# 作业：

7.2、7.4、7.6、7.8、7.10、7.13，以及以下题目

1、采用窗函数法设计一个线性相位FIR数字低通滤波器，技术指标为通带截止频率$w_p=0.2\pi$，阻带截止频率$w_{st}=0.4\pi$，阻带衰减$A_s=45$dB。求$h(n)$并画出幅度响应和相位响应曲线草图。

2、采用窗函数法设计一个线性相位FIR数字高通滤波器，技术指标为通带截止频率$w_p=0.7\pi$，阻带截止频率$w_{st}=0.5\pi$，阻带衰减$A_s=55$dB。求$h(n)$并画出幅度响应和相位响应曲线草图。

3、采用频率采样法设计一个线性相位FIR数字低通滤波器，其通带截止频率为$w_p=0.3\pi$，过渡带宽为$\Delta\omega=0.1\pi$，阻带最小衰减为50dB，试确定过渡带采样点的个数$m$，并用累试法确定过渡带中采样点频率响应的值，滤波器的长度$N$，写出$H(k)$的表达式，并求滤波器的$h(n)$及$H(w)$。

# 第七章 FIR数字滤波器设计

杨勐 教授

# ■ 线性相位是数字信号处理的基本要求

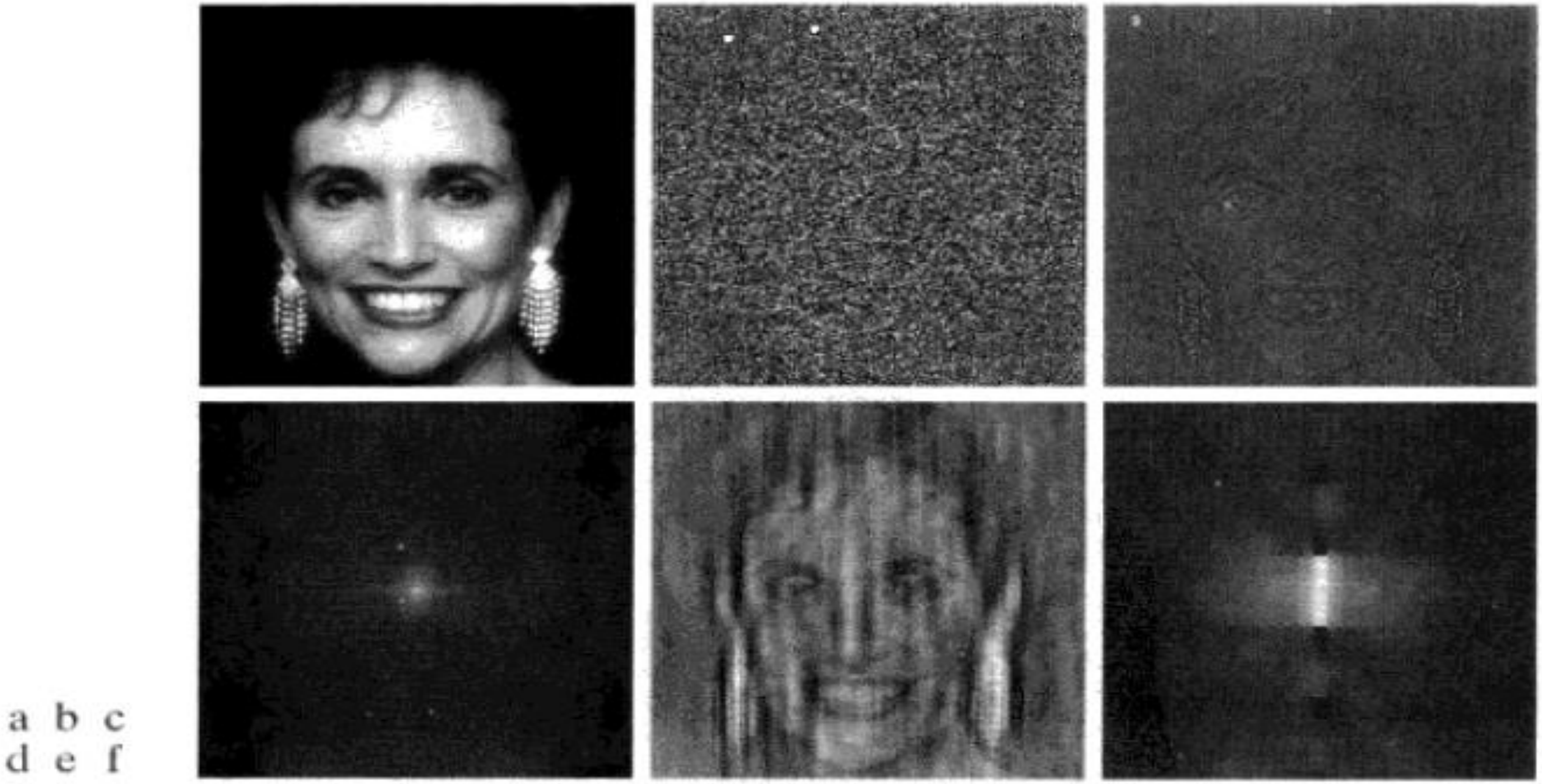
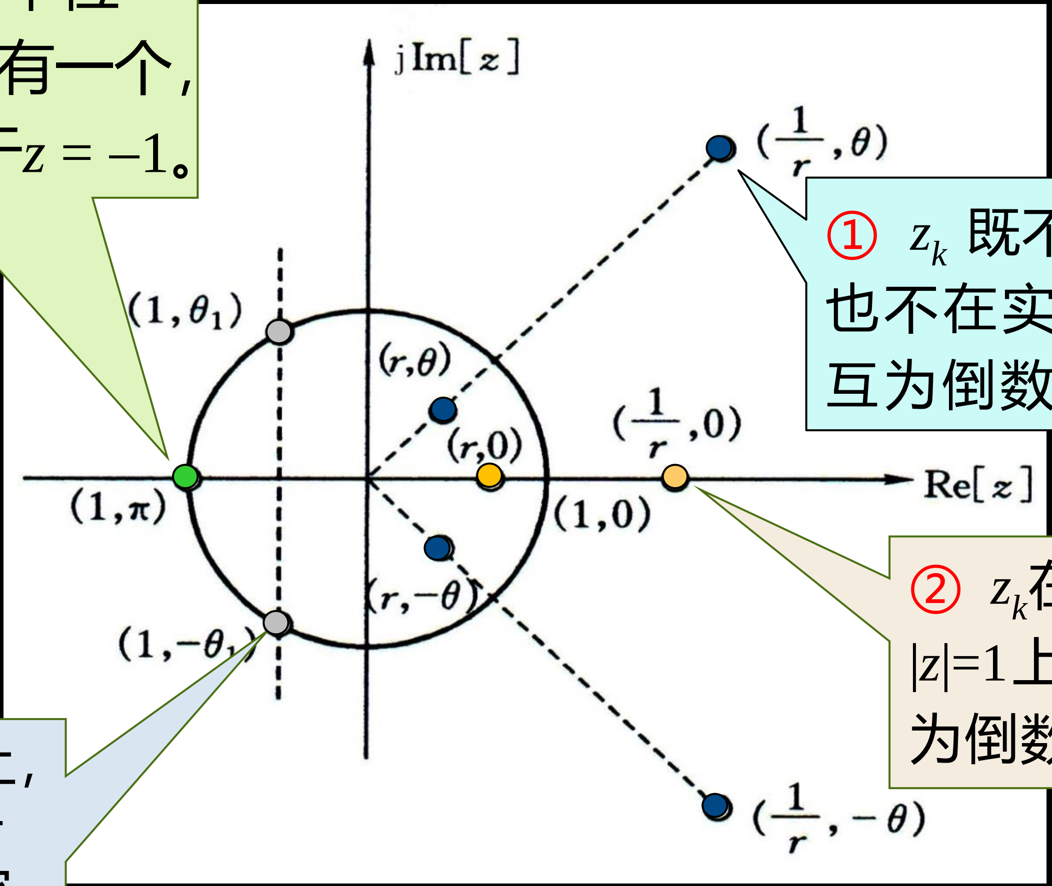



图 4.27 (a) 妇女图像；(b) 相角；(c) 仅使用相角重建的妇女图像；(d) 仅使用谱重建的妇女图像；(e) 使用对应于妇女图像的相角和对应于图 4.24 (a) 中矩形的谱重建的妇女图像；(f) 使用矩形的相角和妇女图像的谱重建的图像

# ■ 回顾：线性相位FIR滤波器的零点分布

④ $z_k$ 在实轴上和单位圆上，则零点只有一个，或位于z=1或位于z = –1。



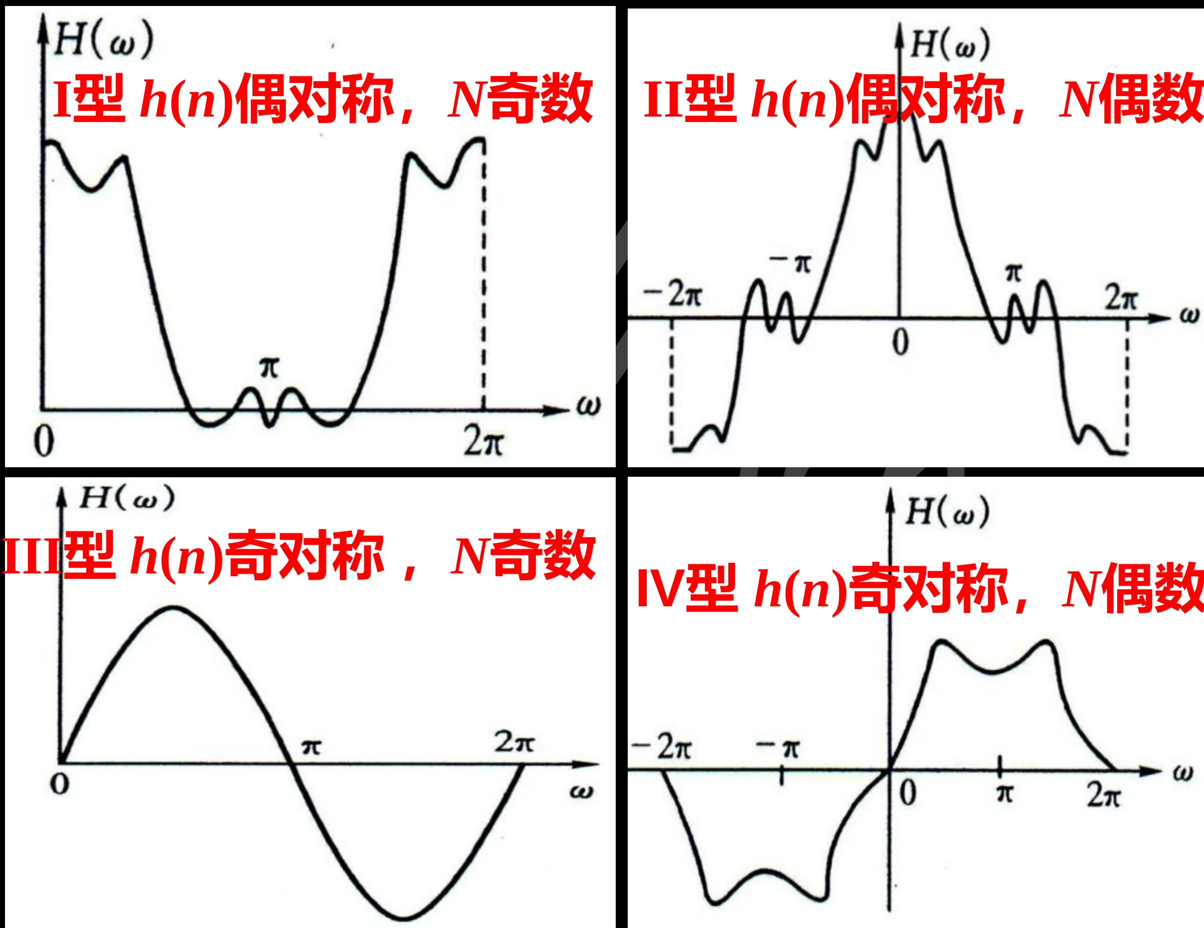

① $z_k$ 既不在单位圆上，也不在实轴上，有四个互为倒数的两组共轭对。

② $z_k$在实轴上，不在|z|=1上，则零点是互为倒数两个实数零点。

③当 $z_k$不在实轴上，但在|z|=1上，由于共轭对的倒数是它们本身，故此时零点是一组共轭对。

$$H(z_k) = \pm z_k^{-(N-1)} H(z_k^{-1})$$

# ■ 回顾：线性相位FIR滤波器的零点分布




$$\boxed{H\left(z_k\right)=\pm z_k^{-(N-1)}H\left(z_k^{-1}\right)}$$

- **I型**：零点无限制，滤波器类型不限。
- **II型**：$H(\pi)=0$，因此在$z=-1$处必有一阶零点，不能设计高通、带阻。
- **III型**：$H(0)=0$，$h(\pi)=0$，因此在$z=1$，-1处必有两个一阶零点，只能设计带通。
- **IV型**：$H(0)=0$，因此在$z=1$处必有一阶零点，不能设计低通、带阻。

## 概述：

- 滤波器的设计是依据某种准则设计出一个频率特性去逼近于指标要求的滤波器系统函数$H(z)$或频率响应$H(e^{j\omega})$。
- FIR滤波器的设计就在于寻找一个频率响应函数

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}h\left(n\right)e^{-jn\omega}}$$

去逼近所需要的指标，逼近方法主要有四种：

$$\begin{cases}\text{傅里叶级数展开} & \\ \text{窗函数法} & \text{(时域逼近)} \\ \text{频率采样法} & \text{(频域逼近)} \\ \text{等波纹逼近} & \text{(最优化设计)}\end{cases}$$

# 7.1 傅里叶级数展开法设计FIR滤波器

- 设希望设计的理想滤波器频率响应函数为$H_d(e^{j\omega})$，用傅里叶级数展开

$$H_{\mathrm{d}}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{d}}(n) e^{-j\omega n}$$

$$H_{\mathrm{d}}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\mathrm{d}}(n) z^{-n}$$

$h_d(n)$是傅里叶系数:

$$h_{\mathrm{d}}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} H_{\mathrm{d}}\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$h_{\mathrm{d}}(n)$是无限时宽，且为非因果，这样的系统不能实现

对$h_d(n)$**截断**，得到

$$H_N(z)=\sum_{n=-M}^{M}h_{\mathrm{d}}(n)z^{-n},M=\frac{N-1}{2}$$

并**移位**$M=(N\text{-}1)/2$，得到

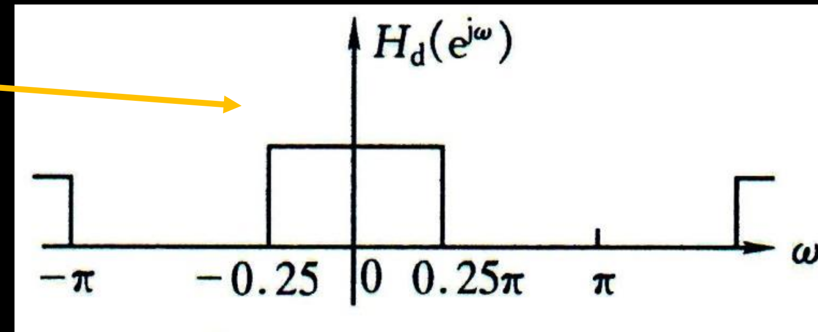
$$\boxed{H(z)=\sum_{n=0}^{2M}h_{\mathrm{d}}(n-M)z^{-n},M=\frac{N-1}{2}}$$

- 定义逼近误差

$$\boxed{E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_{\mathrm{d}}\left(e^{j\omega}\right)-H\left(e^{j\omega}\right)\right|d\omega}$$

■ **例7.1 用傅里叶级数展开法设计一个FIR滤波器，其理想频率特性为**

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le 0.25\pi \\ 0, & 0.25\pi<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

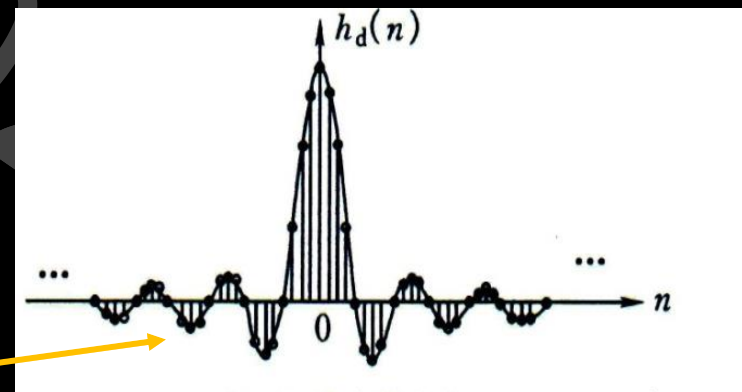



(a) 理想滤波器的频率响应

要求给出理想冲激响应序列$h_d(n)$和可实现滤波器的$h(n)$,并构造长度分别为$N=17$和39的线性相位滤波器。

**解：**(1)相应的单位脉冲响应序列$h_d(n)$为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-0.25\pi}^{0.25\pi}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin(0.25\pi n)}{\pi n}$$




