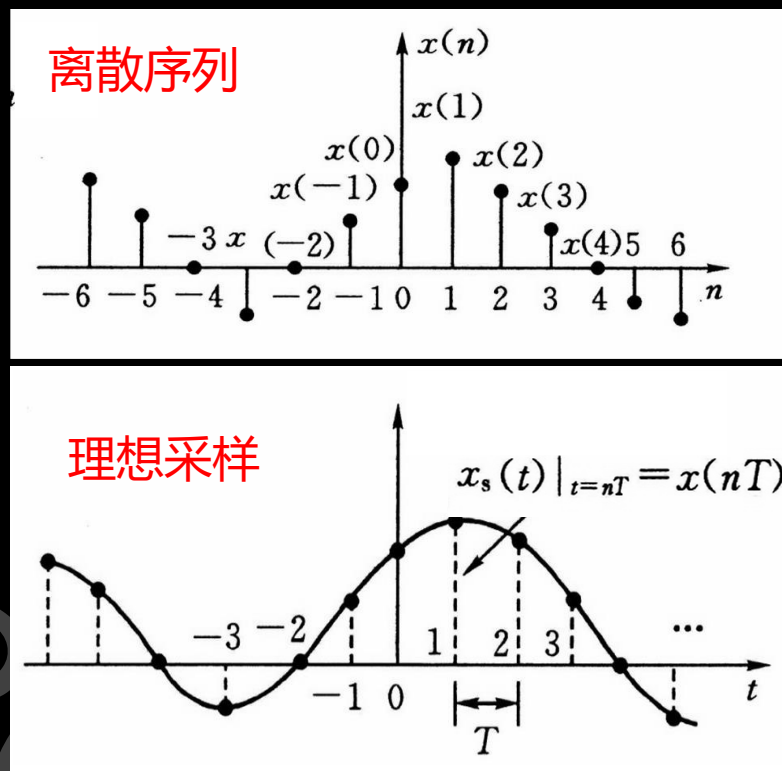
$$x = \{x(n)\}, -\infty < n < \infty \quad n \text{ 为整数}$$

其中 n 为整数，通常将序列 $\{x(n)\}$ 记为 $x(n)$

■ 对连续时间信号进行周期的理想采样

$$x_s(t)|_{t=nT} = x(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

对 T 归一化得到 $x(n)$ ；常称 $x(n)$ 为序列的“第 n 个样本”



采样信号 $x_s(t)$ 与序列 $x(n)$ 的区别：

$x_s(t)$ 是连续时间信号在 $t = nT$ 的采样值，虽然在时间上是离散的，但幅度仍然是一个连续函数，它是通过 $\delta(t)$ 函数表示离散时间点的值（冲激串），所以从数学上看， $x_s(t)$ 还是一个连续时间函数，即在每个采样时刻 $t = nT$ 处，采样信号有非零值，而在其他时间点，信号为零；而离散序列 $x(n)$ 引入了时间的归一化，没有采样率的信息，不能认为 n 不为正数时， $x(n)$ 的值为零， $x(n)$ 仅在 n 为整数时才有定义。

2.1.1 序列的分类

如 x 是实数数组，则称 $x(n)$ 为**实序列**

如 x 是复数数组，则称 $x(n)$ 为**复序列**；一个复序列可表示成两个实序列的合成：

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 分别是复序列 $x(n)$ 的实部 $\text{Re}[x(n)]$ 和虚部 $\text{Im}[x(n)]$ ，因此，可以用实序列的分析方法来处理复序列

复序列可用其幅度和相角表示

$$x(n) = |x(n)| e^{j\varphi(n)}$$

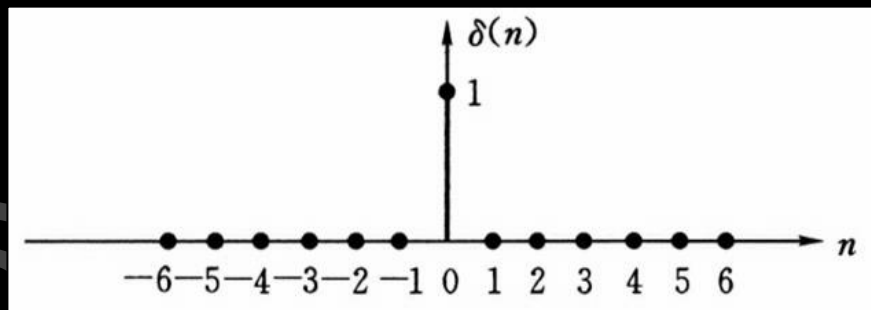
$x(n)$ 的 n 取值为有限值—**有界序列**； $x(n)$ 的 n 取值为无限值—**无界序列**

2.1.2 基本序列

1、单位采样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(n - m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$



- 单位采样序列（也可称为单位脉冲序列）仅在 $n=0$ 时取值为1，其它均为零
- $\delta(n)$ 类似于模拟信号和系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$ ，但不同的是， $\delta(t)$ 只具有数学推导的意义，而单位采样序列 $\delta(n)$ 在离散时间系统中是一个实际存在的序列，常作为离散时间系统采样响应的输入信号

2、单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

单位阶跃序列类似于模拟信号中的单位阶跃函数 $u(t)$

$\delta(n)$ 与 $u(n)$ 之间存在关系

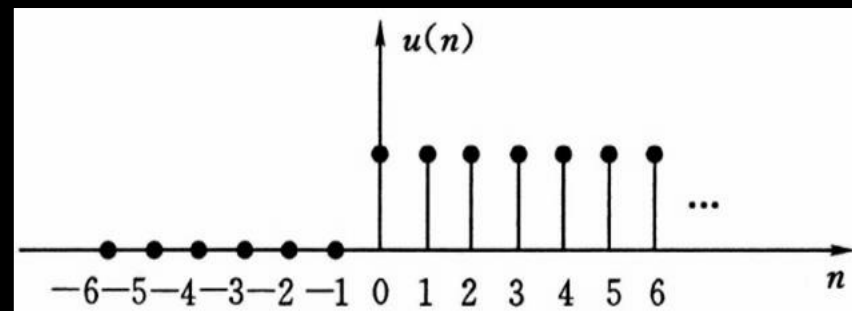
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

利用单位采样序列表示单位阶跃序列的另一种方式是用一组延迟的单位采样序列的和来表示

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m)$$

而单位采样序列可用单位阶跃序列的后向差分表示

$$\delta(n) = \nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

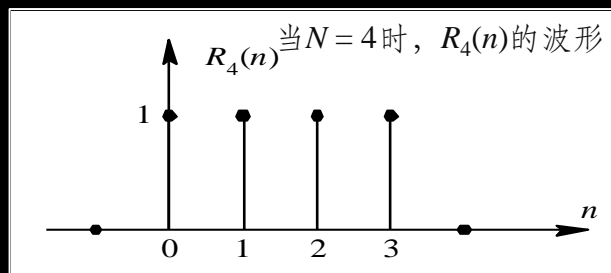
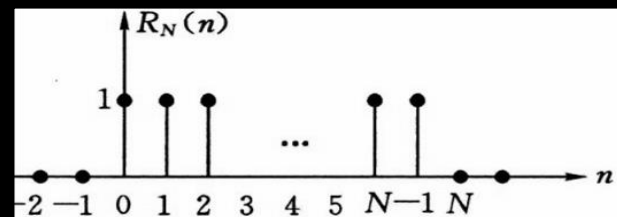