(b) 理想冲激响应

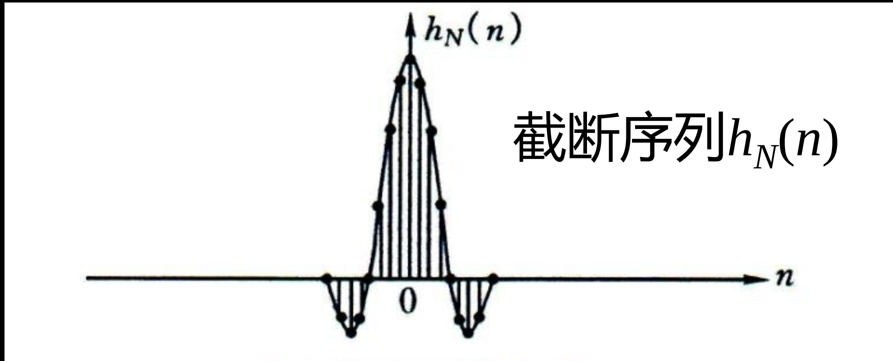
**$h_d(n)$是无限时宽，非因果序列**

**可实现滤波器的*h*(*n*)** （以$N$=17为例，$M$=($N$-1)/2=8）

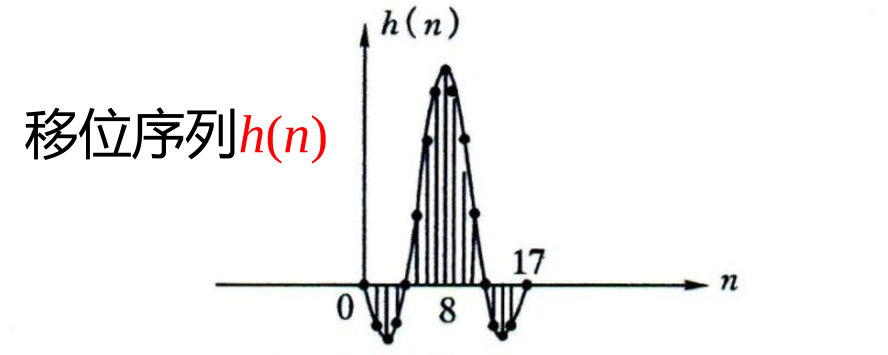
$$h(n)=h_d(n-M)=\frac{1}{2\pi}\int_{-0.25\pi}^{0.25\pi}H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega(n-M)}d\omega$$

$$=\frac{\sin\left[0.25\pi(n-M)\right]}{\pi(n-M)}=\frac{\sin\left[0.25\pi(n-8)\right]}{\pi(n-8)}$$

**$h$(n)以$n$=8偶对称，因此满足线性相位**




(d) 截短的冲激响应



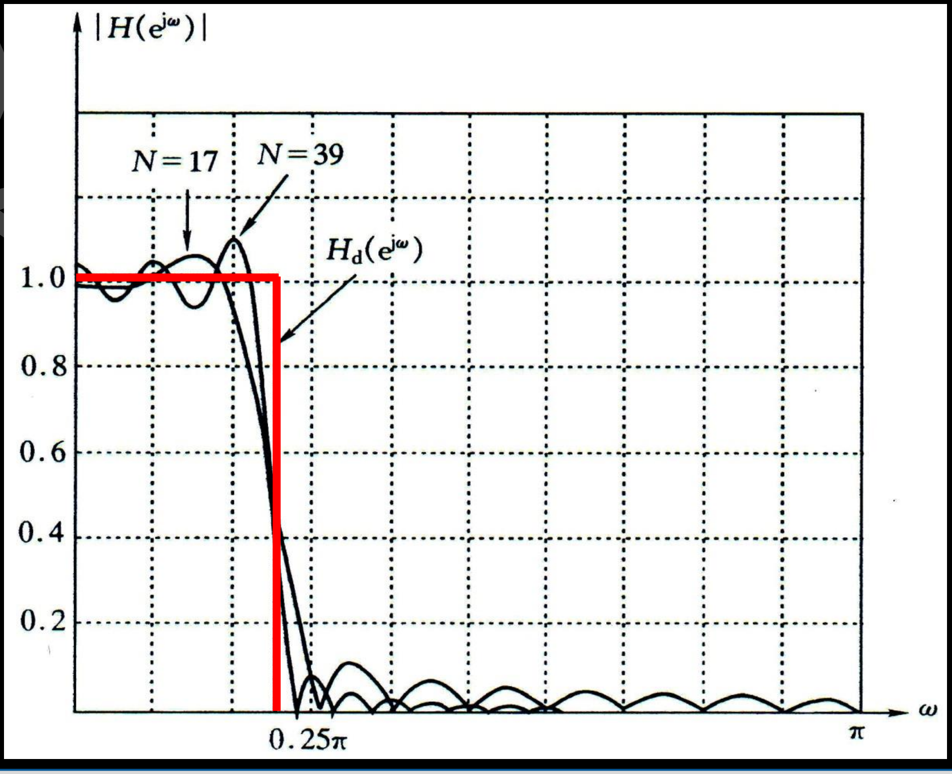

(e) 延时后的实际冲激响应

# 可实现滤波器的频率响应

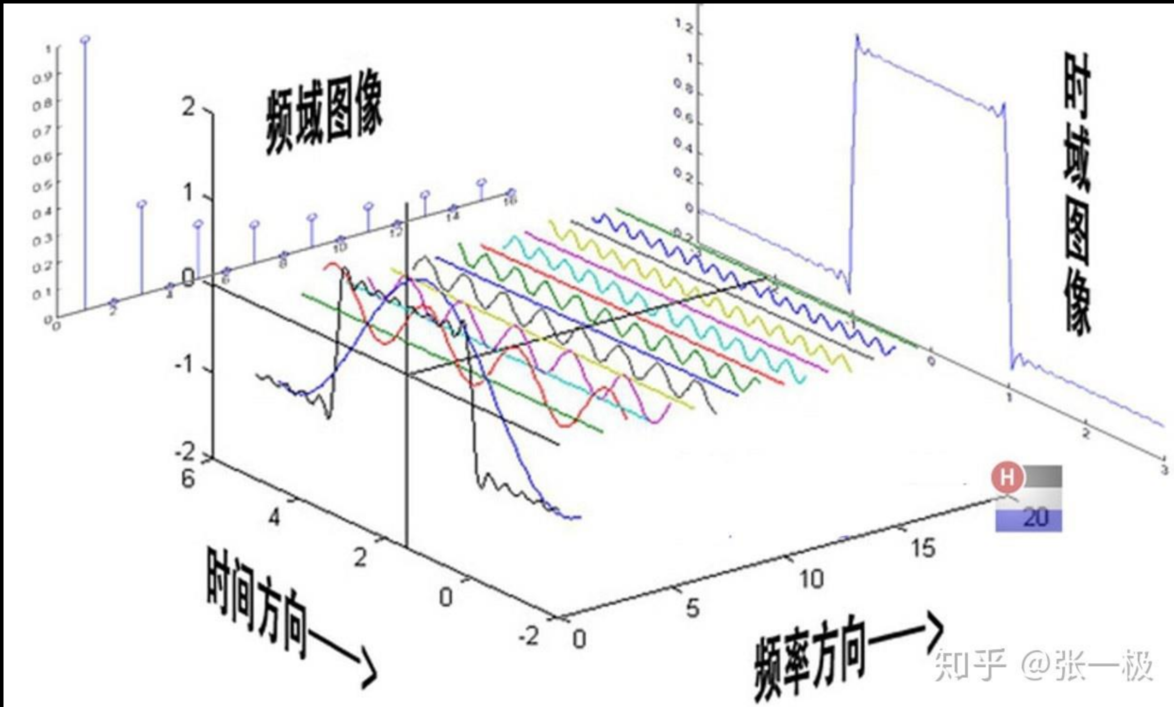
$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}\left\{h(\frac{N-1}{2})+\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2\frac{\sin(0.25\pi(n-\frac{N-1}{2}))}{\pi(n-\frac{N-1}{2})}\cos[(n-\frac{N-1}{2})\omega]\right\}$$

## 吉布斯效应（截断效应）

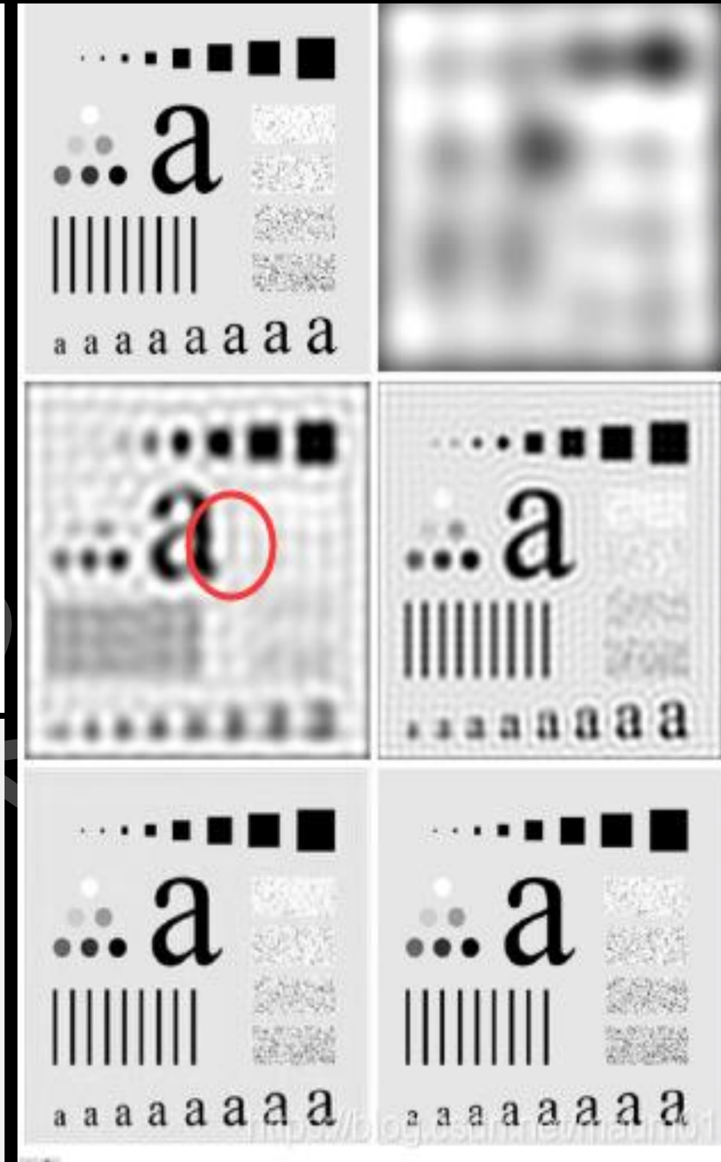
将具有不连续点的周期函数（如矩形脉冲)进行傅立叶级数展开后，选取有限项进行合成。当选取的项数越多，在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时，该峰起值趋于一个常数，大约等于总跳变值的9%。（百度百科）



# ■ 图像信号的吉布斯效应（块效应、振铃效应）





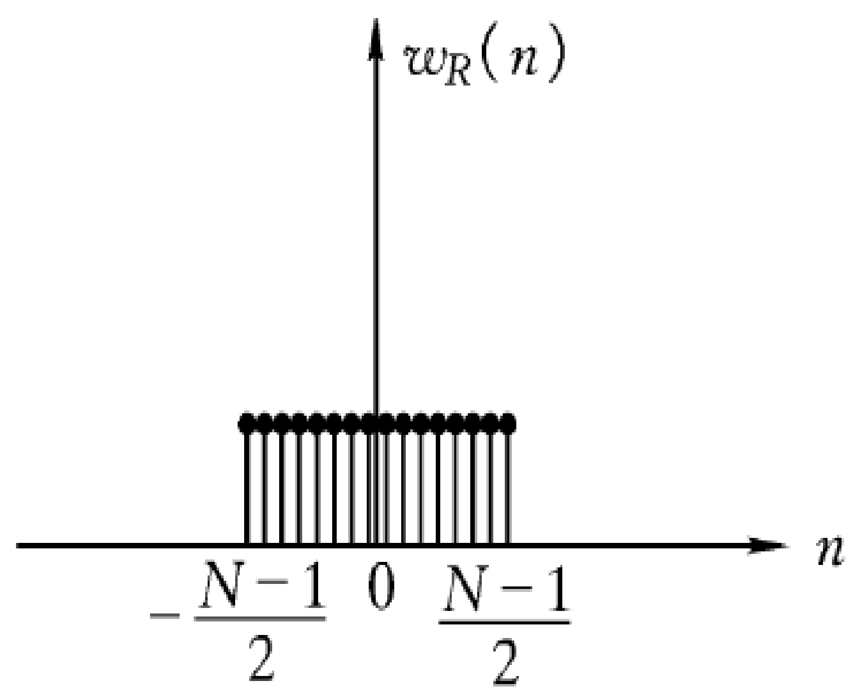


## ■ 如何改善FIR滤波器的幅频特性?

FIR滤波器的$h(n)$是有限长的，怎样用一个有限长的序列去近似无限长的$h_d(n)$?

前面的方法是直接截断，这种截取可以表示为：通过一个矩形窗口$w_R(n)$来乘以无限长序列$h(n)$，如下

$$\boxed{h(n)=h_d(n)w_R(n)}$$




为了改善滤波器的特性，可以采用其它形式的窗函数，相当于在矩形窗内对$h_d(n)$做一定的加权处理。

# 7.2 窗函数设计法

时域的突然截断，破坏了级数的收敛性，产生了吉布斯现象，需要选择一个合适的窗序列$w(n)$与$h_d(n)$相乘，即

$$\boxed{h(n)=h_d(n)w(n)}$$

**频域卷积定理**

$$\boxed{H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta}$$

**周期卷积**

## 窗函数法的设计步骤：

通过改变窗函数$w(n)$的形状，使$h(n)$逼近理想滤波器的冲激响应序列$h_d(n)$，即

设
$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\begin{tikzcd}
H_d(e^{j\omega}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & h_d(n) \arrow[r] & h_d(n)w(n) \arrow[d] \\
H(e^{j\omega}) & & h(n) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

**以线性相位理想低通滤波器为例，讨论FIR的设计问题。**

**例7.2** 设截止频率为$\omega_c$，时延为$n_0$的理想低通滤波器频率特性为

$$H_{\mathrm{d}}(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & |\omega|\le\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi \end{cases}$$

用窗函数法设计线性相位FIR滤波器逼近上述理想低通滤波器，求滤波器的冲激响应$h(n)$和频率响应$H(e^{j\omega})$。

**解：（a）理想滤波器的冲激响应**

$$h_{\mathrm{d}}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{\mathrm{d}}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin(\omega(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}$$

# （2）计算$h(n)$

$h_d(n)$是无限长的，为得到线性相位FIR滤波器，需要**截取**$h_d(n)$的一段$N$长序列$h(n)$，且设置**时延**$n_0=(N-1)/2$，以保证$h(n)$偶对称。

窗函数：

$$w_R(n)=R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & others\end{cases}$$

偶对称有限长序列：

$$h(n)=h_d(n)w_R(n)=\begin{cases}h_d(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & others\end{cases}$$

# （3）计算$H(e^{j\omega})$

**窗函数的频谱:**

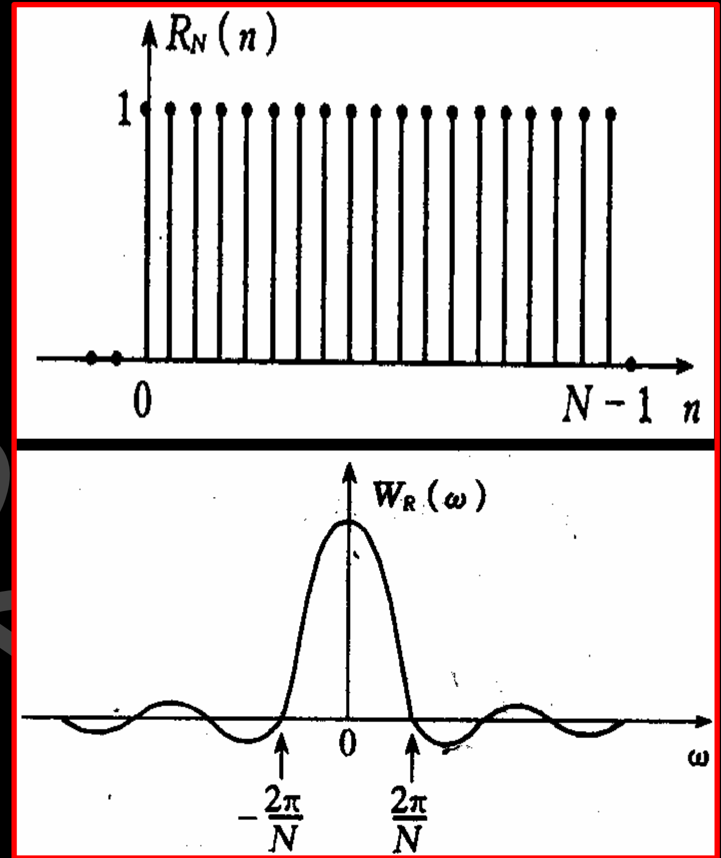
$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n) e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \boxed{e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2}}$$

**用幅频函数和相频函数来表示，则有**

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\omega n_0}$$

$$\boxed{W_R(\omega) = \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2}}$$




矩形窗函数及其幅频函数

# （3）分析FIR滤波器的幅度函数$H(\omega)$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left[H_{\mathrm{d}}\left(e^{j\theta}\right)*W_R\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{\mathrm{d}}\left(e^{j\theta}\right)W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

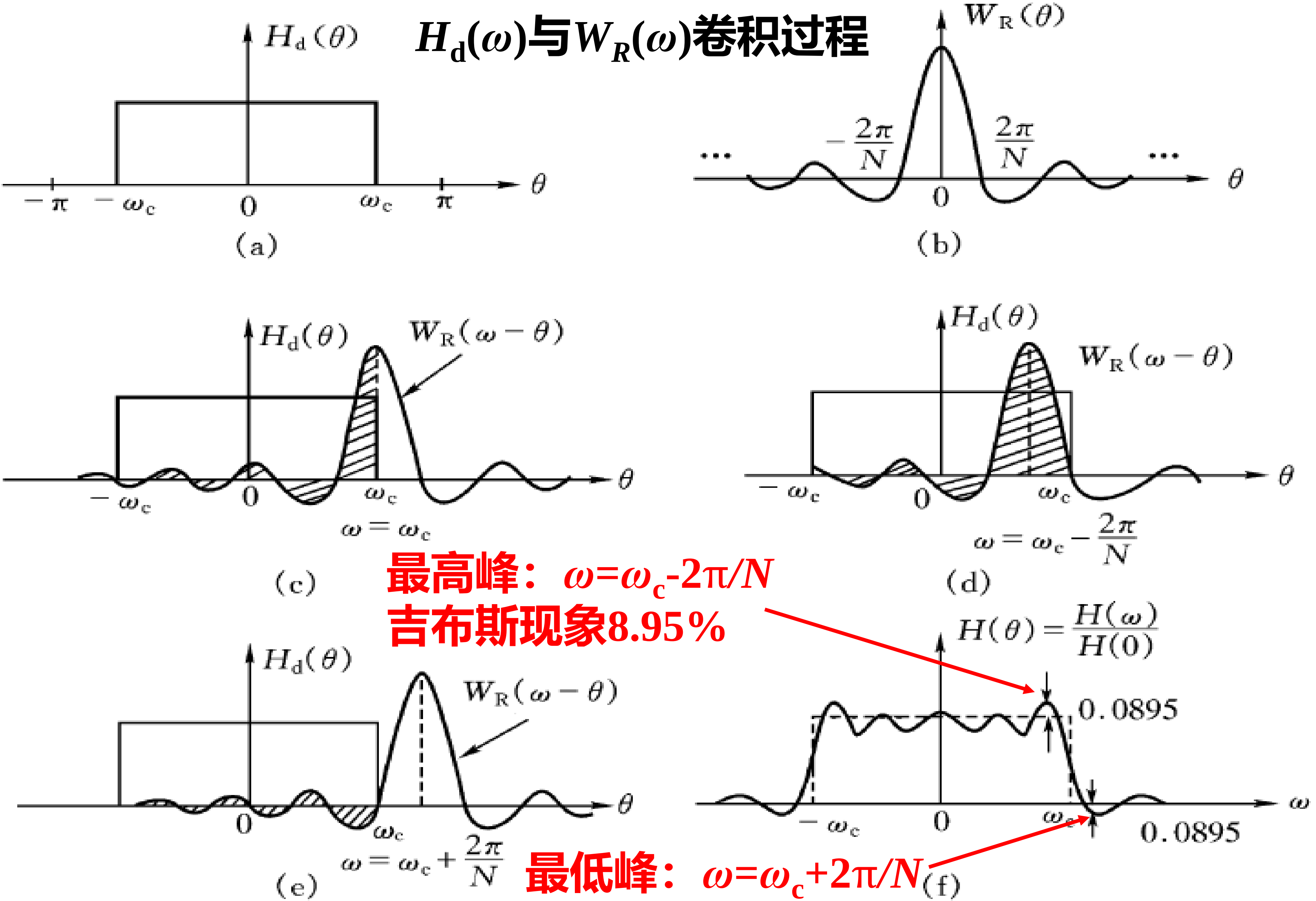
$$=e^{-j\omega n_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{\mathrm{d}}(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$$

经窗函数处理后，FIR滤波器的幅度函数是$H_{\mathrm{d}}(\omega)$和$W_R(\omega)$ 的卷积

$$\boxed{H(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{\mathrm{d}}(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta}$$

其中 $H_{\mathrm{d}}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$ $\quad W_R(\omega)=\frac{\sin\omega N/2}{\sin\omega/2}$

# $H_d(\omega)$与$W_R(\omega)$卷积过程




**最高峰：$\omega=\omega_c$-2π/$N$**

**吉布斯现象8.95%**

**最低峰：$\omega=\omega_c$+2π/$N$**

- **4个特殊频率点的卷积结果：**
  - $\omega=0$时，$H(0)$等于$W_R(\theta)$在$[-\omega_c,\omega_c]$内的积分面积；通常$\omega_c >> 2\pi/N$，故$H(0)$近似为$W_R(\theta)$在$[-\pi,\pi]$的积分面积。
  - $\omega=\omega_c$时，$H(\omega)$是$H(0)$的一半，$H(\omega_c) \approx H(0)/2$。
  - $\omega=\omega_c-2\pi/N$时，第一旁瓣（负数）在通带外，出现正肩峰，即吉布斯现象。
  - $\omega=\omega_c+2\pi/N$时，第一旁瓣（负数）在通带内，出现负肩峰。

## ■ 窗函数对理想滤波器频率响应特性的影响：

- 改变了理想频响的边沿特性，形成过渡带，宽为$4\pi/N$，等于$W_R(\omega)$的主瓣宽度。（决定于窗长$N$）
- 过渡带两旁产生肩峰和余振（带内、带外起伏），取决于$W_R(\omega)$的旁瓣，旁瓣相对值大，能量大，肩峰强，与$N$无关。（决定于窗函数形状）
- $N$增加，过渡带宽减小，但肩峰值不变。

$$\boxed{W_R(\omega)=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\approx N\frac{\sin(\omega N/2)}{N\omega/2}=N\frac{\sin x}{x}}$$

其中$x=N\omega/2$，所以$N$的改变不能改变主瓣与旁瓣的比例关系，只能改变$W_R(\omega)$的绝对值大小和起伏的密度；当$N$增加时，幅值变大，频率轴变密，而最大肩峰永远为8.95%，即吉布斯效应。

■ **选择窗函数的要求：**

通带内的波动影响滤波器通带的平稳性；阻带内波动影响阻带的衰减，可使最小衰减不满足技术要求。

改变窗函数的形状，可改善滤波器的特性，窗函数有许多种，但要满足以下两点要求：

- 窗谱主瓣宽度要窄，以获得较陡的过渡带；
- 相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使能量尽量集中在主瓣中，这样就 可以减小肩峰和余振，以提高阻带衰减和通带平稳性。

但实际上这两点不能兼得，一般总是通过增加主瓣宽度来换取对旁瓣的抑制。

# ■ 几种常见的窗函数

□ 矩形窗（Rectangle Window） $w_R(n)=R_N(n)$

频率响应为 $$\boxed{W_R(e^{j\omega})=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega}}$$

**主瓣宽度：$4\pi/N$**

**第一旁瓣：-13dB**

□ 三角形窗（Bartlett Window）

$$w_T(n)=\begin{cases}2n/(N-1), 0\le n\le(N-1)/2\\ 2-2n/(N-1), (N-1)/2\le n\le N-1\end{cases}$$

频率响应为 $$\boxed{W_T(e^{j\omega})=\frac{2}{N-1}e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left[\frac{\sin\left(\omega(N-1)/4\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}\right]^2}$$

**主瓣宽度：$8\pi/N$，第一旁瓣：-26dB**

# 升余弦窗（Raised Cosine Window）

$$w_H(n)=\begin{cases} a-(1-a)\cos 2\pi n/(N-1), 0\le n\le N-1 \\ 0, \qquad others \end{cases} \qquad 0\le a\le 1$$

***a*=1，矩形窗**

***a*=0.5，汉宁（Hanning）窗，普通升余弦窗**

***a*=0.54，海明（Hamming）窗，改进升余弦窗**

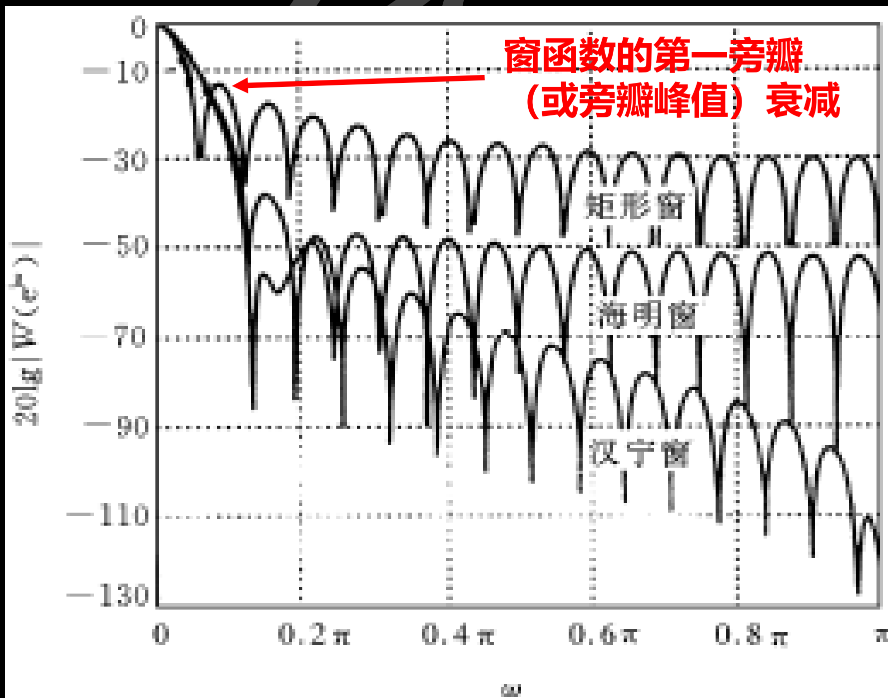
幅度响应为

矩形窗幅度响应

$$\boxed{W_H(\omega)=aW_R(\omega)+\frac{1-a}{2}\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]}$$

# 升余弦窗（Raised Cosine Window）

窗函数的频率特性比较




分析：

（1）升余弦窗的能量主要集中在主瓣，其中海明窗可使99.96%的能量集中在主瓣内。

（2）对低通滤波器来说，主瓣宽度增加导致过渡带宽度增加，旁瓣减小相当于阻带波纹减少。

**（1）汉宁窗：** 主瓣宽度：$8\pi/N$，第一旁瓣：-31dB

**（2）海明窗：** 主瓣宽度：$8\pi/N$，第一旁瓣：-41dB

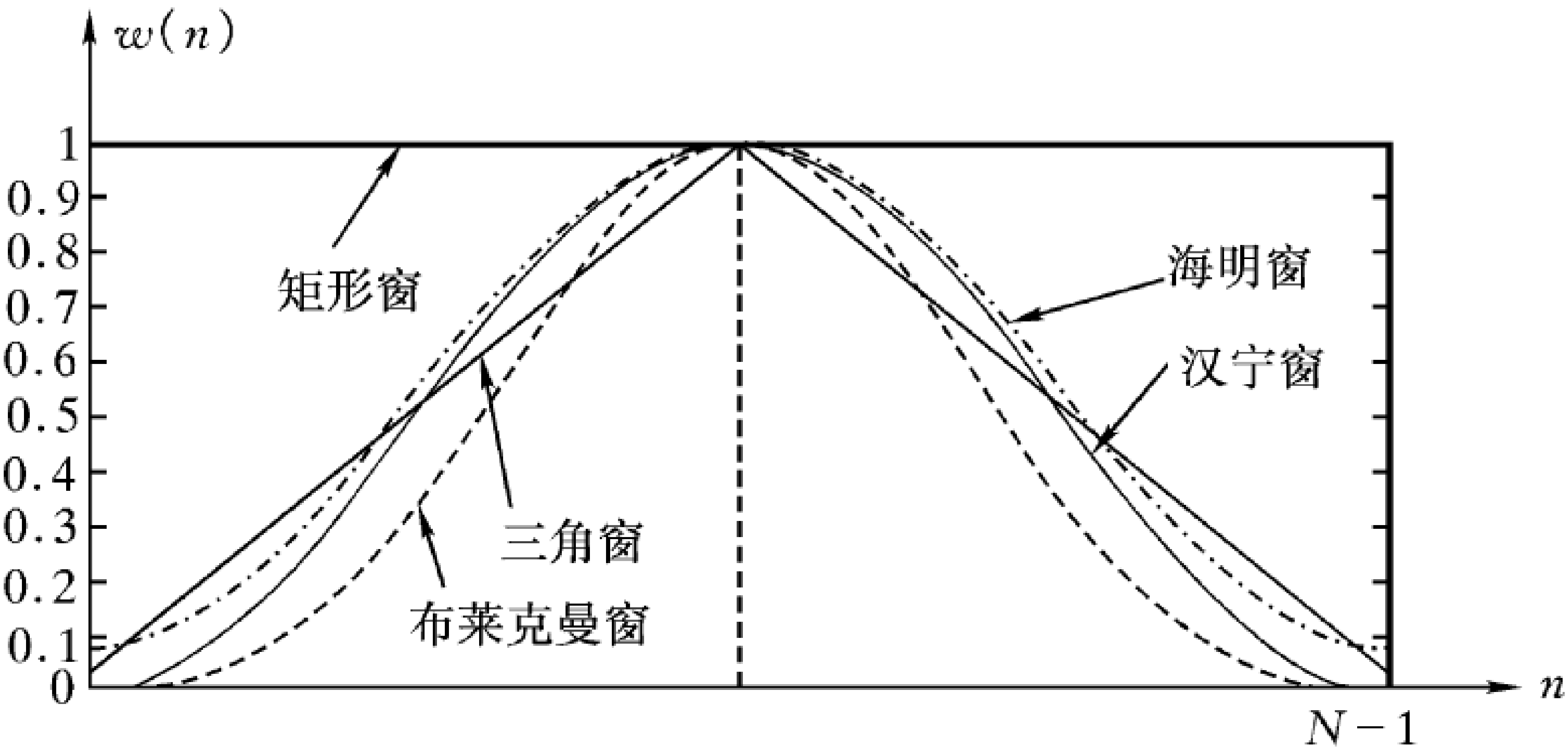
## 布莱克曼窗（Blackman Window）、二阶升余弦窗

$$w_B(n)=\left[0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}\right],0\le n\le N-1$$

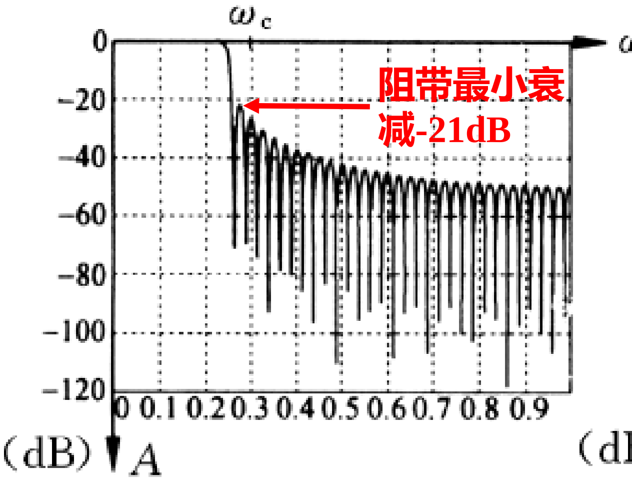
增加一个二次谐波余弦分量，可进一步降低旁瓣，但主瓣宽度增加，为$12\pi/N$，第一旁瓣衰减达到-57dB。

$$\boxed{\begin{aligned}W_B(\omega)=0.42W_R(\omega)&+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]\\&+0.04\left[W_R\left(\omega-\frac{4\pi}{N-1}\right)+W_R\left(\omega+\frac{4\pi}{N-1}\right)\right]\end{aligned}}$$

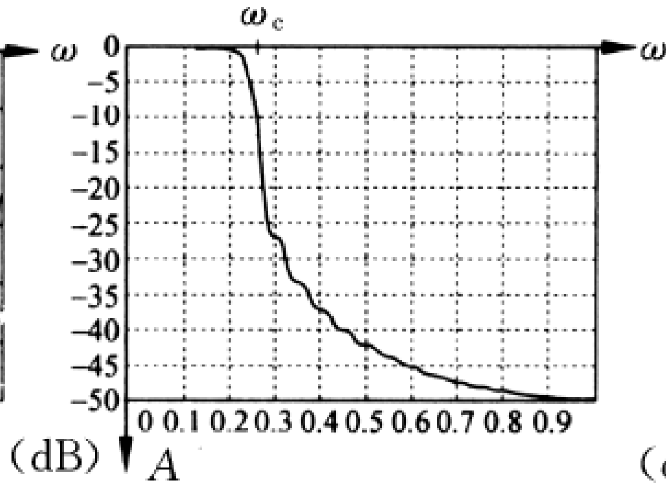
## 五种常用窗函数的时间特性



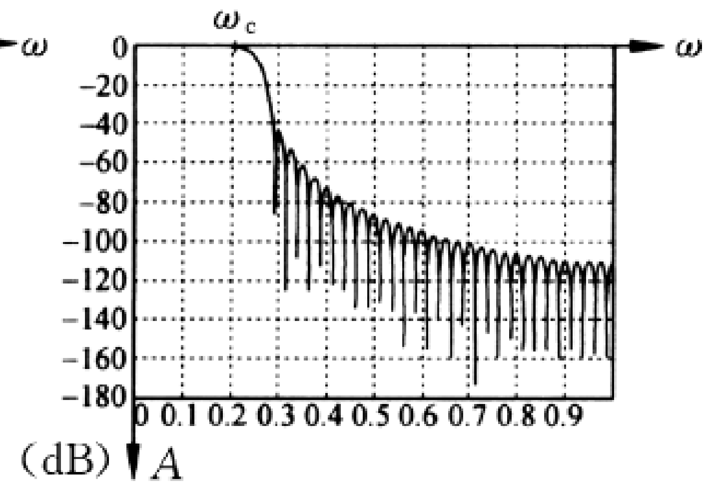
# 基于五种窗函数设计的FIR数字低通滤波器频率特性



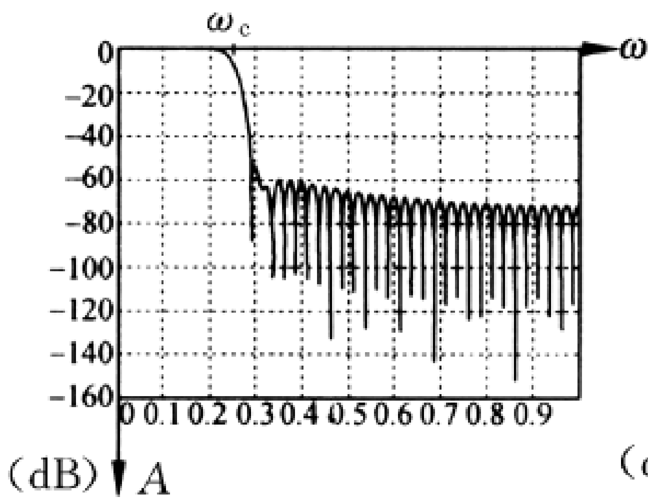
(a) 矩形窗



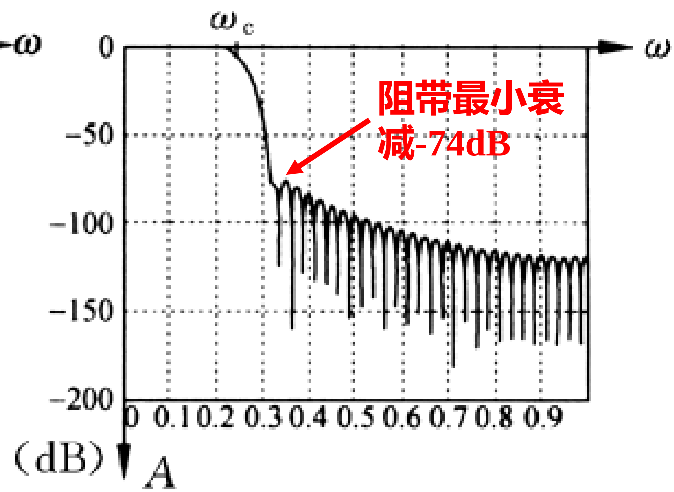
(b) 三角窗



(c) 汉宁窗



(d) 海明窗



(e) 布莱克曼窗

## □ 凯赛窗（Kaiser Window）两个参数：长度$N$和形状$\alpha$

前五种窗函数都以增加主瓣宽度为代价来降低旁瓣，凯赛窗则定义了一组可调节的窗函数

$$w(n)=\frac{\mathrm{I}_0\left(\alpha\sqrt{1-\left[1-2n/(N-1)\right]^2}\right)}{\mathrm{I}_0(\alpha)},\ 0\le n\le N-1$$