3、矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

式中 N 为矩形序列长度，矩形序列可用单位阶跃序列的差表示

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N)$$



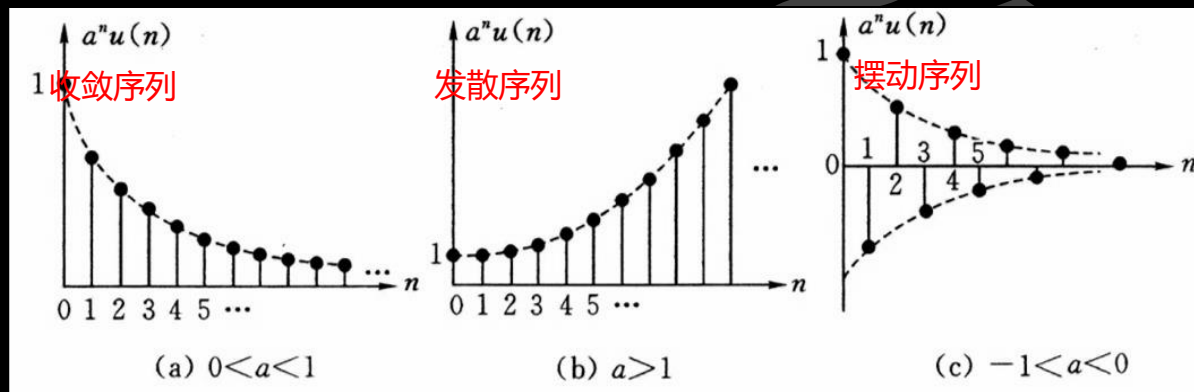
4、实指数序列

$$x(n) = Aa^n u(n) \quad A \text{ 和 } a \text{ 为实数}$$

当 $|a| < 1$ ， $x(n)$ 的幅度随 n 的增大而减小，称 $x(n)$ 为收敛序列

当 $|a| > 1$ ， $x(n)$ 的幅度随 n 的增大而增大，称 $x(n)$ 为发散序列

当 $-1 < a < 0$ 时，序列 $x(n)$ 收敛且摆动，如人口增长、企业投资回报等



5、正弦序列

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

式中 A 和 φ 为实数, ω_0 正弦序列的**频率**, φ 和 ω_0 的单位都是弧度 (rad); ω_0 表示序列变化的速率, 表示相邻两个序列值之间变化的弧度数 (数字角频率或数字频率)

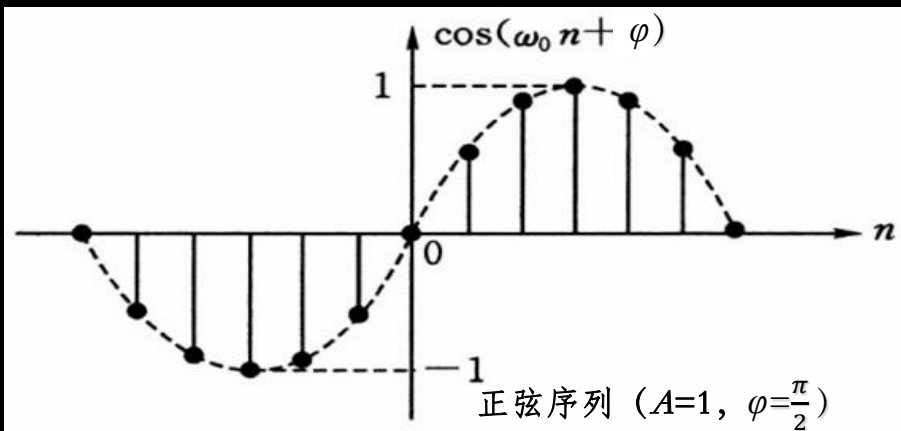
正弦序列 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ 可以是对模拟信号 $x(t) = A \cos(\Omega_0 t)$ 采样得到, 即

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t)$$

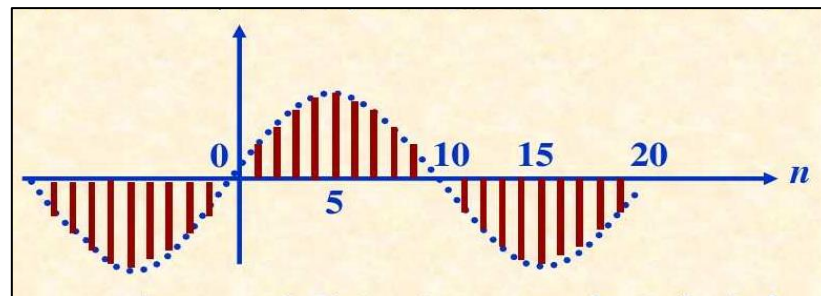
$$x(t)|_{t=nT} = A \cos(\Omega_0 nT)$$

$$x(n) = A \cos(n\omega_0)$$

取 n 的单位为“样本”, 频率 ω_0 的单位是“弧度/样本”



若 $\omega_0 = \frac{2\pi}{20}$, 则每20个序列值重复一次正弦包络的数值
若 $\omega_0 = \frac{2\pi}{10}$, 则每10个序列值重复一次正弦包络的数值



显然, 若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时, 正弦序列才具有周期性 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 。若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数, 而为有理数, 则正弦序列 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 还具有周期性, 但其周期要大于 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 。若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是有理数, 则正弦序列就不具有周期性。

6、复指数序列

a 为复数的指数序列 Aa^n ，其实部和虚部是指数加权的正弦序列

如果 $A = |A|e^{j\varphi}$ ， $a = |a|e^{j\omega_0}$ ，则指数序列 Aa^n 可表示为

$$x(n) = Aa^n = |A|e^{j\varphi}(|a|e^{j\omega_0})^n = |A||a|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)}$$

由于
$$e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \cos(\omega_0 n + \varphi) + j\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

得到
$$x(n) = Aa^n = |A||a|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A||a|^n \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

由于 n 总是整数，当考虑频率为 $(\omega_0 + 2\pi)$ 的复指数序列时，下面等式成立：

$$x(n) = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}$$

上式说明，频率为 $(\omega_0 + 2\pi r)$ 的离散时间复数序列相互间是无法区分的

当讨论具有 $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$ 的复指数信号或具有 $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的实正弦信号时，只需讨论长度为 2π 的一段频率区间

复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 是一种最常用的序列 (分析离散时间系统的重要序列)

7、周期序列

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 使下面等式成立

$$x(n) = x(n+N), \quad -\infty < n < \infty$$

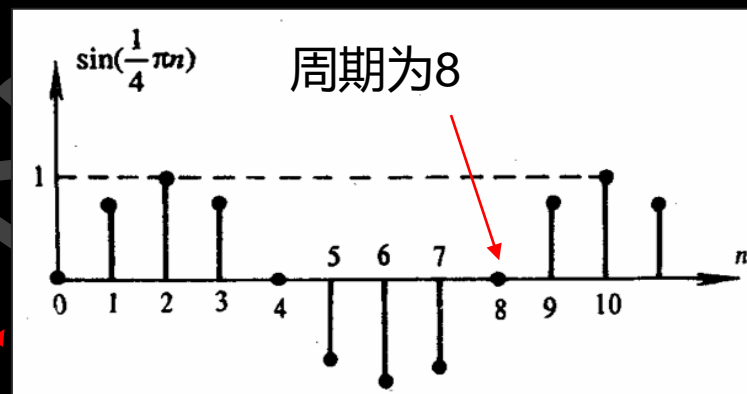
则称序列 $x(n)$ 为周期序列, 周期为 N (注意 N 取整数)

例如

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

上式中, 数字频率是 $\pi/4$, 由于 n 取整数, 可以写成下式

$$x(n) = \sin\left[\frac{\pi}{4}(n+8)\right]$$



该式表明 $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 是周期为8 (最小的正整数) 的正弦周期序列, 如图所示

□ 数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系

数字频率 ω 与模拟角频率 Ω 是通过采样周期 T 相关联, 如对连续信号

$$x(t) = \sin(\Omega t)$$

采样, 有

$$\sin(\Omega n T) = \sin(\omega n)$$

由此得到

$$\omega = \Omega T$$

上式具有普遍意义, 它表示凡是由模拟信号采样得到的序列, 模拟角频率 Ω 与序列的数字频率 ω 成线性关系。由于采样频率 f_s 与采样周期 T 互为倒数, 两者之间的关系也可以表示成下式

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s}$$

数字频率 ω 表示了两个采样点间隔的弧度

由以上的讨论：

1. 正弦信号和复指数连续信号一定是周期函数，但正弦序列和复指数序列对 n 来说不一定是周期为 $2\pi/\omega$ 的周期序列，周期序列要求 $\omega_0 N = 2k\pi$
2. 数字角频率 ω 与模拟角频率 Ω 不同。连续指数信号 $e^{j\Omega t}$ 中 $(t, \Omega) \in R$ ，不同的 Ω 对应不同频率的连续信号。但在序列中，有

$$e^{jn\omega} = e^{j(\omega+2k\pi)n}$$

因此，频率 ω_0 与 $(\omega_0+2r\pi)$ 是无法区别的，即在数字频率轴上相差 2π 整数倍的所有复指数序列值都相同。或者说 ω 有效值区间仅限于

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

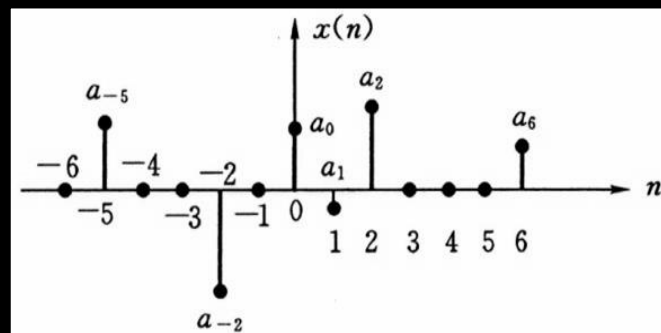
3. 以 N 为周期的序列，只有 N 个可区分的频率点

$$\omega_k = 2k\pi / N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

(正弦与复指数序列的这一特性是离散时间傅里叶分析的理论及算法设计基础)

8、任意序列的单位采样序列表示法

任意一个序列可以用一组移位的单位采样序列的幅度加权和来表示。如图所示的序列 $x(n)$ 可表示成：



$$x(n) = a_{-5}\delta(n+5) + a_{-2}\delta(n+2) + a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_6\delta(n-6)$$

任意序列的一般表达式：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad \delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

这种任意序列的表示方法是离散信号与系统分析中一个很有用的公式

2.1.3 序列的稳定性与因果性

- **稳定性** 序列 $x(n)$ 是稳定的, 当且仅当存在一个固定的有限正数 S 使下式成立

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty, \quad -\infty < n < \infty$$

上式意味着 $x(n)$ 绝对可加 (对应连续信号的绝对可积)

- **因果性** 如果对于 $n < 0$ 时, 序列 $x(n) = 0$, 那么序列 $x(n)$ 称为因果性的 (或物理可实现的)

在线性时不变系统中, 稳定性和因果性有着明确的物理意义

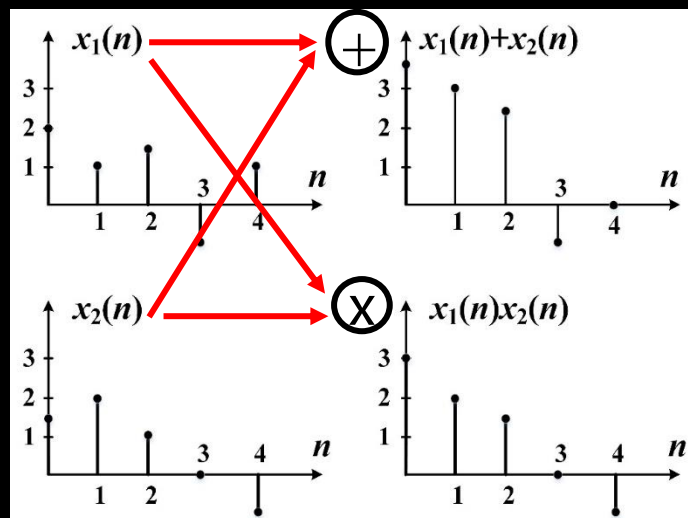
2.1.4 序列的基本运算

■ 序列的相加与相乘

两个序列对应离散时间数值的相加和相乘

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$y(n) = x_1(n)x_2(n)$$



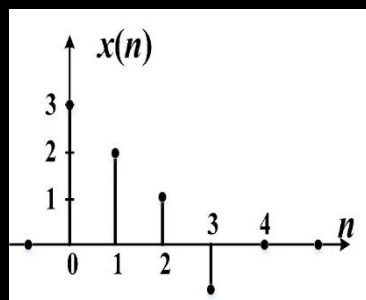
序列的加法和乘法

■ 序列的加权

序列的每个样本值与常数 a 相乘

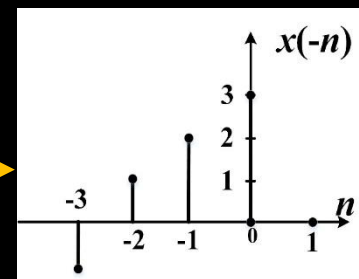
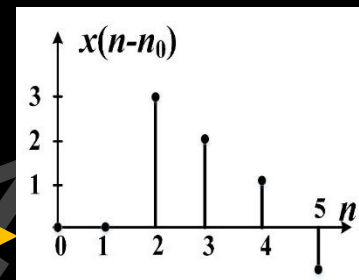
$$ax = a \cdot x(n)$$

■ 序列的移位与反转



当 m 为正时,
 $x(n-m)$ 表示依次右移 m 位;
 $x(n+m)$ 表示依次左移 m 位

将 $x(n)$ 以 $n=0$ 为对称轴反
 转得到序列 $x(-n)$



■ 序列的样本累加

给定区间 $[n_1, n_2]$ 中的所有序列样本值相加

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) = x(n_1) + \cdots + x(n_2)$$

■ 序列的样本相乘

给定区间 $[n_1, n_2]$ 中的所有序列样本值相乘

$$\prod_{n=n_1}^{n_2} x(n) = x(n_1) \times \cdots \times x(n_2)$$

■ 序列的差分

前向差分（先左移后相减）

$$y(n) = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

后向差分（先右移后相减）

$$y(n) = \nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

- 序列的能量

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

- 周期为N 的周期序列的平均功率

$$p_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

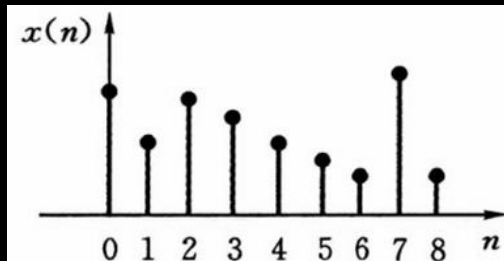
■ 序列的尺度变换 (抽取与内插)

抽取 $x(n) \rightarrow x(mn)$, m 为正整数

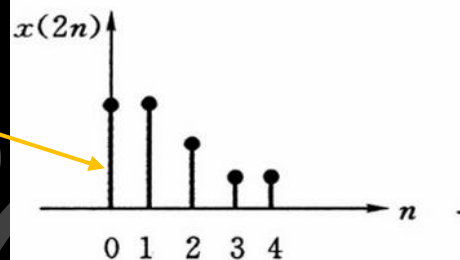
例如, $m=2$, $x(2n)$, 两个点取一点; 波形压缩

插值 $x(n) \rightarrow x(n/m)$, m 为正整数

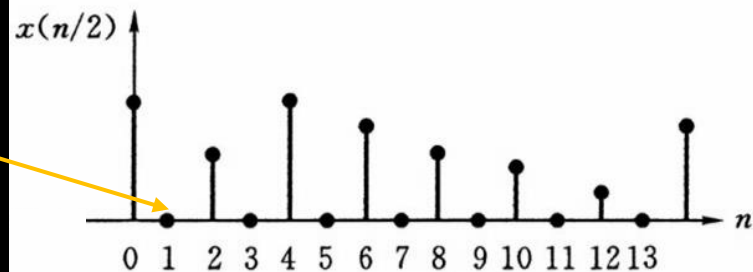
例如, $m=2$, $x(n/2)$, 两个点之间插一个点; 波形扩展



(a) 原序列



(b) 序列压缩 $x(Mn)$, $M=2$



(c) 序列扩展 $x(n/M)$, $M=2$

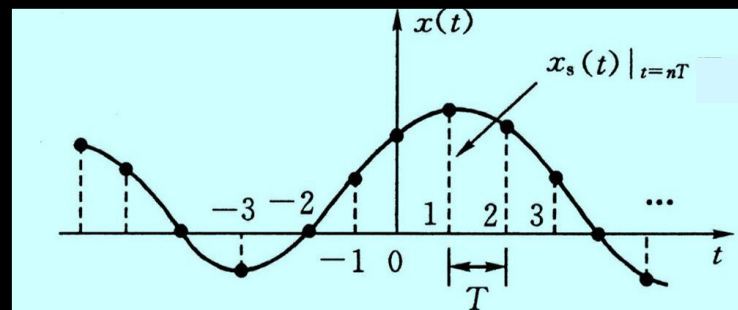
2.2 序列的离散时间傅里叶变换

■ 采样信号的傅里叶变换表示

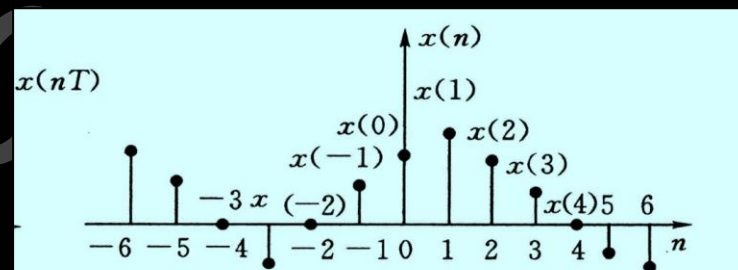
分析
$$X_S(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