$\mathrm{I}_0(\cdot)$表示第一类零阶修正贝塞尔函数，参数$\alpha$可自由选择，决定主瓣宽度与旁瓣衰减，$\alpha$越大，$w(n)$窗越窄，其频谱的主瓣变宽，旁瓣变小。一般取$5<\alpha<10$．$\alpha=0$，为矩形窗；$\alpha=5.441$，形成接近海明窗；$\alpha=8.885$，接近布莱克曼窗。

零阶修正贝塞尔函数 $$I_0(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)n}{n!}\right]$$

# 凯赛窗（Kaiser Window）两个参数：长度$N$和形状$\alpha$

| 最小阻带衰减/dB | 凯塞窗函数参数 $\alpha$ | 主瓣过渡带 $\Delta\omega$ |
|---|---|---|
| −30 | 2.117 | $3.072\pi/N$ |
| −40 | 3.395 | $4.464\pi/N$ |
| −50 | 4.551 | $5.856\pi/N$ |
| −60 | 5.653 | $7.250\pi/N$ |
| −70 | 6.755 | $8.462\pi/N$ |
| −80 | 7.857 | $10.034\pi/N$ |
| −90 | 8.959 | $11.428\pi/N$ |
| −100 | 10.061 | $12.820\pi/N$ |

**最小阻带衰减：**设计的FIR滤波器（比如低通滤波器）的阻带的最小衰减（第一旁瓣衰减），即 $20\lg|H(\omega)/H(0)|$

## 不同窗函数的性能指标

| 窗函数 | 窗谱性能指标 | | 加窗后滤波器性能指标 | |
|---|---|---|---|---|
| | 旁瓣峰值 /dB | 主瓣宽度 | 过渡带宽 $\Delta\omega$ | 阻带最小衰减 /dB |
| 矩形窗 | -13 | $4\pi/N$ | $1.8\pi/N$ | -21 |
| 三角形窗 | -25 | $8\pi/N$ | $6.1\pi/N$ | -25 |
| 汉宁窗 | -31 | $8\pi/N$ | $6.2\pi/N$ | -44 |
| 海明窗 | -41 | $8\pi/N$ | $6.6\pi/N$ | -53 |
| 布莱克曼窗 | -57 | $12\pi/N$ | $11\pi/N$ | -74 |
| 凯泽窗 | -57 | | $10\pi/N$ | -80 |

- 阻带衰减只由窗形状决定，过渡带宽则与窗形状和窗宽$N$都有关
- 设计时，根据滤波器的阻带衰减选择窗形状，根据过渡带宽选择窗宽

## 窗函数法的设计步骤

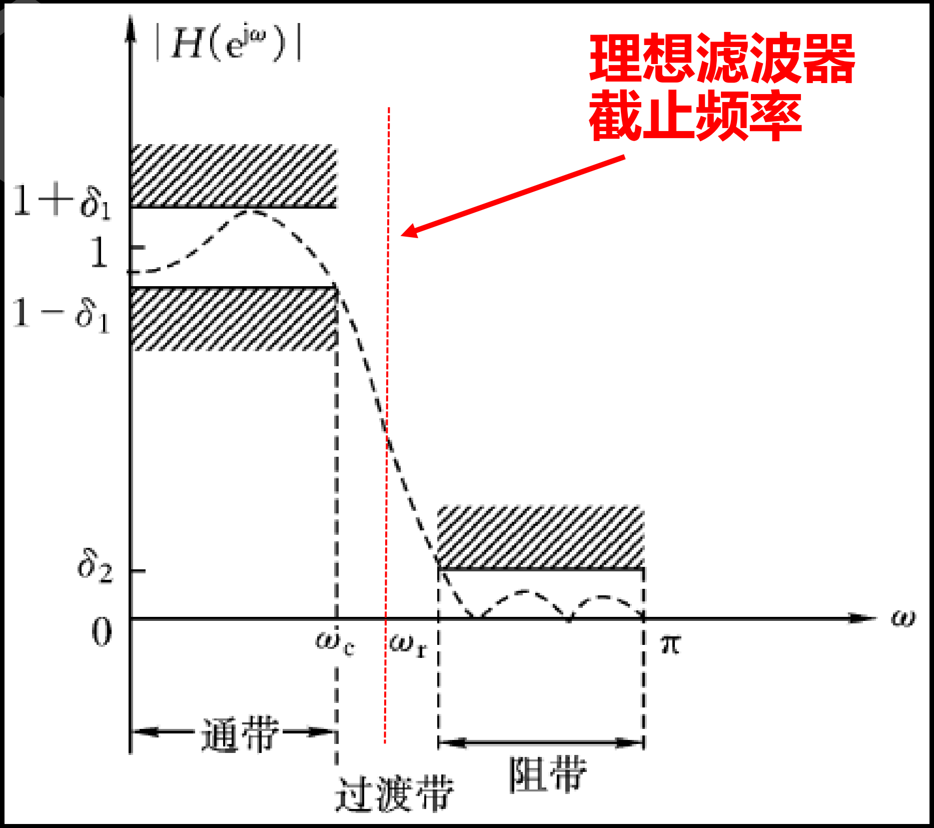
- 给定理想的频率响应函数$H_d(e^{j\omega})$及技术指标：阻带衰减$\delta_2$，过度带宽$\Delta\omega$等
- 求出理想的单位抽样响应$h_d(n)$
- 根据阻带衰减选择窗函数$w(n)$
- 根据过渡带宽度确定$N$值，$N=A/\Delta\omega$
- 求所设计的FIR滤波器的单位抽样响应。

$$\boxed{h(n)=h_d(n)\cdot w(n)}$$

- 计算频率响应$H(e^{j\omega})$，验算指标是否满足要求

# 注意区分数字滤波器的技术指标参数符号表示

## 图6.2




理想滤波器截止频率 $\boxed{\Omega_c = \left(\Omega_p + \Omega_{st}\right)/2}$

# ■ 线性相位FIR低通滤波器的设计

**举例：** 设计一个线性相位FIR低通滤波器，给定抽样频率为$\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 (rad/s)$，通带截止频率$\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 (rad/s)$，阻带截止（起始）频率$\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3 (rad/s)$，要求阻带衰减不小于-50dB，幅度特性如图所示。

**解：**

1）计算数字频率

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 2\pi\Omega_p / \Omega_s = 0.2\pi$$

$$\omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 2\pi\Omega_{st} / \Omega_s = 0.4\pi$$

$$\delta_2 = 50\text{dB}$$

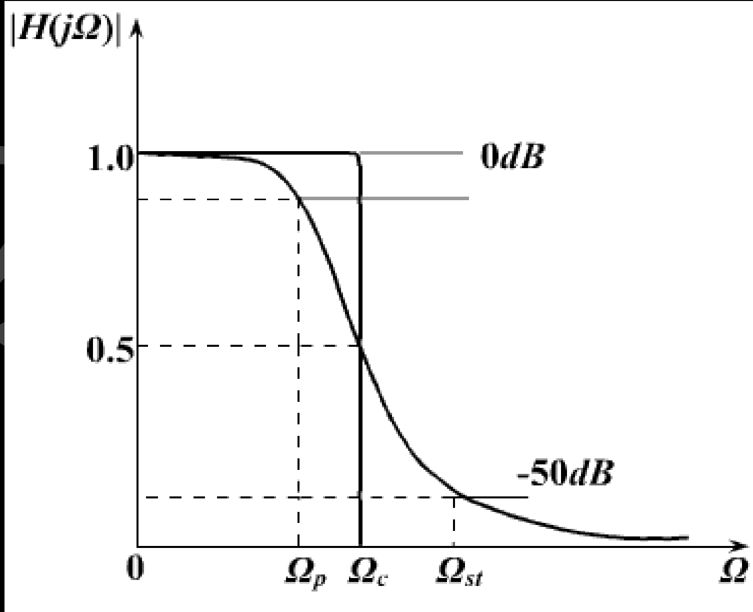



图7-14 例7-1要求的模拟低通滤波器特性

# 2）计算理想单位冲激响应$h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p + \Omega_{st}}{2}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

$$\omega_c = \frac{\Omega_c}{f_s} = 2\pi \frac{\left(\Omega_p + \Omega_{st}\right)/2}{\Omega_s} = 0.3\pi$$

$$\boxed{\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \\ &= \begin{cases} \sin[\omega_c(n-\tau)]/\pi(n-\tau), & n \ne \tau \\ \omega_c/\pi, & n = \tau \end{cases} \end{aligned}}$$

3）选择窗函数：由$\delta_2 = 50dB$确定采用海明窗（-53dB）

$$\boxed{w(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right] R_N(n)}$$

4）确定窗函数$N$值

查表，海明窗过渡带宽 $\Delta\omega = 6.6\pi/N$

$$\Delta\omega = 2\pi\frac{\Omega_{st} - \Omega_p}{\Omega_s} = 0.2\pi$$

$$\boxed{N = \frac{A}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

## 5）确定FIR滤波器的*h*(*n*)

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)}\left[0.54-0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right]R_{33}(n)$$

## 6）求$H(e^{j\omega})$幅度函数，并验证是否满足指标要求

过渡带宽：$\Delta\omega=0.3476563\pi$

**阻带最小衰减：-50.9159dB**

**若不满足，则改变*N*或窗形状重新设计**

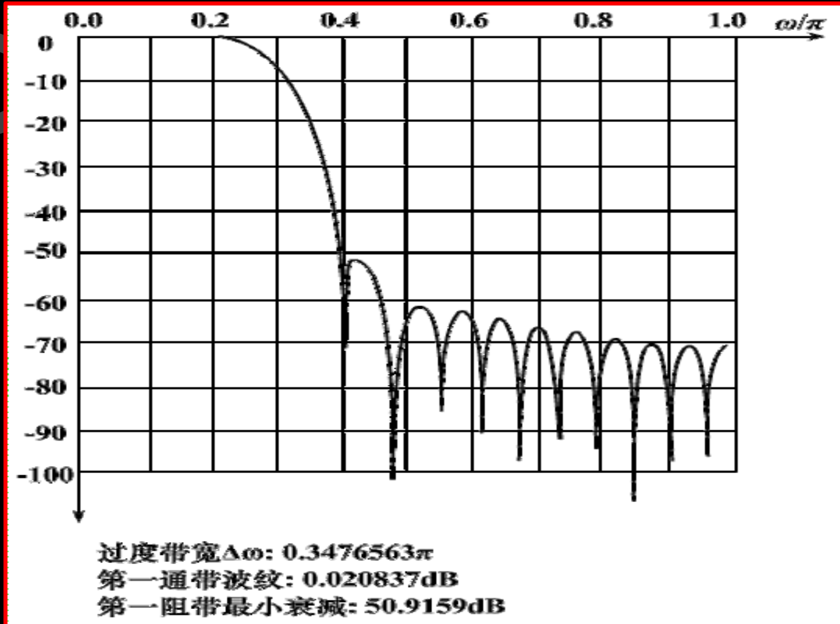



图7-15 例7-1设计出的线形相位*FIP*低通滤波器幅频特性
(海明窗，N=33)

# ■ 线性相位FIR高通滤波器的设计

理想高通的频响：$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0 & 其它\omega \end{cases}$

$\tau=\dfrac{N-1}{2}$

其单位抽样响应：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega+\int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\overbrace{\boxed{\sin\left[\pi(n-\tau)\right]}}^{对应\delta(n-\tau)}-\boxed{\sin\left[\omega_c(n-\tau)\right]}\right\}, & n\ne\tau \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi-\omega_c), & n=\tau \end{cases}$$

高通滤波器( $\omega_c$ )=全通滤波器 – 低通滤波器($\omega_c$)

# ■ 线性相位FIR带通滤波器的设计

理想带通的频响: $H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 < \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 < \pi \\ 0 & others \end{cases}$

$\boxed{\tau = \dfrac{N-1}{2}}$

其单位抽样响应:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin\left[\omega_2(n-\tau)\right]-\sin\left[\omega_1(n-\tau)\right]\right\}, & n \ne \tau \\ \dfrac{1}{\pi}(\omega_2-\omega_1), & n = \tau \end{cases}$$

带通滤波器( $\omega_1$, $\omega_2$)=低通滤波器($\omega_2$) – 低通滤波器( $\omega_1$)

## ■ 线性相位FIR带阻滤波器的设计

理想带阻的频响：$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 \le |\omega| \le \omega_1, \omega_2 \le |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{其它}\omega \end{cases}$

$\tau = \dfrac{N-1}{2}$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin\left[\pi(n-\tau)\right] + \sin\left[\omega_1(n-\tau)\right] - \sin\left[\omega_2(n-\tau)\right]\right\}, & n \ne \tau \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\pi + \omega_1 - \omega_2\right), & n = \tau \end{cases}$$

带阻滤波器( $\omega_1$, $\omega_2$)=高通滤波器($\omega_2$) + 低通滤波器( $\omega_1$)

## ■ 总结

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IFT}} h_d(n) \xrightarrow{\text{加窗截断}} h(n) \xrightarrow{\text{FT}} H(e^{j\omega})$$

比较

**满足设计要求，则设计完毕，不合格则修改窗函数**

- 窗函数法优点：

  从时域出发的一种设计方法，设计简单，方便，实用。

- 缺点：

  $N$ 需要足够大，边界频率不易控制。

**举例：** 用矩形窗涉及法设计一个FIR线性相位低通滤波器，已知$\omega_c = 0.5\pi$，$N$=21，$n_0 = (N-1)/2$，画出$h(n)$和$20\lg|H(\omega)/H(0)|$曲线，并计算正、负肩峰间的过渡带。

**解：**

理想滤波器的频响为：
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

单位脉冲响应$h_d(n)$为：

$$\boxed{h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n_0} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin\left(0.5\pi\left(n-n_0\right)\right)}{\pi\left(n-n_0\right)}}$$

计算得：

$n=0$

$$h_d(n)=\{\ldots,\ 0,\ 1/9\pi,\ 0,\ -1/7\pi,\ 0,\ 1/5\pi,\ 0,\ -1/3\pi,\ 0,\ 1/\pi,\ 0.5,$$
$$1/\pi,\ 0,\ -1/3\pi,\ 0,\ 1/5\pi,\ 0,\ -1/7\pi,\ 0,\ 1/9\pi,\ 0,\ \ldots\}$$

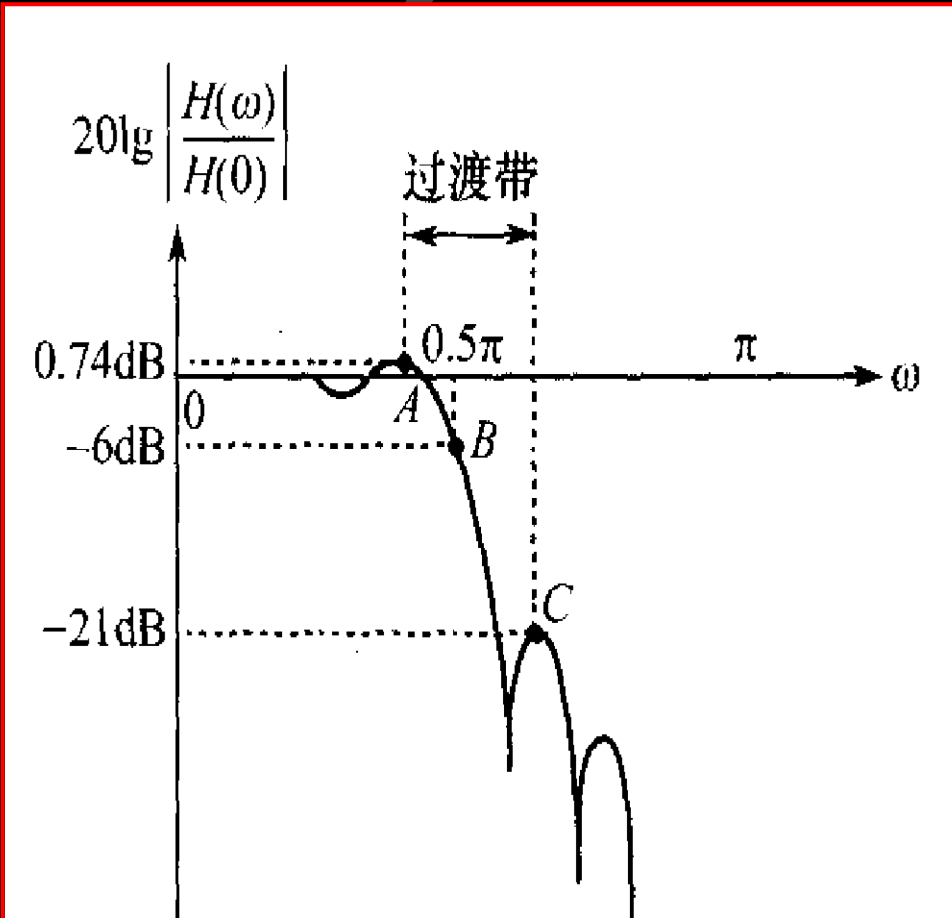
加矩形窗：$h(n)=h_d(n)R_N(n)$

$$h(n)=\{0,\ 1/9\pi,\ 0,\ -1/7\pi,\ 0,\ 1/5\pi,\ 0,\ -1/3\pi,\ 0,\ 1/\pi,\ 0.5,$$
$$1/\pi,\ 0,\ -1/3\pi,\ 0,\ 1/5\pi,\ 0,\ -1/7\pi,\ 0,\ 1/9\pi,\ 0\}$$

最终得：

$$h(n)=\{0,\ 0.0354,\ 0,\ -0.0455,\ 0,\ 0.0637,\ 0,\ -0.1061,\ 0,\ 0.3183,\ 0.50,\ 0.3183,\ 0,\ -0.1061,\ 0,\ 0.0637,\ 0,\ -0.0455,\ 0,\ 0.0345,\ 0\}$$

## 20lg|$H(\omega)/H(0)$|曲线




正肩峰A点：$\omega_c - 2\pi/N = 0.5\pi - 2\pi/21$，20lg(1.0895) = 0.74dB

临界频率B点：$\omega_c = 0.5\pi$，20lg(0.5) = -6dB

负肩峰C点：$\omega_c + 2\pi/N = 0.5\pi + 2\pi/21$，20lg(0.0895) = -21dB

A~C宽度为：$\omega_c + 2\pi/N - (\omega_c - 2\pi/N) = 4\pi/N = 0.19\pi$

# 7.3 FIR滤波器的计算机辅助设计

## 7.3.1 频率采样法

- **基本思想**

给定频域上的技术指标，可以采用频域设计更直接。

使所设计的FIR数字滤波器的频率特性在某些离散频率点上的值准确地等于所需滤波器在这些频率点处的值，在其它频率处的特性则有较好的逼近。

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{频率采样}} H(k)=H_d(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) \xrightarrow{\text{IDFT}} h(n) \longrightarrow H(e^{j\omega})$$

$N$点

$N$点，不同于$h_d(n)$

$$H(k) \xrightarrow{\text{内插公式}} H(e^{j\omega})$$

## 回顾

**时域采样：** 对一个带限信号，根据采样定理对其进行采样，所得采样信号的频谱是原带限信号频谱的周期延拓，因此，完全可以由采样信号恢复原信号。

**Z域频率采样：** 对一个有限长序列$h(n)$进行DFT，所得$H(k)$是该时间序列的Z变换在单位圆（离散时间傅里叶变换）上的采样。

$$\tilde{H}(k) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi k/N}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}}$$

## ■ 问题：

- □ $H(z)$经采样后，信息有无损失?
- □ 能否由$H(k)$代替$H(e^{j\omega})$?
- □ 由 $H(k)$ 的傅里叶反变换得到的$h_N(n)$是否能代表$h(n)$？
- □ 频域采样不失真的条件：

当$h(n)$为长度$M$, 只有$N \geq M$ 时, 才能不失真的恢复信号, 即

$$\boxed{\begin{aligned} h_N(n) &= \tilde{h}_N(n)R_N(n) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(n+lN)R_N(n) = h(n), N \geq M \end{aligned}}$$

## ■ 由频域采样值$H(k)$重建$H(z)$的内插公式：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{j2\pi nk/N}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi nk/N}z^{-n}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1-z^{-N}}{1-e^{j2\pi k/N}z^{-1}}$$

令 $W_N=e^{-j2\pi/N}$，则

$$\boxed{H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}$$

在单位圆上

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-e^{-j\omega N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N}e^{-j\omega}}$$

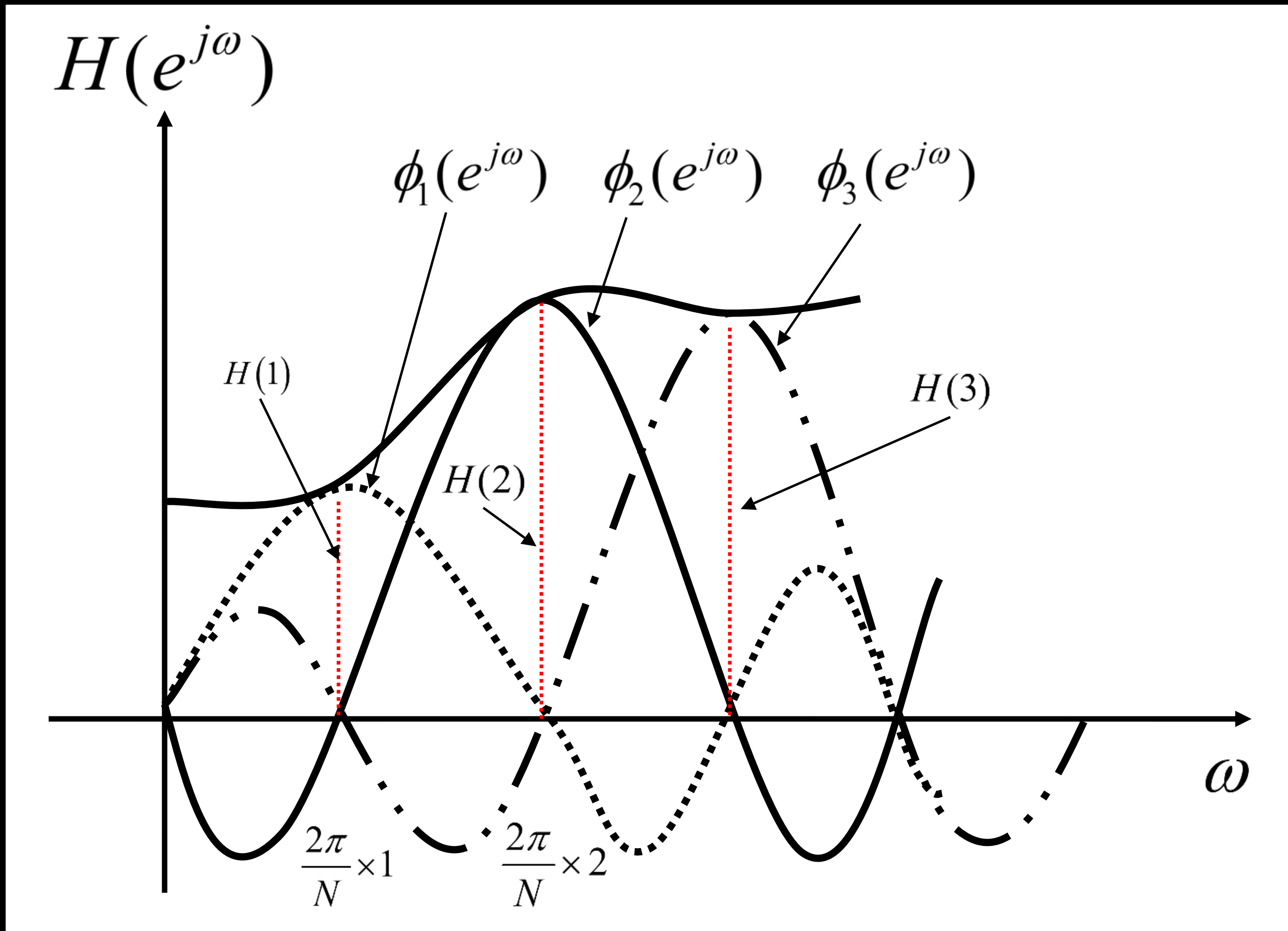
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin\left[(\omega-2\pi k)/2\right]}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega+\frac{k\pi}{N}\right)}$$

**内插公式** $$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\phi_k\left(e^{j\omega}\right)$$

其中 $$\phi_k\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin\left[(\omega-2\pi k/N)/2\right]}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega+\frac{k\pi}{N}\right)}$$

令$\omega=\frac{2\pi}{N}i$, $i$=0,1,…,$N$-1，则 $\phi_k\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}$

## ■ 由频域采样值$H(k)$重建$H(z)$的内插过程：



## 内插公式表明:

- 在每个采样点上$H(e^{j\omega_k}) = H(k)$，逼近误差为零，频响$H(e^{j\omega})$严格地与理想频响的采样值$H(k)$相等;
- 在采样点之间，频响由各采样点的内插函数延伸迭加而形成，因而有一定的逼近误差，误差大小与理想频率响应的曲线形状有关，理想特性平滑，则误差小；反之，误差大。在理想频率响应的不连续点附近，$H(e^{j\omega})$会产生肩峰和波纹。
- $N$增大，则采样点变密，逼近误差减小。

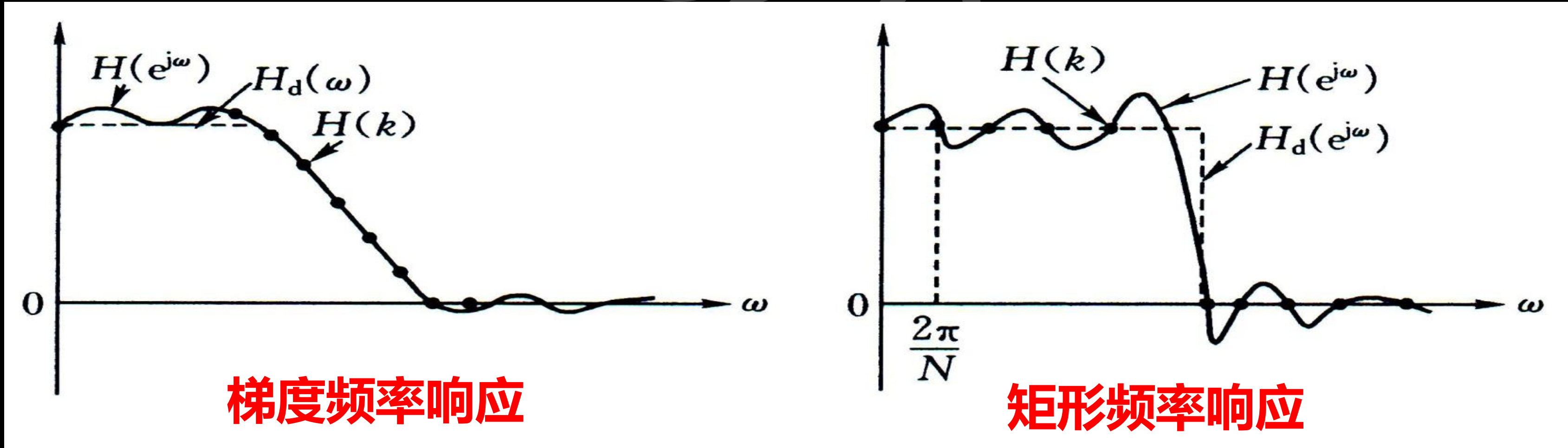



图 7.8 频率采样的响应

## ■ FIR滤波器线性相位约束

□回顾：线性相位FIR滤波器的时域、频域约束

**$h(n)$为实序列且$h(n)=\pm h(N-1-n)$，$0\le n\le N-1$**

线性相位FIR滤波器在**频域**的约束：

严格线性相位

幅频函数 $$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(n-\frac{N-1}{2})\omega]$$

相频函数 $$\theta(\omega)=-\frac{1}{2}(N-1)\omega$$

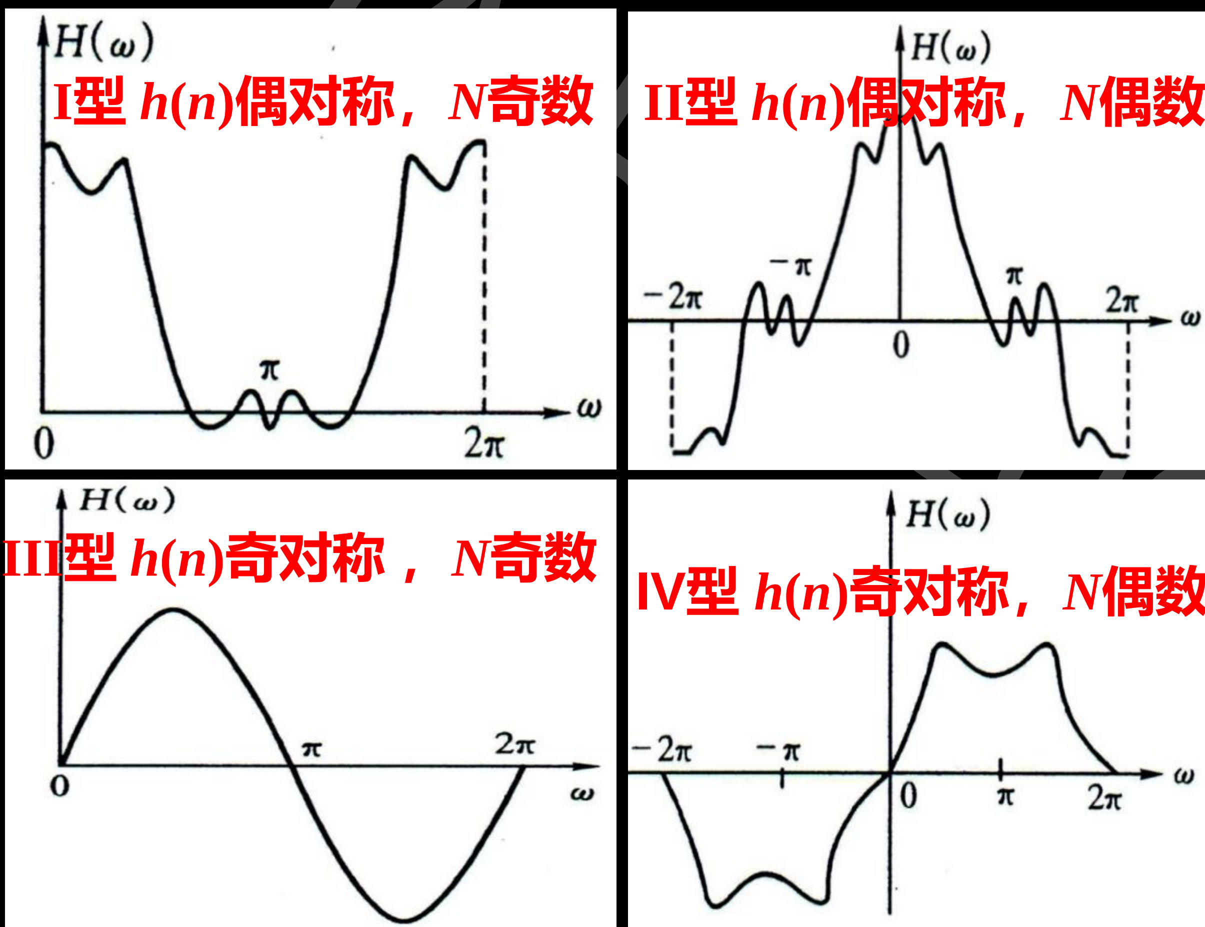
广义线性相位

幅频函数 $$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]$$

相频函数 $$\theta(\omega)=-\frac{1}{2}(N-1)\omega+\frac{\pi}{2}$$

# ■ FIR滤波器线性相位约束

□回顾：线性相位FIR滤波器的时域、频域约束




- □ I型：幅度函数偶对称$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$
- □ II型：幅度函数奇对称$H(\omega)=-H(2\pi-\omega)$
- □ III型：幅度函数奇对称$H(\omega)=-H(2\pi-\omega)$
- □ IV型：幅度函数偶对称$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$

## FIR滤波器线性相位约束

### 频率采样值$H(k)$的约束 $\boxed{H(k)=H_k e^{j\theta_k}}$

严格线性相位 $H_k = H_{N-k}$ 或 $H_k = -H_{N-k}$

$$\theta_k = -k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2}\right) = -k\pi\left(1-\frac{1}{N}\right)$$

广义线性相位 $H_k = H_{N-k}$ 或 $H_k = -H_{N-k}$

$$\theta_k = -k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2}\right)+\frac{\pi}{2} = -k\pi\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{\pi}{2}$$

由计算出的$H_k$、$\theta_k$，即得$H(k)$，从而求出滤波器的频响$H(e^{j\omega})$

## 误差分析与改进措施

设待设计的理想滤波器频响为$H_d(e^{j\omega})$，对应的单位采样响应$h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