综合
$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_S(j\Omega)e^{j\Omega nT} d\Omega$$

$nT \rightarrow n$ 时域的归一化
 $\Omega T = \omega$ 频域的归一化



(a) 对连续时间信号 $x(t)$ 进行采样得到的 $x(nT)$
 (T —采样周期)



(b) 对 $x(nT)$ 进行时间归一化 ($T=1$) 处理得到的 $x(n)$; $x(n)$ 也可表示为离散过程直接产生的离散时间信号

■ 序列信号的傅里叶变换表示

分析
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

综合
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- 傅里叶变换 (分析公式) 用来分析序列 $x(n)$ 所包含的各个频率分量的大小
- 傅里叶反变换 (综合公式) 是将序列 $x(n)$ 表示为一系列无限小的复正弦的叠加

$X_s(j\Omega)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系

将非周期信号的傅里叶变换 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$ 的 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示为无限多积分之和,

每个积分的区间宽度为 $\frac{2\pi}{T}$, 中心为 $\frac{2\pi r}{T}$, r 为整数, 并代入 $t=nT$, 得到

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(-2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(-2r+1)\pi}{T}} X(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

引入变量 $\nu = \Omega + 2\pi r/T$, 将每一积分区间统一到 $[-\pi/T, \pi/T]$, 并考虑到 $e^{-j2\pi r n} = 1$, 然后换回 $\Omega = \nu$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi r}{T}\right) \right] e^{j\Omega nT} d\Omega$$

采样信号的离散时间傅里叶反变换

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

比较

$\omega = \Omega T$ 代入上式 (推导 $X_s(j\Omega)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系)

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi r}{T}\right) \right] e^{j\omega n} d\omega$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

序列信号的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi r}{T}\right)$$

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

(频率的归一化)

□ 小结

- 周期信号的傅里叶级数表示

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Omega_0) e^{jn\Omega_0 t}$$

$$X(n\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

任何周期信号都可以用傅里叶级数表示

- 非周期信号的傅里叶变换

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

对非周期信号进行周期延拓

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$$

- 采样信号的离散时间傅里叶变换

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega$$

对连续时间信号进行等间隔采样

$$x_s(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

采样信号频谱与原连续信号频谱的关系

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

- 序列信号的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

离散序列的频谱与采样信号频谱的关系

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi r}{T}\right)$$

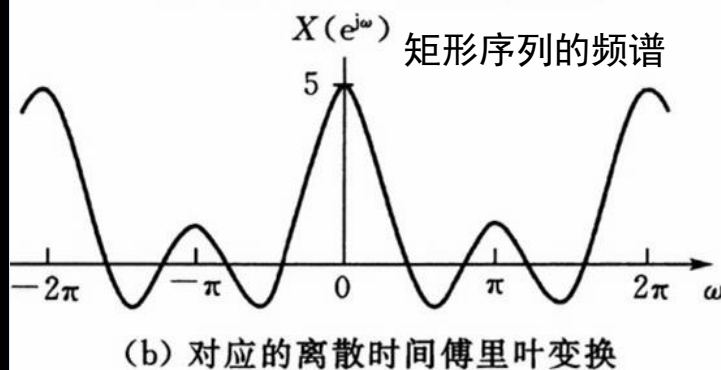
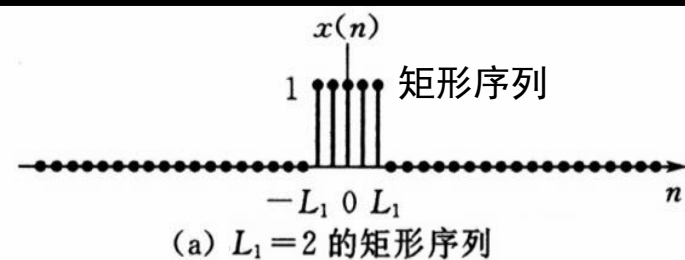
$$X_S(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

例 求矩形序列的离散时间傅里叶变换

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -L_1 \leq n \leq L_1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L_1}^{L_1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{\sin \omega \left(L_1 + \frac{1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} \right)} \quad \left(\text{利用几何级数的前 } L_1 \text{ 项之和公式} \right)$$

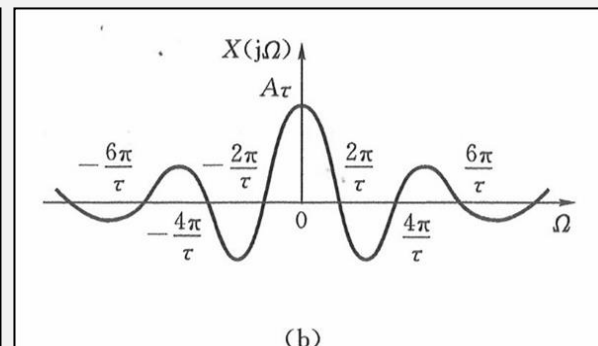
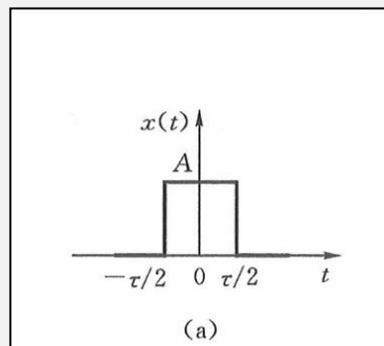


矩形序列的频谱是连续的，是频率变量 ω 的周期函数，其周期是 2π （与矩形脉冲比较-举例）

非周期矩形脉冲信号的频谱分析

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其它 } t \end{cases}$$

$$X(j\Omega) = A\tau \frac{\sin \left(\frac{\Omega\tau}{2} \right)}{\left(\frac{\Omega\tau}{2} \right)}$$



- 序列的傅里叶变换收敛的一个**充分条件**是序列绝对可加

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \end{aligned}$$

序列的绝对可加保证了傅里叶级数**一致收敛**到一个 ω 的连续函数

- 稳定序列是绝对可加的，必然存在傅里叶变换

例 稳定的指数序列的傅里叶变换

$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

序列 $x(n)$ 是绝对可加的，因此它的离散时间傅里叶变换存在

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$ (无穷级数的紧凑表示)

故有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-a}$$

- 非绝对可加，但平方可加的序列

放宽 $X(e^{j\omega})$ 定义中无限求和项的一致收敛为均方收敛，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} - \sum_{n=-M}^M x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 d\omega = 0$$

偏差未必趋于零，但偏差的“能量”趋于零

非因果的、非绝对可加的

2.3 离散时间傅里叶变换的性质

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

1. 周期性

由于 $e^{-j(\omega+2\pi r)n} = e^{-j\omega n}$, r 为整数, 故有

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi r)})$$

序列的离散时间傅里叶变换是 ω 的周期函数 (周期 2π), 在计算或分析的过程中, 只需考虑 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期, 即 $\omega \in [0, 2\pi]$ 或 $[-\pi, \pi]$

2. 对称性

- 任意序列可表示为共轭对称与共轭反对称序列之和

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] = x_e^*(-n)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] = -x_o^*(-n)$$

共轭对称实序列即为偶序列，共轭反对称实序列即为奇序列

- 傅立叶变换可表示为共轭对称与共轭反对称函数之和

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

共轭对称 $X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e^*(e^{-j\omega})$

共轭反对称 $X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = -X_o^*(e^{-j\omega})$

共轭对称实函数即为偶函数，共轭反对称实函数即为奇函数

■ 任意序列的傅里叶变换是共轭对称的

实序列的DTFT $X(e^{j\omega})$ 是共轭对称的, 即 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$, 用实部和虚部表示为

$$X(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j\text{Im}[X(e^{j\omega})]$$

则得

$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \quad \text{偶对称}$$

$$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \quad \text{奇对称}$$

极坐标形式.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})} \\ &= |X(e^{-j\omega})|e^{-j\angle X(e^{-j\omega})} = X^*(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

实序列傅里叶变换的实部是偶函数

实序列傅里叶变换的虚部是奇函数

实序列傅里叶变换的幅值是偶函数

实序列傅里叶变换的相位是奇函数

■ 对称性的两个基本性质

1、如果 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则有 $X^*(e^{-j\omega}) = \mathcal{F}[x^*(n)]$

证明

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) e^{j\omega n}]^* \\ &= X^*(e^{-j\omega})\end{aligned}$$