### 从时域分析误差

频域采样定理：频率$N$点等间隔采样，时域周期延拓，即得$h(n)$

$$\boxed{h(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n+rN)R_N(n)}$$

如果$H_d(e^{j\omega})$有间断点，$h_d(n)$是无限长，则$h(n)$无法逼近。

**改进措施**：增大$N$值，使设计的滤波器逼近理想滤波器$H_d(e^{j\omega})$

## 从频域分析误差

频域采样定理：频率$N$点等间隔采样，时域周期延拓，即得$h(n)$

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\phi\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)} \longleftarrow \text{内插公式}$$

（1）在采样点$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$，采样点$H(e^{j\omega_k})$与$H(k)$相等，误差为0；

（2）采样点之间，误差与$H(e^{j\omega})$的平滑度有关；

（3）频响曲线的间断点处误差最大，且间断点附近形成振荡，使阻带衰减减小，可能无法满足设计指标。

**改进措施：**

在频响间断点附近内插一个或几个过渡采样点，使间断点变成缓慢过渡，通过增加过渡带宽，增加了阻带衰减。该过程要借助于计算机优化设计。

## 总结：频率采样法设计线性相位FIR滤波器的步骤

1）根据$\omega_c$及$N$的奇偶性，确定滤波器频率采样$H_k$、$\theta_k$，和截止频率$k_c$等参数；

2）由$H(k)=H_k e^{j\theta_k}$求出频率采样点值$H(k)$；

3）对$H(k)$进行IDFT，计算$h(n)$；

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{j\frac{2\pi nk}{N}},\quad n=0,1,\dots,N-1$$

3）由$h(n)$求出所设计的滤波器的频率响应，并分析误差，借助计算机优化设计。

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

**举例：** 试用频率采样法设计计法设计一个FIR线性相位低通滤波器，已知：$\omega_c$=0.5π，$N$=51。画出 $|H_d(e^{jw})|$， $|H(k)|$, $20\lg|H(e^{jw})|$曲线。

**解：** 0～0.5π和1.5$\pi$～2$\pi$的幅度函数为1，其余为0 。采样频率为：2π/$N$＝ 2π/51， $\omega_c$×51/2$\pi$＝12.7，所以$k_c$=12。

$$H_k = \begin{cases} 1, 0 \le k \le 12, or\ \boxed{39 \le k \le 50} \\ 0, \qquad\qquad 13 \le k \le 38 \end{cases}$$

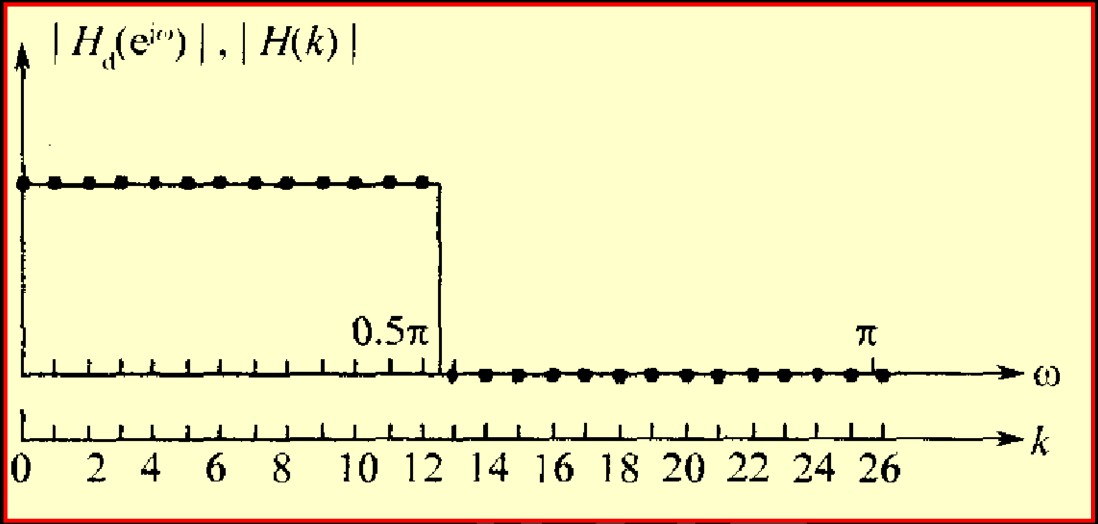
I型滤波器，$H_k$偶对称

$$\theta_k = -\pi k(N-1)/N = -50\pi k/51$$

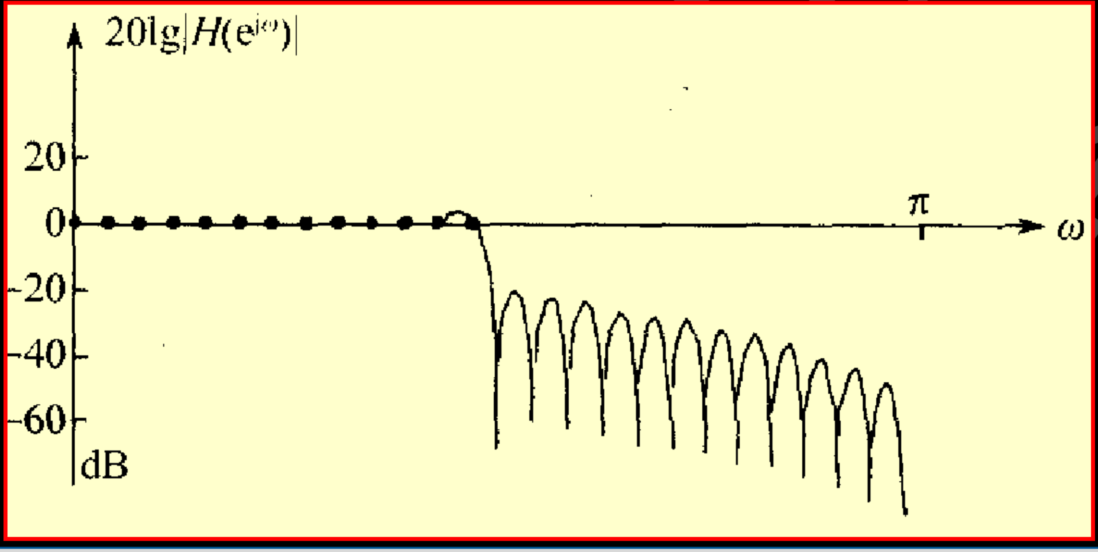
由幅度和相位特性，得到FIR滤波器的频率采样值$H(k)$为

$$\boxed{H(k) = \begin{cases} e^{-j50\pi k/51}, 0 \le k \le 12, or\ 39 \le k \le 50 \\ 0, \qquad\qquad\qquad 13 \le k \le 38 \end{cases}}$$

理想滤波器$H_d(e^{jw})|$， $|H_d(k)|$的曲线




设计的滤波器$20\lg|H(e^{jw})|$曲线



**举例：** 试用频率采样法设计一个FIR低通滤波器，其理想特性为

$$H_d\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & 0\le\omega\le 0.5\pi\\ 0, & 0.5\pi\le\omega\le\pi\end{cases}$$

采样点数$N$=33，要求线性相位。

**解：** 能设计低通线性相位FIR滤波器的只有I型和II型，因为$N$为奇数，所以只能选择I型，即

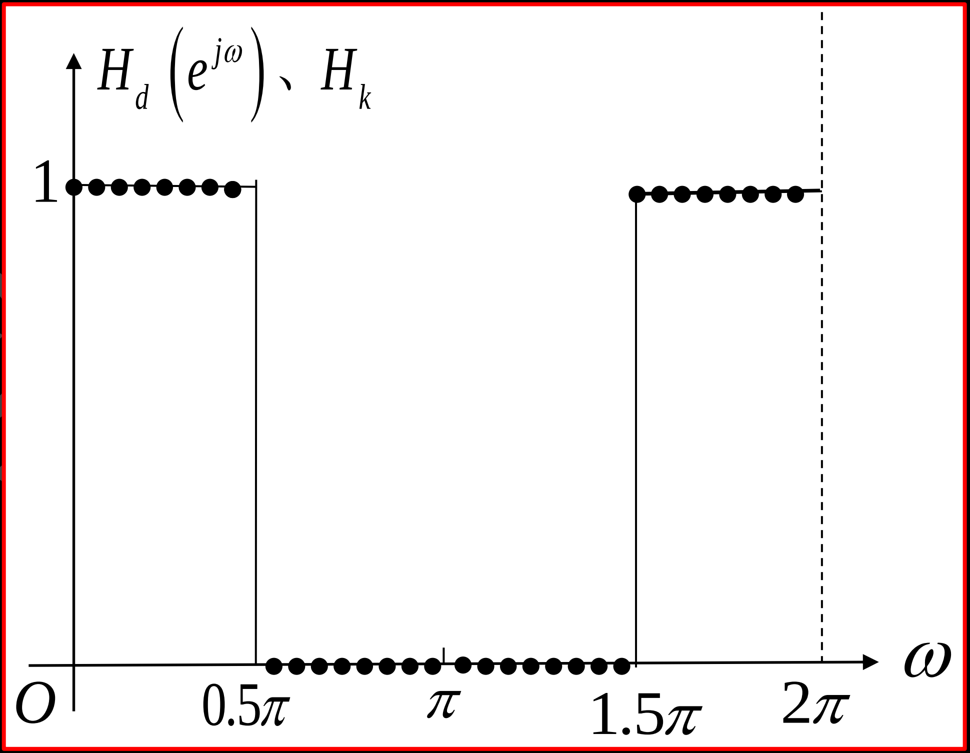
$$h(n)=h(N-1-n)$$

幅度函数关于$\pi$偶对称，即$H_k$偶对称。利用$H_k$的对称性，求$\pi$~$2\pi$区间的频率采样值。

根据指标要求，在0~2π内有33个采样点，所以采样频率为

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{33}$$

截止频率0.5π位于2π/33×8和2π/33×9之间，所以$k$=0,1,…,8时，$H_k$=1；根据对称性，k=25,…,32时，也有$H_k$=1。



# 滤波器频率采样响应

$$H(k) = H_k e^{j\theta_k}$$

其中

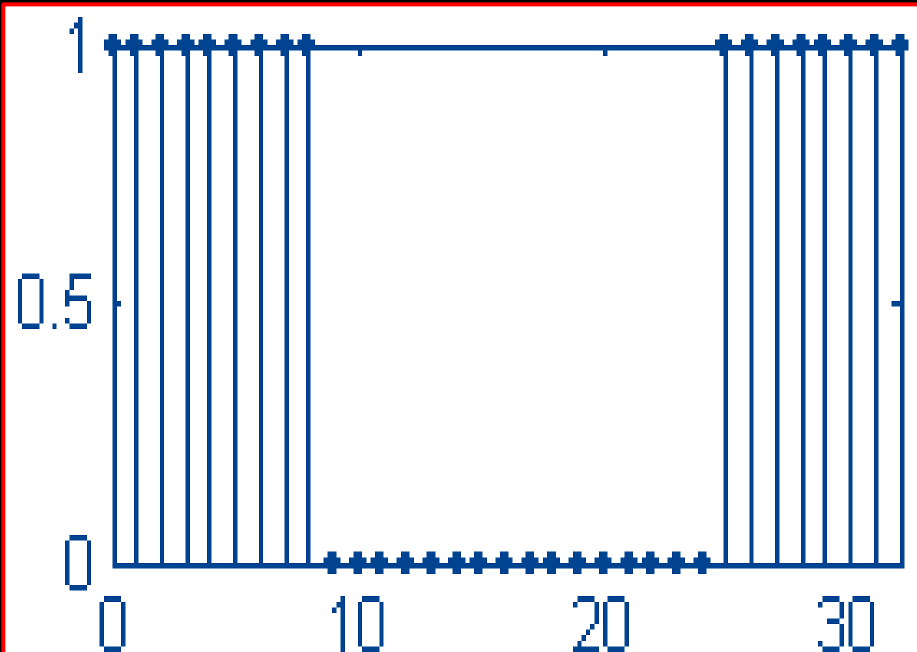
$$H_k = \begin{cases} 1, 0 \le k \le 8, or\ 25 \le k \le 32 \\ 0, \qquad 9 \le k \le 24 \end{cases}$$

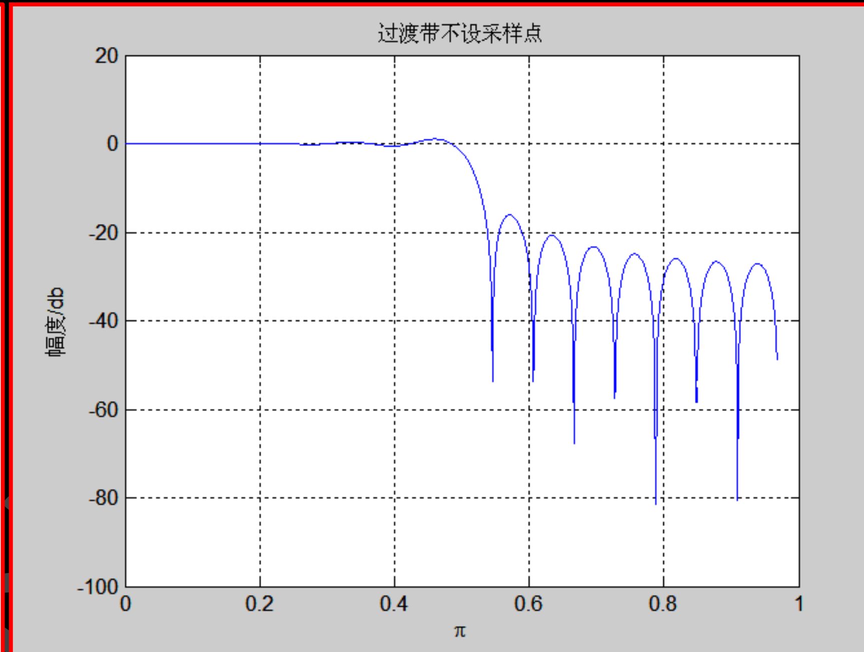
$$\theta_k = -\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)\Bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\frac{32}{33}\pi k,\ \ 0 \le k \le 32$$

利用频率内插函数，得设计的滤波器的幅度函数

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1}{33}\left\{\frac{\sin\frac{33}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{8}\left[\frac{\sin 33\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)} + \frac{\sin 33\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33}\right)}\right]\right\}}$$