序列 $x(n)$ 在时域中的共轭对应于 $X(e^{j\omega})$ 在频域中的反转和共轭

2、如果 $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)]$, 则有 $X^*(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x^*(-n)]$

证明

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^*(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) e^{-j\omega n}]^* = X^*(e^{j\omega})\end{aligned}$$

序列 $x(n)$ 在时域中的反转和共轭对应于 $X(e^{j\omega})$ 在频域中的共轭

■ 序列的实、虚部与其傅里叶变换的偶、奇部的关系

1. 序列实部的傅里叶变换等于其傅里叶变换的偶部

$$\mathcal{F}[\operatorname{Re}\{x(n)\}] = X_e(e^{j\omega})$$

证明

因为
$$\operatorname{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

故
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\operatorname{Re}\{x(n)\}] &= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \\ &= X_e(e^{j\omega})\end{aligned}$$

2. 序列 j 倍虚部的傅里叶变换等于其傅里叶变换的奇部

$$\mathcal{F}[j\operatorname{Im}\{x(n)\}] = X_o(e^{j\omega})$$

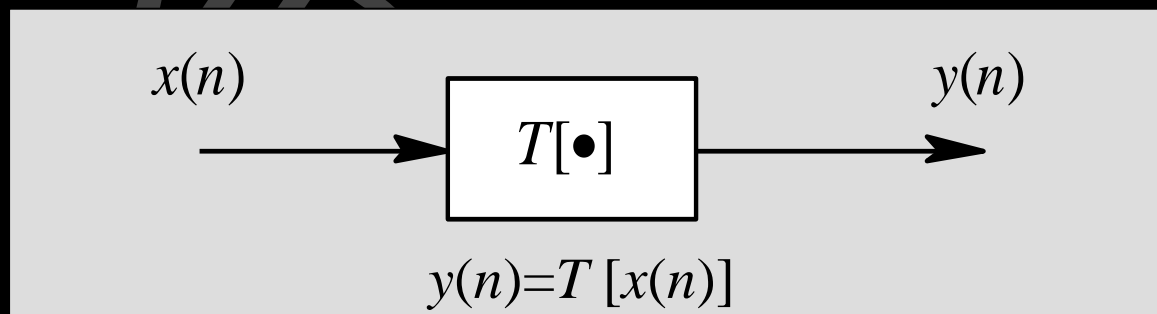
证明

因为
$$\operatorname{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] = x_e^*(-n)$$

故
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[j\operatorname{Im}\{x(n)\}] &= \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \\ &= X_o(e^{j\omega})\end{aligned}$$

2.4 离散时间系统

输入与输出都是离散序列的系统定义为离散时间系统（线性和非线性两大类），离散时间系统数学上可定义为一个**变换或算子**，将输入序列**映射**为输出序列



对变换 $T[\cdot]$ 的不同约束条件定义了各类不同的离散系统

- 线性和时不变的约束条件定义了一类可以用“**卷积和**”表示的系统
- 以**因果性**和**稳定性**的约束，定义了在实际应用中一类很重要的离散线性时不变系统
- 线性系统的输出序列 $y(n)$ 的第 n 个样本的值依赖于输入序列 $x(n)$ 的**所有或部分样本**

2.4.1 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别作为系统的输入序列，其输出分别用 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 表示

$$y_1(n)=T [x_1(n)] , y_2(n)=T [x_2(n)]$$

那么线性系统一定满足

$$T [x_1(n)+x_2(n)] = T [x_1(n)]+T[x_2(n)] = y_1(n)+y_2(n) \quad (1)$$

$$T [ax_1(n)] = aT [x_1(n)] = a y_1(n), \quad a \text{是常数} \quad (2)$$

满足(1)式称为线性系统的**叠加性**；满足(2)式称为线性系统的**比例性或齐次性**；如线性系统同时满足式 (1) 和 (2)

$$y(n) = T [ax_1(n)+bx_2(n)] = ay_1(n)+by_2(n), \quad a \text{和} b \text{均是常数}$$

则称该线性系统满足齐次性和叠加性

如累加器

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

2.4.2 离散线性时不变系统

如果系统对输入信号的运算关系 $T[\cdot]$ 在整个运算过程中不随时间变化,或者说系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关,则这种系统称为时不变系统,用公式表示如下

$$y(n) = T[x(n)]$$

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

例 讨论 $y(n)=ax(n)+b$ 代表的系统是否是时不变系统
式中 a 和 b 是常数

解

$$y(n) = ax(n)+b$$

$$y(n-k) = ax(n-k)+b$$

$$y(n-k) = T[x(n-k)]$$

因此该系统是时不变系统

例 讨论 $y(n)=nx(n)$ 所代表的系统是否是时不变系统

解 时不变性条件：一个离散时间系统是时不变的，如果对于任意输入信号 $x(n)$ 和任意时间偏移 k ，系统的输出满足条件： $y(n-k) = T[x(n-k)]$

1. 对输入信号进行时间偏移 $x'(n)=x(n-k)$ ，然后将 $x'(n)$ 代入系统方程，得到：

$$y'(n) = T[x'(n)] = T[x(n-k)] = nx(n-k)$$

这是对时间偏移后的输入的系统输出，不要误解为系统对 $n-k$ 的输出

2. 计算原系统输出的时间偏移，对原系统输出 $y(n) = nx(n)$ 向右偏移 k ，得到：

$$y(n-k) = (n-k)x(n-k)$$

原系统输出的时间偏移

比较 $y'(n)=nx(n-k)$ 和 $y(n-k) = (n-k)x(n-k)$ ，显然这个表达式并不相等，即

$$y(n-k) \neq T[x(n-k)], \text{ 除非 } k=0$$

因此，该系统不是一个时不变系统

同样方法可以证明 $y(n)=e^{-n}x(n)$ 所代表的系统是一个时变系统

■ 离散线性时不变系统输入与输出之间的关系

设系统的输入 $x(n)=\delta(n)$ ，系统输出 $y(n)$ 的初始状态为零；定义这种条件下系统输出称为系统的单位采样响应，用 $h(n)$ 表示。换句话说，单位采样响应是系统对于 $\delta(n)$ 的零状态响应。用公式表示为

$$h(n)=T [\delta(n)]$$

$h(n)$ 与模拟系统中的 $h(t)$ 单位冲激响应相类似，都代表系统的时域特征

设系统的输入为 $x(n)$ ，并把 $x(n)$ 表示成单位采样序列移位的加权和，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

把系统的输入 $x(n)$ 表示成单位采样序列移位的加权和

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

则线性系统的输出为

$$y(n) = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$

根据线性系统的性质

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$$

又根据时不变性质

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ &= x(n) * h(n) \end{aligned}$$

上式表示线性时不变系统的输出等于输入序列 $x(n)$ 和该系统的单位采样响应 $h(n)$ 的卷积。只要知道系统的单位采样响应 $h(n)$ ，按照上式，对于任意输入 $x(n)$ 都可以求出系统的输出 $y(n)$

■ 离散线性卷积公式

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

离散域的卷积定理 $y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

$$y(n) = x(n) h(n) \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

连续域的卷积定理 $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow X(j\Omega)H(j\Omega)$

$$y(t) = h(t)x(t) \Leftrightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} H(j\Omega) * X(j\Omega)$$

离散域卷积
是**周期卷积**

而连续域的卷积是**无限积分** $\int_{-\infty}^{\infty}$

■ 卷积求解过程

离散卷积公式

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

按照以下三个步骤可得到卷积结果 $y(n)$

- 1、将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 用 $x(m)$ 和 $h(m)$ 表示, 并将 $h(m)$ 进行反转, 形成 $h(-m)$;
- 2、将 $h(-m)$ 移位 n , 得到 $h(n-m)$; 当 $n>0$ 时, 序列右移; $n<0$ 时, 序列左移;
- 3、将 $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相同 m 的序列值对应相乘后, 再相加。

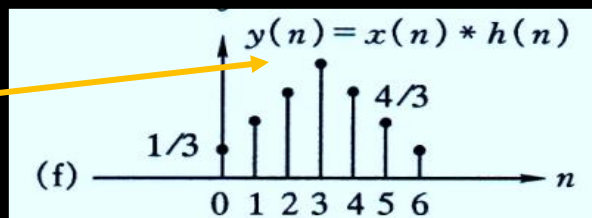
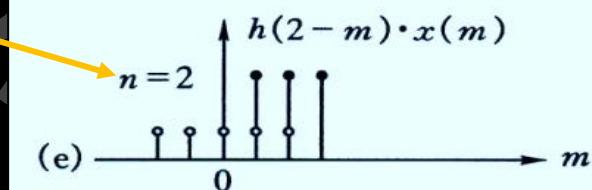
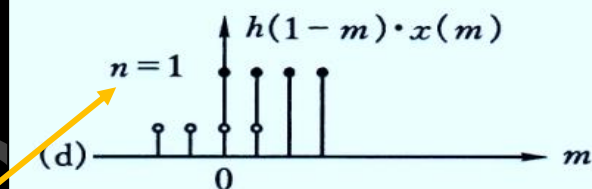
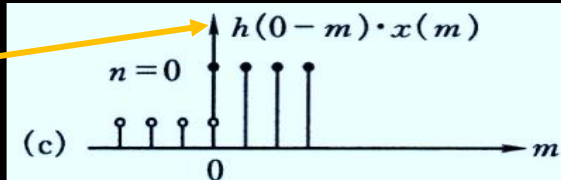
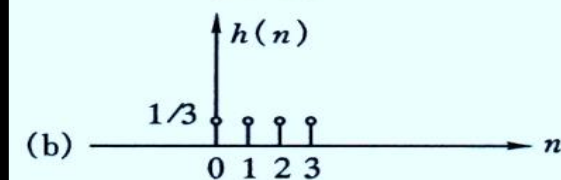
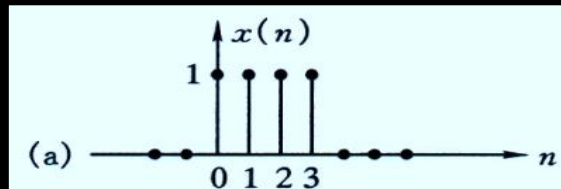
离散线性时不变系统卷积过程的图解说明

$$y(n) = \sum_{m=0}^3 x(m)h(n-m)$$

1. 将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 用 $x(m)$ 和 $h(m)$ 表示，并将 $h(m)$ 进行反转，形成 $h(-m)$ ；

2. 将 $h(-m)$ 移位 n ，得到 $h(n-m)$
当 $n > 0$ 时，序列右移；
当 $n < 0$ 时，序列左移；

3. 将 $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相同 m 的序列对应相乘后，再相加。



例 设 $x(n)=R_4(n)$, $h(n)=R_4(n)$, 求 $y(n) = x(n) * h(n)$

解 按照式

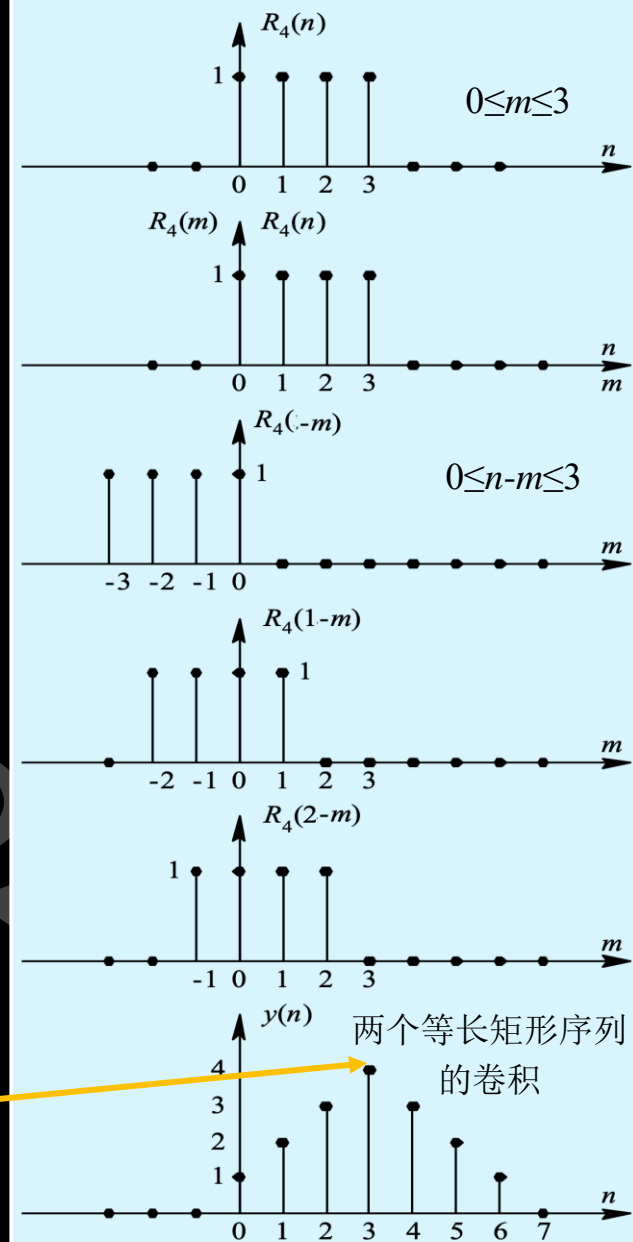
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)R_4(n-m) \quad \text{矩形序列长度为4}$$

求解上式需要先根据矩形序列的非零值区间确定求和的上、下限, $R_4(m)$ 的非零值区间为: $0 \leq m \leq 3$, $R_4(n-m)$ 的非零值区间为: $0 \leq n-m \leq 3$, 其乘积值的非零区间, 要求 m 同时满足以下两个不等式: $0 \leq m \leq 3$, $n-3 \leq m \leq n$

因此

$$0 \leq n \leq 3, \quad y(n) = \sum_{m=0}^n 1 = n + 1$$

$$4 \leq n \leq 6, \quad y(n) = \sum_{m=n-3}^3 1 = 7 - n$$



卷积过程以及 $y(n)$ 波形如图所示, $y(n)$ 用公式表示为

$$y(n) = \begin{cases} n + 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 7 - n, & 4 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 卷积的运算是反转、移位、相乘和相加，这类卷积称为序列的线性卷积。设两序列各自长度分别是 N 和 M ，线性卷积后的序列长度为 $(N+M-1)$

- 线性卷积满足

1. 交换律

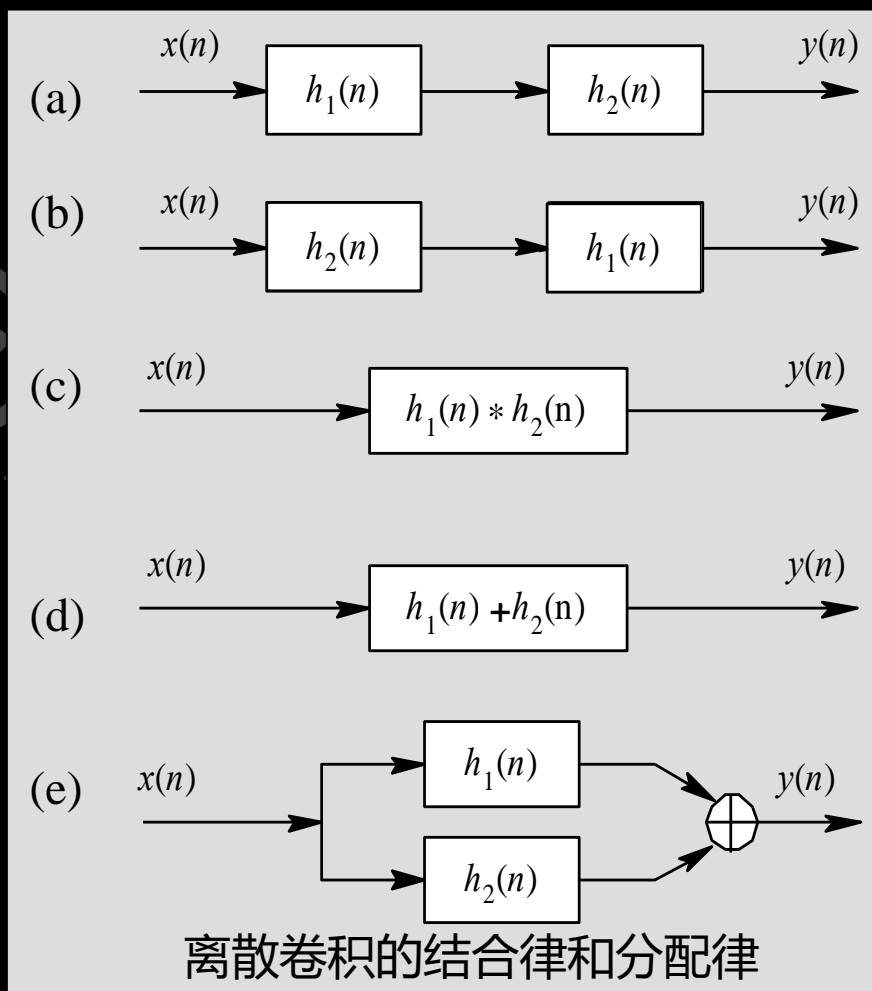
$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

2. 结合律 图(a)、(b)、(c)

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \end{aligned}$$

3. 分配律 图(d)、(e)

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$



2.4.3 离散线性时不变系统的因果性

- 因果性是对一类线性时不变系统的约束条件

如果系统的输出 $y(n)$ 只取决于 n 时刻和 n 时刻以前的输入，而与 n 时刻以后的输入序列无关，则称该系统具有**因果性质**，或称该系统为**因果系统**；如果 n 时刻的输出还取决于 n 时刻以后的输入序列，在时间上违背了因果性，系统无法实现，则系统被称为**非因果系统**。因此**系统的因果性是指系统的可实现性**。

线性时不变系统具有**因果性的充分必要条件**是系统的单位采样响应满足下式

$$h(n)=0, \quad n<0$$

满足上式条件的序列称为因果序列，因此因果系统的单位采样响应必然是因果序列。

因果性系统的条件式从概念上也容易理解，因为单位采样响应是输入为 $\delta(n)$ 的零状态响应，在 $n=0$ 时刻以前即 $n<0$ 时，没有加入信号，输出只能等于零，因此系统满足因果性的条件为

$$h(n)=0, \quad n<0$$

(讨论因果性的证明)

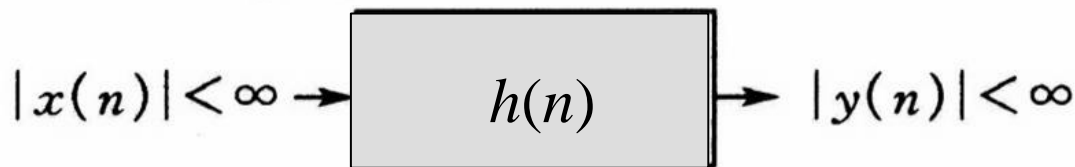
2.4.4 离散线性时不变系统的稳定性

- 稳定性是线性系统理论中的一个重要概念

有界输入有界输出 (BIBO) 稳定性: 当且仅当每一个有界的输入序列都产生有界的输出序列, 则该系统是BIBO稳定的。

稳定性的充要条件是系统的单位采样响应绝对可加

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq S < \infty$$



输入

离散时间系统

输出

离散时间系统的稳定条件

根据 $h(n)$ 的时宽, : **有限冲激响应** (finite impulse response, FIR) 和**无限冲激响应** (infinite impulse response, IIR) 两类系统

稳定系统的充分必要条件的证明

证明：充分性

因为输入序列 $x(n)$ 有界，即

$$|x(n)| \leq M < \infty, \quad -\infty < n < \infty, \quad M \text{ 为任意有限正数}$$

如果系统的单位采样响应 $h(n)$ 满足下式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

由卷积公式得到输出 $y(n)$ 为

$$|y(n)| \leq \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M \cdot S < \infty$$

因此，输出 $y(n)$ 是有界的，所以系统一定是稳定的。

证明：必要性

利用反证法。如果 $h(n)$ 不满足

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$$

那么总可以找到一个或若干个有界的输入引起无界的输出，例如

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(-n) \neq 0 \\ 0, & h(-n) = 0 \end{cases}$$

显然 $|x(n)|$ 是有界的（1或0），当 $n < 0$ 时，系统的输出为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$\text{令 } n = 0$$

$$y(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(0-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \frac{h^*(m)}{|h(m)|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{h^*(m)^2}{|h(m)|} = S$$

因此，若 $S = \infty$ ，则一个有界的输入产生一个无界的输出，这与稳定性的定义相矛盾。故 $S < \infty$ ，即系统的单位采样响应绝对可加是稳定系统的必要条件

例 设线性时不变系统的单位取样响应 $h(n)=a^n u(n)$ ，式中 a 是实常数，试分析该系统的因果性和稳定性。

解 由于 $n<0$ 时， $h(n)=0$ ，所以系统是因果系统。由稳定性条件，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} |a|^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - |a|^N}{1 - |a|}$$

只有当 $|a| < 1$ ，由无限项集合级数求和公式得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} \leq S < \infty$$

上式是收敛的。因此，系统稳定的条件是 $|a| < 1$ ；系统稳定时， $h(n)$ 的模值随 n 加大而减小，此时，序列 $h(n)$ 称为**收敛序列（有界）**。 $|a| \geq 1$ 时，系统不稳定， $h(n)$ 的模值随 n 加大而增大，则称为**发散序列（无界）**。

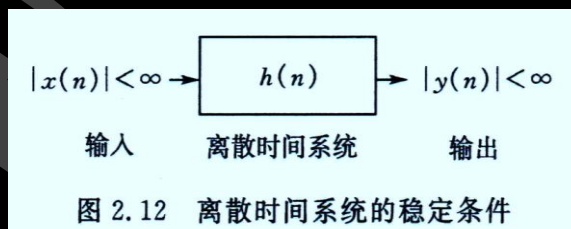
(讨论线性时不变系统的单位取样响应为 $h(n)=u(n)$ ，系统的因果性和稳定性)

小结：离散线性时不变系统的因果性和稳定性

因果性：

对一类重要的线性时不变系统的约束条件，系统的输出 $y(n)$ 只取决于 n 时刻和 n 时刻以前的输入。

稳定性的定义：



稳定性的充要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq S < \infty$$

- 根据 $h(n)$ 的时宽：有限冲激响应（**FIR**）和无限冲激响应（**IIR**）两类系统
- **FIR** 系统总是稳定的，**IIR** 系统虽然 $h(n)$ 是无限时宽的，但只要输出是有界的，其系统就是稳定的
- 把 $h(n)$ 是否有时宽或无限时宽与稳定性区分开来

■ 线性时不变系统可由其单位采样响应 $h(n)$ 完全刻画

$$\begin{aligned}
 y(n) &= T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T\{\delta(n-m)\} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)
 \end{aligned}$$

1、线性时不变系统是稳定的，当且仅当其单位采样响应 $h(n)$ 是绝对可加的

$$B_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = S < \infty$$

2、线性时不变系统是因果的，当且仅当其单位采样响应 $h(n)$ 是因果序列

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

几种典型的线性时不变系统的单位采样响应

■ 累加器

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

■ 理想延迟系统

$$h(n) = \delta(n - n_d), \quad -\infty < n < +\infty$$

■ 移动平均系统

$$h(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta(n - k)$$

输出序列的第 n 个样本是输入序列第 n 个样本附近的 $(M_1 + M_2 + 1)$ 个样本的平均值

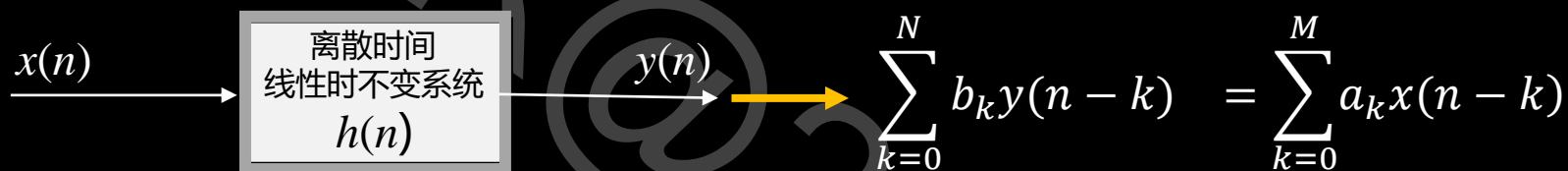
■ 无记忆系统

系统在每一个 n 时刻的输出只取决于该时刻的 $x(n)$ 值, 如, $y(n) = [x(n)]^2$ 就是这类系统、对于理想单元延迟系统, 当 $n_d = 0$ 时系统是无记忆的

2.4.5 用差分方程表示离散线性时不变系统

分析一个系统，可以将系统看成一个黑盒子，只描述或者研究系统输出和输入之间的关系，这种方法称为**输入输出描述法**。对于模拟系统，是由微分方程描述系统输出输入之间的关系；对于**离散时间系统**，则用**差分方程**描述输出输入之间的关系。对于**离散线性时不变系统**，经常用的是**线性常系数差分方程**。

■ 任何离散线性时不变系统的输入与输出满足 N 阶线性常系数差分方程

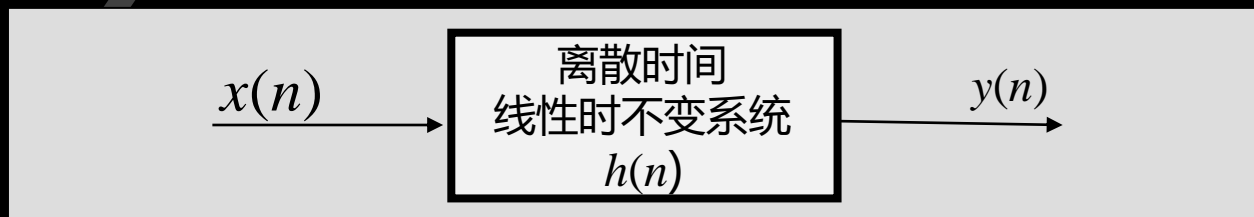


$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{b_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{b_0} y(n-k), \quad b_0 \neq 0$$

- **常系数**: $a_0, a_1, \dots, a_M; b_0, b_1, \dots, b_N$ 均是常数 (不含 n)
- **阶数**: $y(n)$ 变量 k 的最大序号与最小序号之差, 如 $N=N-0$
- **线性**: $y(n-k)$ 与 $x(n-m)$ 各项只有一次幂, 且不含它们的乘积项
- **线性常系数差分方程求解**: 时域: 递推法、卷积和法; 变换域: z 变换法

2.4.5 用差分方程表示离散线性时不变系统

任何离散线性时不变系统的输入与输出满足 N 阶线性常系数差分方程



$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{b_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{b_0} y(n-k), \quad b_0 \neq 0$$

- **常系数**: $a_0, a_1, \dots, a_M; b_0, b_1, \dots, b_N$ 均是常数 (不含 n)
- **阶数**: $y(n)$ 变量 k 的最大序号与最小序号之差, 如 $N=N-0$
- **线性**: $y(n-k)$ 与 $x(n-m)$ 各项只有一次幂, 且不含它们的乘积项
- **线性常系数差分方程求解**: 时域: 递推法、卷积和法; 变换域: z 变换法

■ 用迭代法求解差分方程

例 已知常系数线性差分方程为 $y(n)=x(n)+by(n-1)$ ，求满足该方程的因果系统的单位采样响应 $h(n)$

解 为了得到系统的单位采样响应，令 $x(n) = \delta(n)$ ，于是，有 $y(n) = h(n)$

系统方程变为 $h(n) = bh(n-1) + \delta(n)$

因果系统有 $h(n)=0, n<0$ （这是初始条件）；

系统方程： $h(n) = bh(n-1) + \delta(n)$ ，初始条件： $h(n)=0, n<0$

$$h(1) = bh(0) + \delta(1) = b \cdot 1 + 0 = b$$

$$h(2) = bh(1) + \delta(2) = b^2 + 0 = b^2$$

$$h(3) = bh(2) + \delta(3) = b^3 + 0 = b^3$$

⋮

$$h(n) = bh(n-1) + \delta(n) = b^n + 0 = b^n, \quad n \geq 0$$

归纳得到 $h(n)=b^n u(n)$ ，对应一个因果系统，且 $|b| < 1$ 时稳定

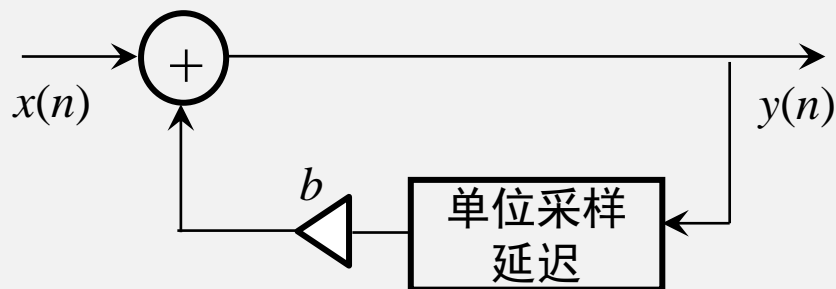
如果初始条件： $h(n)=0, n > 0$ ，则递推得

$$h(n) = -b^n u(-n-1) \quad \text{对应一个非因果系统，且 } |b| > 1 \text{ 时稳定}$$

■ 由上例可以看到

1. 差分方程本身并不能确定该系统是因果还是非因果系统，相应的初始条件决定系统是否满足因果性
2. 如果没有**初始条件约束**，不能唯一地确定线性常系数差分方程的解，即不能唯一地确定系统的输入与输出之间的关系
3. 对于实际系统，用递推解法求解，总是由初始条件向 $n>0$ 的方向递推，是一个**因果解**；但对于差分方程，其本身也可以向 $n<0$ 的方向递推，得到的是**非因果解**

■ 差分方程的递推数值解法中的三种基本运算



一阶差分方程描述的离散线性时不变系统 (讨论)

加法、乘法、延迟

对于一个给定的离散线性时不变系统，可以有多个不同的差分方程表达

- 零阶线性常系数差分方程 (没有反馈项)

$$y(n) = \sum_{m=0}^M \frac{a_m}{b_0} x(n-m)$$

相应的单位采样响应为

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{b_0} \delta(n-k) = \begin{cases} \left(\frac{a_n}{b_0}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

FIR系统的输出可以无需递归地被计算

- 本课程后面讨论中，常系数线性差分方程就代表线性时不变系统，且多数代表因果系统

2.5 离散时间系统的频率响应函数

2.5.1 对复指数序列的响应

线性时不变系统的一个重要特性是对某些类型的输入特征函数，其输出依然保持同样的特征函数，复指数函数是这种特征函数之一（**讨论**）

- 复指数序列 $e^{j\omega n}$ 是线性时不变系统的**特征函数**

$$y(n) = T[e^{j\omega n}] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}$$

若定义

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}$$

则 $y(n)$ 可表示为

$$y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$$

系统对 $e^{j\omega n}$ 输入所产生的输出序列 $y(n)$ 依然是具有相同频率的复指数序列，只是乘了一个复数常数 $H(e^{j\omega})$ （又称**特征值**）

- **特征值** $H(e^{j\omega})$ 是频率 ω 的函数，描述了由系统导致的复指数输入信号在复振幅上的变化，称为**系统的频率响应**
- 通常， $H(e^{j\omega})$ 为复数
$$H(e^{j\omega}) = \text{Re}[H(e^{j\omega})] + j\text{Im}[H(e^{j\omega})] = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$
- 系统的单位采样响应 $h(n)$ 可由其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的离散时间傅里叶反变换求得

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- 离散时间线性时不变系统的频率响应是频率 ω 的周期函数，周期为 2π

$$\begin{aligned} H(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} e^{-j2\pi k} = H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

- 1、频率 ω 与 $(\omega+2r\pi)$ 复指数序列是无法区别的
- 2、只需要给出 2π 区间内的 $H(e^{j\omega})$ 即可，一般取 $-\pi < \omega \leq \pi$

2.5.2 对任意序列的响应

系统的单位采样响应为 $h(n)$ ，系统的输入为任意绝对可加序列 $x(n)$ ，且有 $h(n) \Leftrightarrow H(e^{j\omega})$ ， $x(n) \Leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ，系统的输出由离散线性卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 给出。由卷积性质可知，系统的输入和输出的离散时间傅里叶变换存在以下关系

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

系统的单位采样响应 $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 称作系统频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

由上可知，输出序列 $y(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$ 由输入序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 与该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 相乘得到。

由 $Y(e^{j\omega})$ 的离散时间傅里叶反变换得到系统的输出 $y(n)$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{(讨论)}$$

2.5.3 利用差分方程求频率响应函数

离散线性时不变系统的 N 阶差分方程

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

应用DTFT时间移位特性, 即 $x(n-k) \Leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega k}$

为分析方便, 设式中 $b_0=1$ 。对上式两边进行离散时间傅里叶变换(DTFT)

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^M a_k e^{-j\omega k}, \quad b_0 = 1$$

因此, 系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}} = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \dots + a_M e^{-jM\omega}}{1 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega} + \dots + b_N e^{-jN\omega}}$$

由上式可知, 离散线性时不变系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 可以用两个 $e^{-j\omega}$ 的多项式之比来描述, 将不同的 ω 代入上式, 就可以求出系统的频率特性

本章小结

- 离散时间序列：基本序列及其运算
- 离散时间序列的傅里叶变换表示
- 离散时间傅里叶变换的性质
- 离散线性时不变系统
- 离散时间系统的频率响应函数