理想滤波器的频率响应　　设计滤波器的频率响应

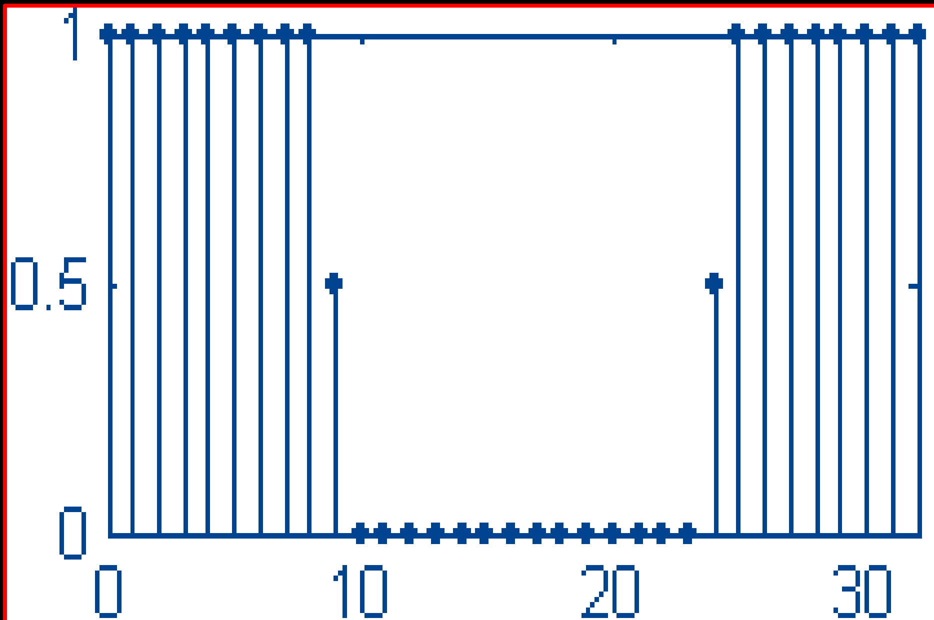


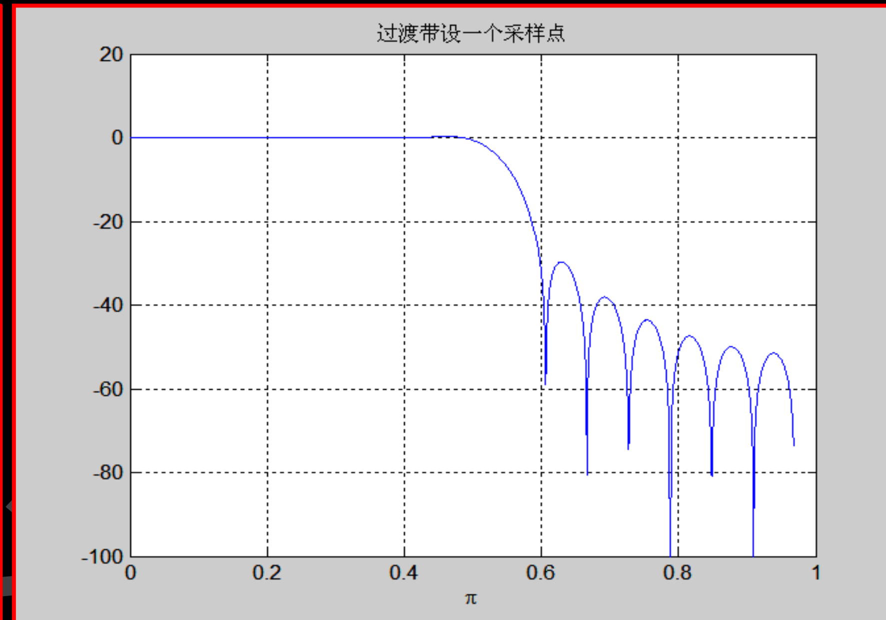




可以看出，$H(e^{j\omega})$过渡带宽为一个频率采样间隔 $2\pi/33$，而其最小阻带衰减略小于20dB。

**过渡带宽（*m*为过渡点数）**：$\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{N}(m+1)$

理想滤波器的频率响应　　设计滤波器的频率响应

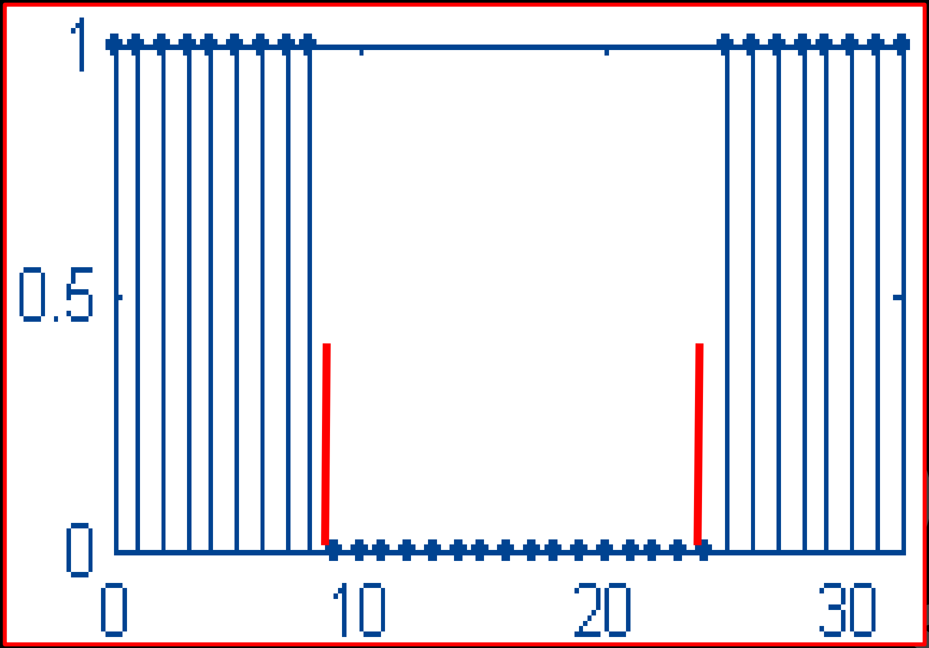


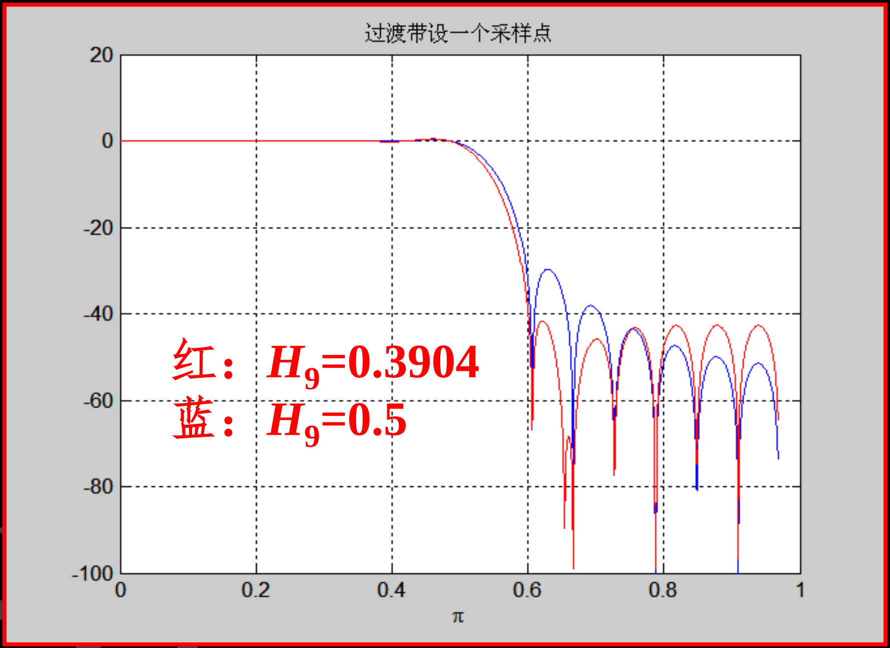

增大阻带衰减三种方法：

**1）加宽过渡带宽**　以牺牲过渡带换取阻带衰减的增加。$k$=9和$k$=24处各增加一个过渡带采样点$H_9=H_{24}=0.5$，使过渡带宽增加到二个频率采样间隔$4\pi/33$，重新计算的$H(e^{j\omega})$阻带衰减增加到约-30dB。

理想滤波器的频率响应



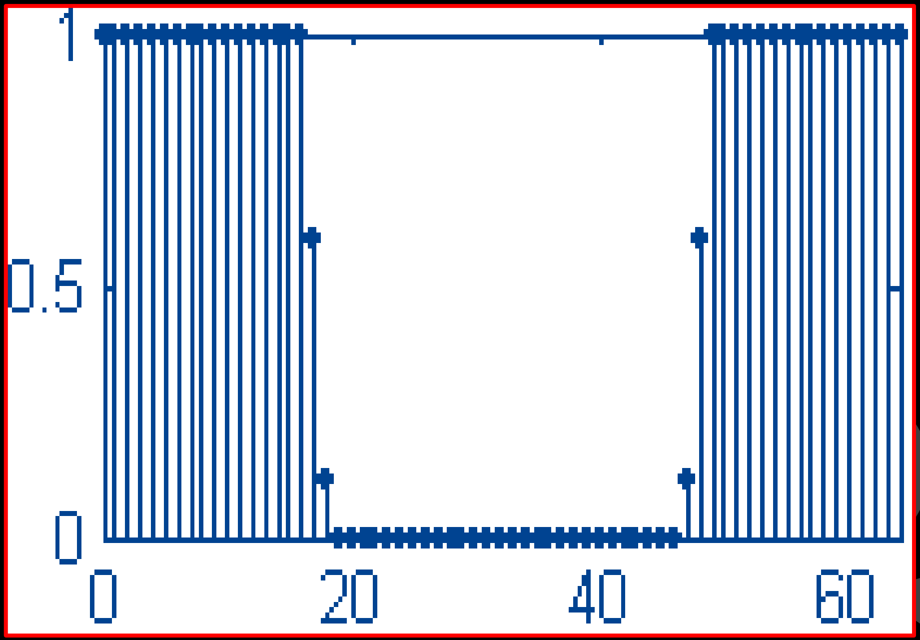

设计滤波器的频率响应

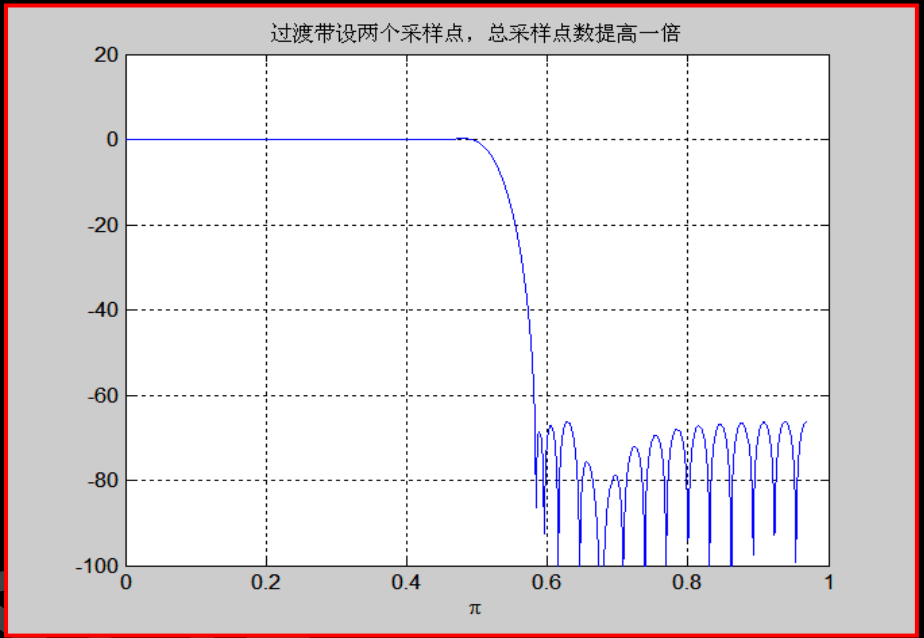



## 3）过渡带的优化设计

频率响应$H(e^{j\omega})$是$H_k$的线性（插值）函数，因此可利用计算机最优化方法确定过渡带采样点的值，使通带（或阻带）误差最小化。当使阻带最小衰减最大化，得到$H_9$=0.3904，此时阻带衰减约-40dB，比$H_9$=0.5时大大改善。还可进一步增加第二、三个过渡点，进一步改善阻带衰减。

理想滤波器的频率响应　　设计滤波器的频率响应

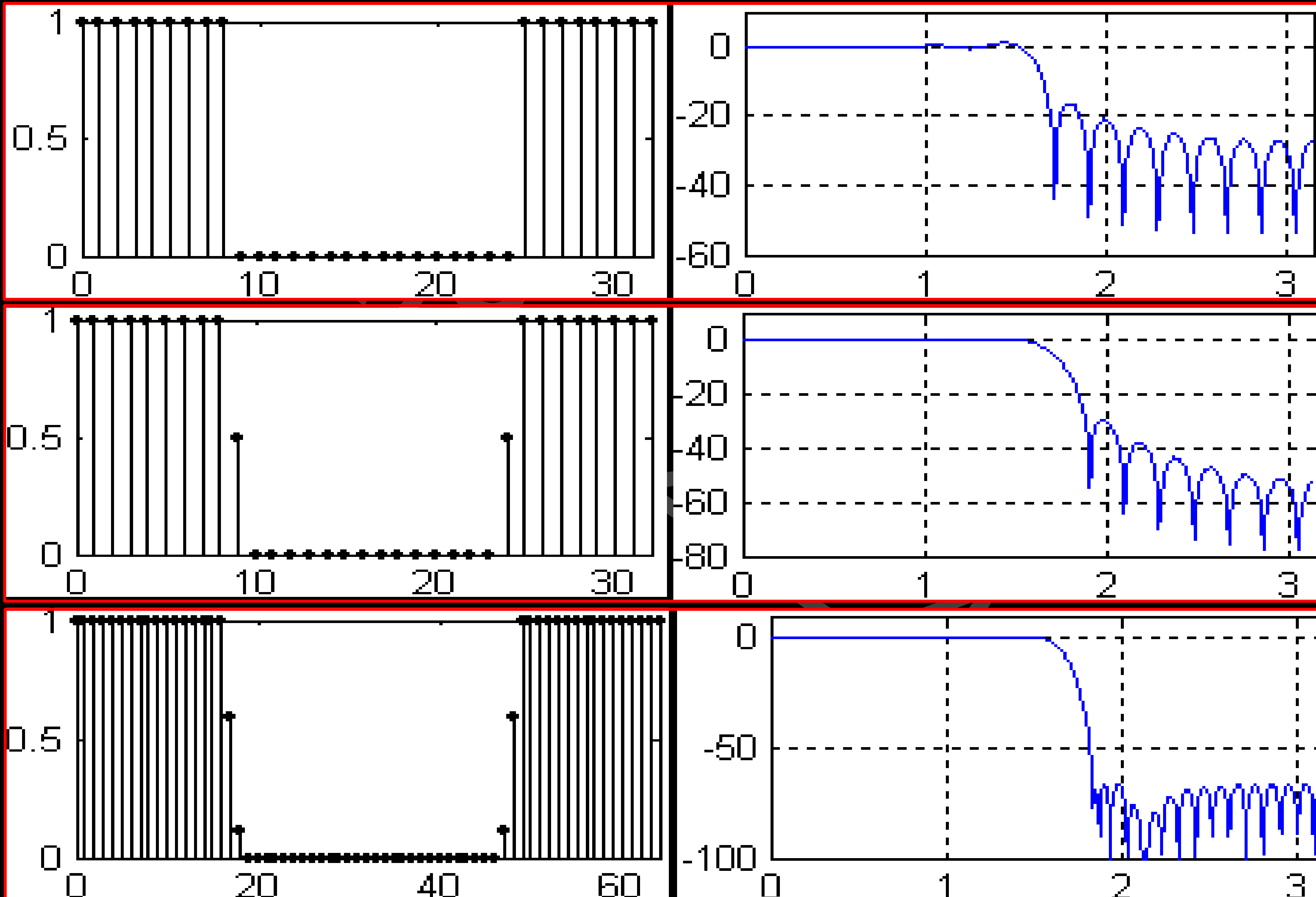



## 3）增大$N$值

不增加过渡带宽，也可以通过增加采样点数$N$，进一步增加阻带衰减。边界频率当N=65时，得到的频率响应$H(e^{j\omega})$，过渡带为$6\pi/65$，阻带衰减约-65dB，代价是滤波器阶数增加，运算量增加。

# 过渡点数量对阻带衰减的影响



## ■ 频率采样法的参数选择：

- 滤波器的阻带衰减$\delta_2$主要决定于过渡点的数量$m$，且经验如下

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\delta_2$(dB) | 16-20 | 40-50 | 60-75 | 80-95 |

- 滤波器的过渡带宽$\Delta\omega$由过渡点数量$m$和频率采样点数$N$同时决定

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}(m+1)}$$

- 过渡点处$H_k$的取值，采用计算机辅助优化，或者累试法（即手动设置数值并验证），得到近似优化值。

## ■ 频率采样法特点：

### □ 优点：

(1) 可以在频域直接进行设计，并且适合于最优化设计；

(2) 特别适合于设计窄带选频滤波器，因为只有少数几个非零值的$H(k)$，因而设计计算量小。

### □ 缺点：

采样频率只能等于$2\pi/N$的整数倍，因而不能确保制止频率的自由取值，要想实现自由地选择截止频率，必须增加采样点数$N$，但这又使计算量加大。

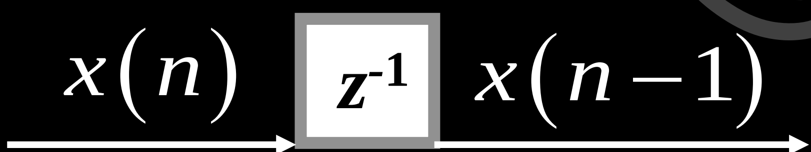
# 7.4 FIR滤波器的实现结构

■ 数字滤波器的结构表示法

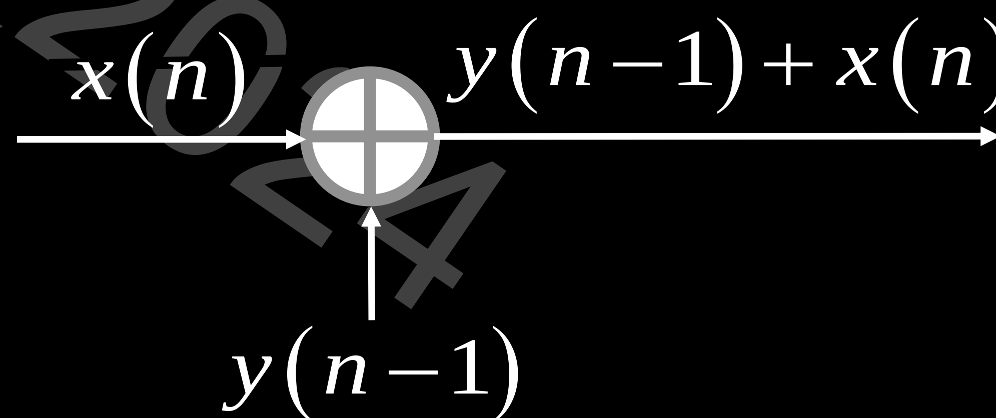
□ **方框图法**

方框图法简明且直观，其三种基本运算如下图所示：

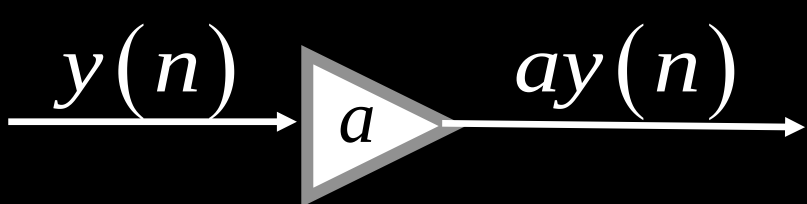
单位延时:



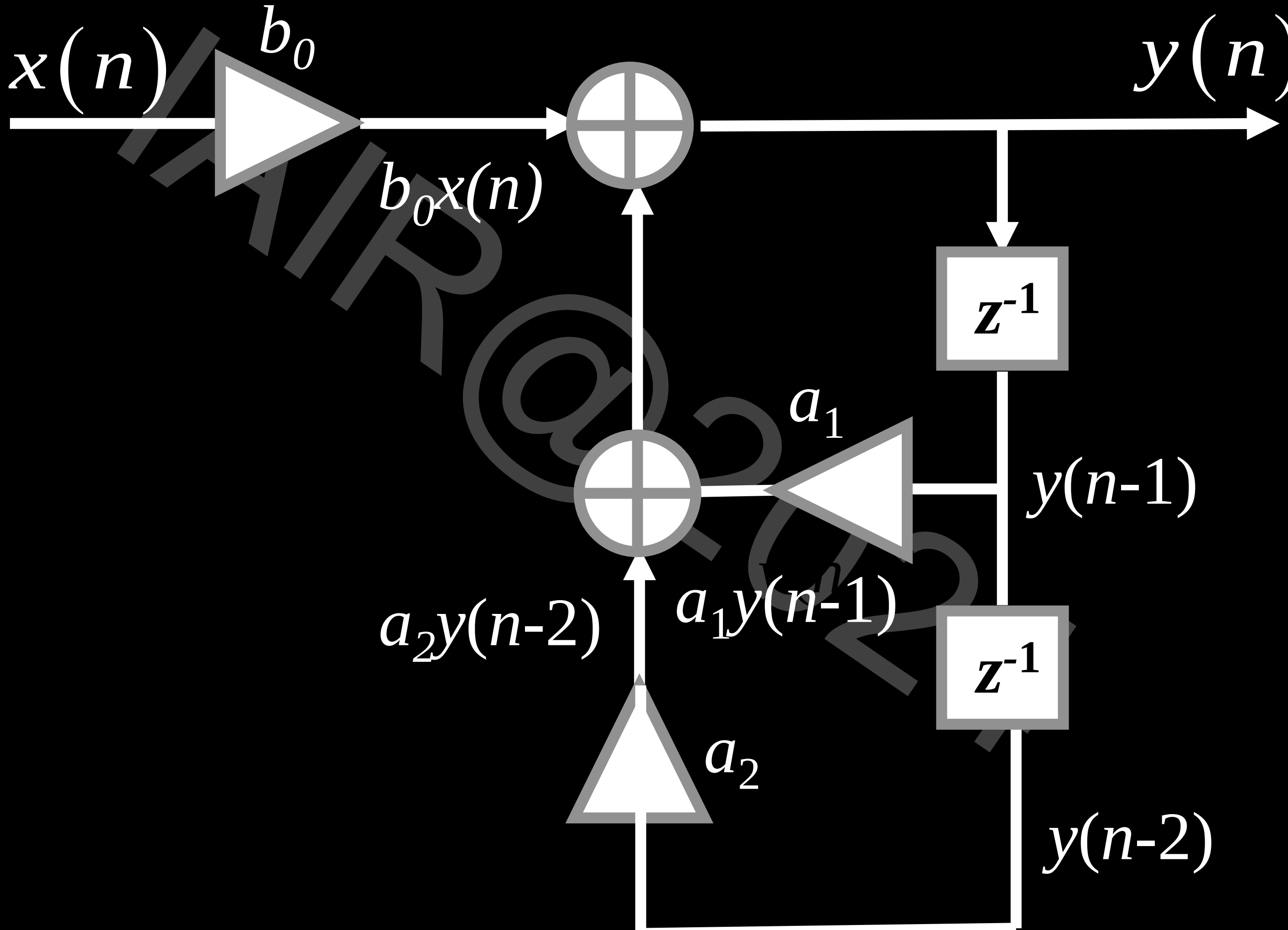

加法:




乘常数:



举例： $y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_0x(n)$

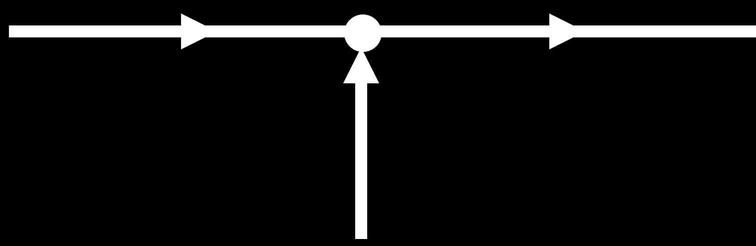


## □ 信号流图法

三种基本的运算（表示法更加简单方便）：

单位延时：$\xrightarrow{\quad z^{-1} \quad}$

相加：



乘常数：$\xrightarrow{\quad a \quad}$

**注意：**

a）输入节点或源节点：$x(n)$所处的节点；

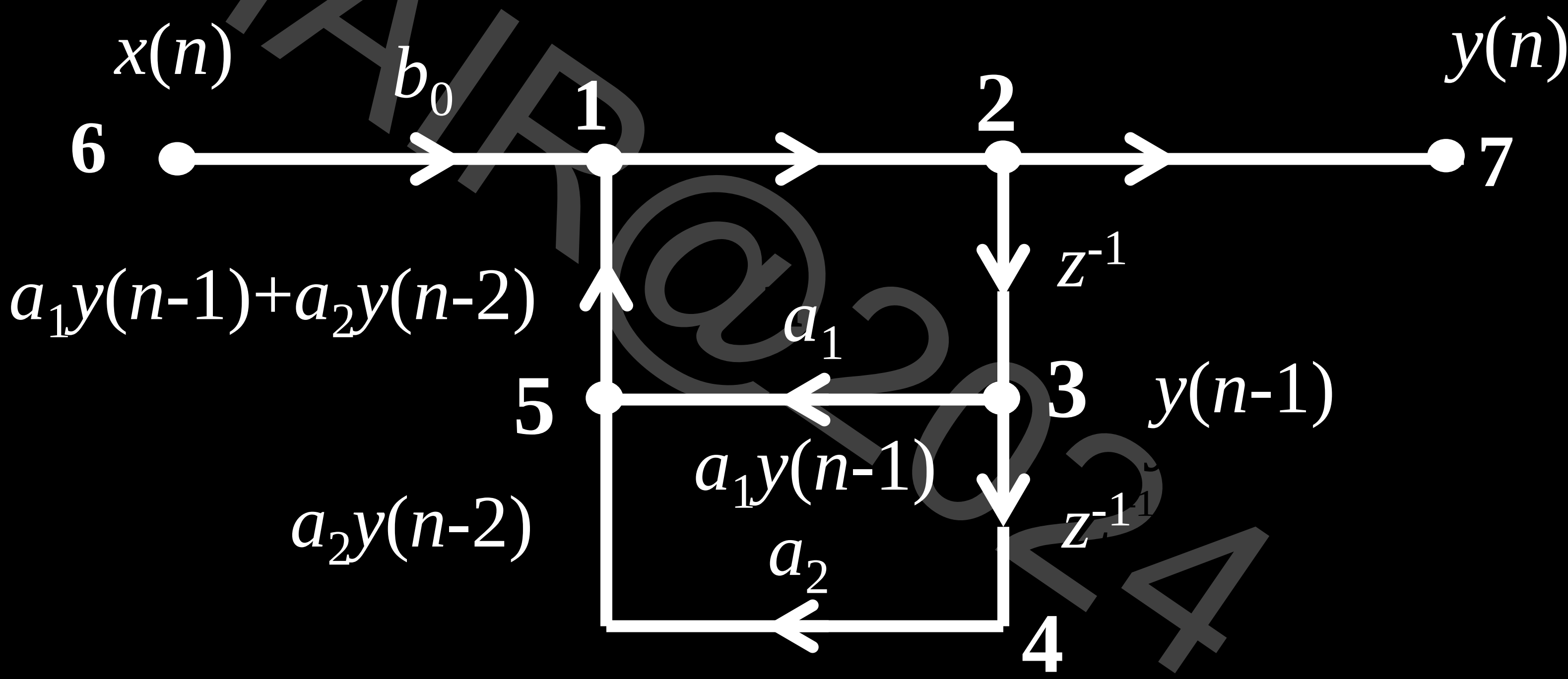
b）输出节点或阱节点：$y(n)$所处的节点；

c）分支节点：一个输入，一个或一个以上输出的节点，将值分配到每一支路;

d）相加器（节点)：有两个或两个以上输入的节点；

e）支路不标传输系数时，就认为其传输系数为1，任何一节点值等于所有输入支路的信号之和。

举例：$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_0x(n)$




和点：1，5；分点：2，3，4；源点：6；阱点：7

■ FIR滤波器的基本结构类型

□ **横截型（卷积型、直接型）** 时域

$$\boxed{y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)}$$

即线性移不变系统的卷积和公式。

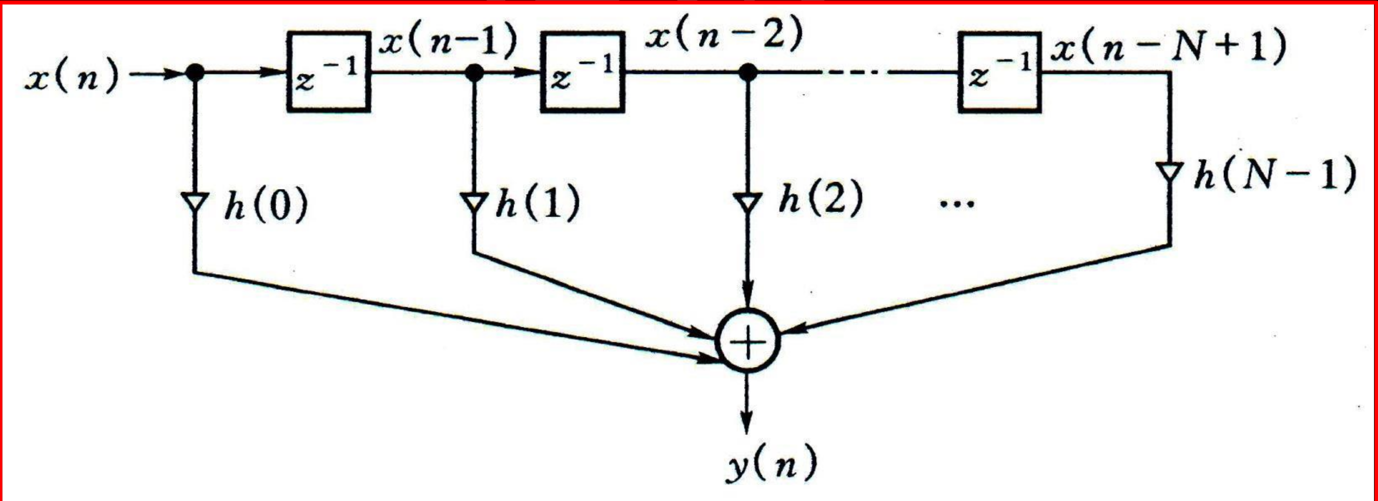
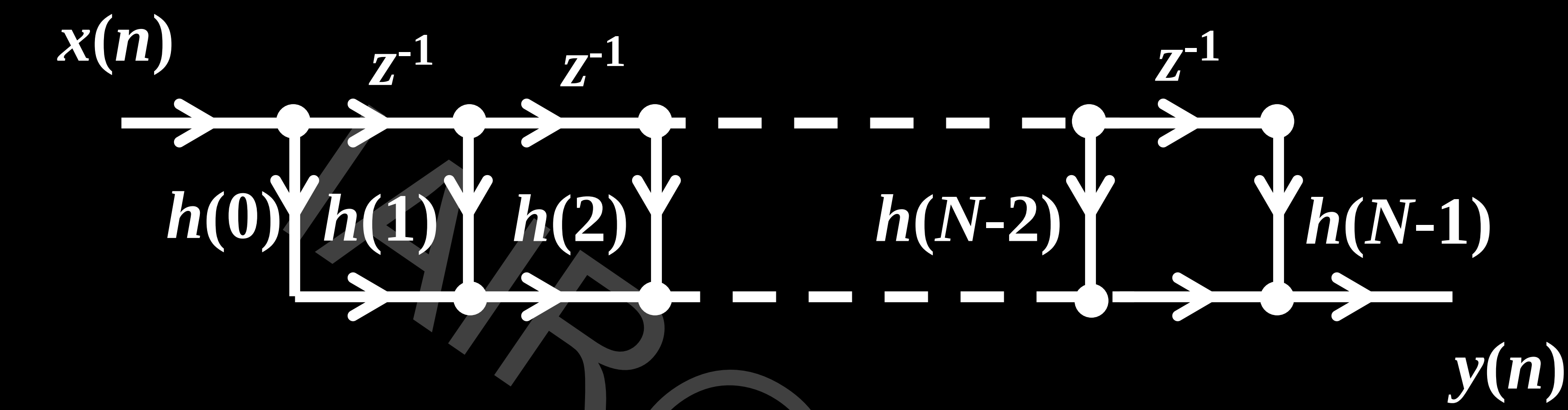


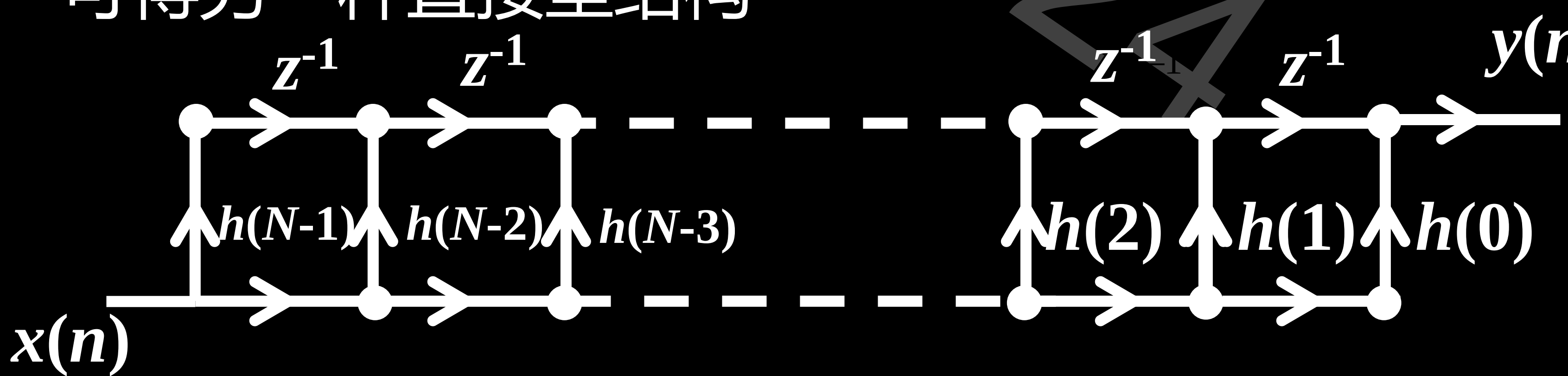

图 7.13 FIR 滤波器的非递归直接型结构

# 直接型结构的另一种形式：




**转置定理：**将原网络中所有支路方向倒转，并将输入、输出互换，则系统函数$H(z)$不改变。

可得另一种直接型结构



## □ 级联型 z域

将$H(z)$分解为实系数二阶因子的乘积形式

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\prod_{k=1}^{N/2}\left(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}\right)$$

注意:

（1）$[N/2]$表示取$N/2$的整数部分，如$N=3$，$[3/2]=1$;

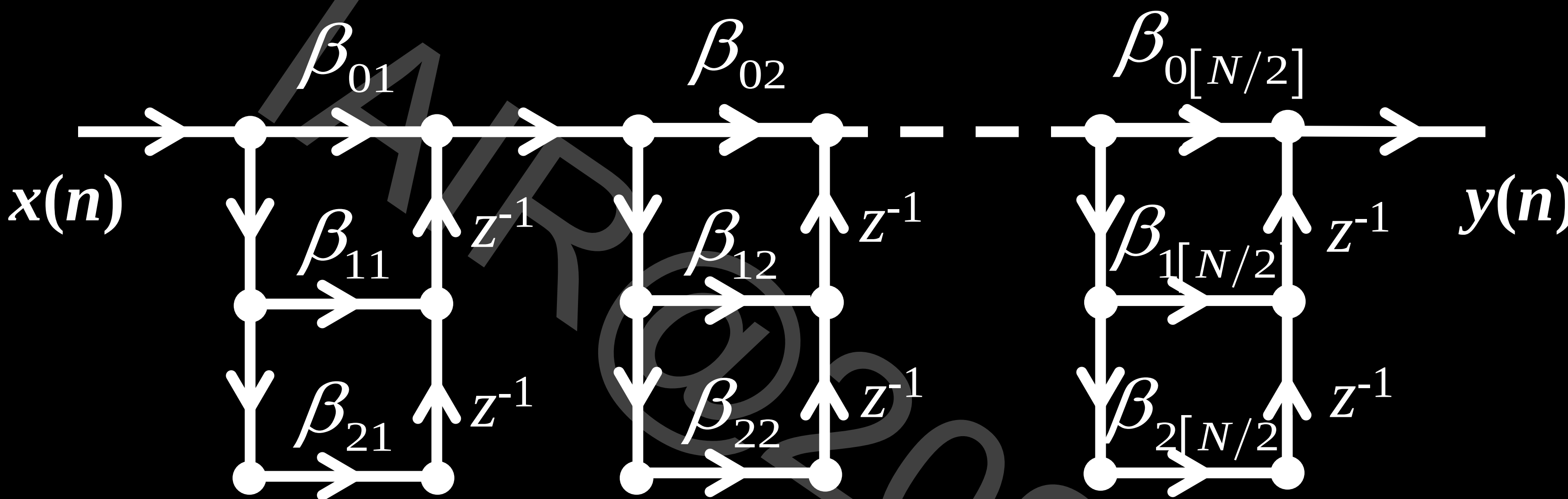
（2）$N$为偶数时，$N$-1为奇数，这时因为有奇数个根，所以$\beta_{2k}$中有一个为零。

举例：$N$=3时的结构如下

$$H(z)=Y(z)/X(z)=\beta_{01}+\beta_{11}z^{-1}+\beta_{21}z^{-2}$$

$$y(n)=\beta_{01}x(n)+\beta_{11}x(n-1)+\beta_{21}x(n-2)$$

# 一般的级联型结构形式：




级联型结构的特点：

（1）每节结构可控制一对零点；

（2）所需系数$\beta_{0ik}$多，因此乘法次数也多。

## 频率抽样型*

$N$个频率抽样$H(k)$恢复$H(z)$的内插公式：

$$H(z)=(1-z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1}{N}H_c(z)\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$$

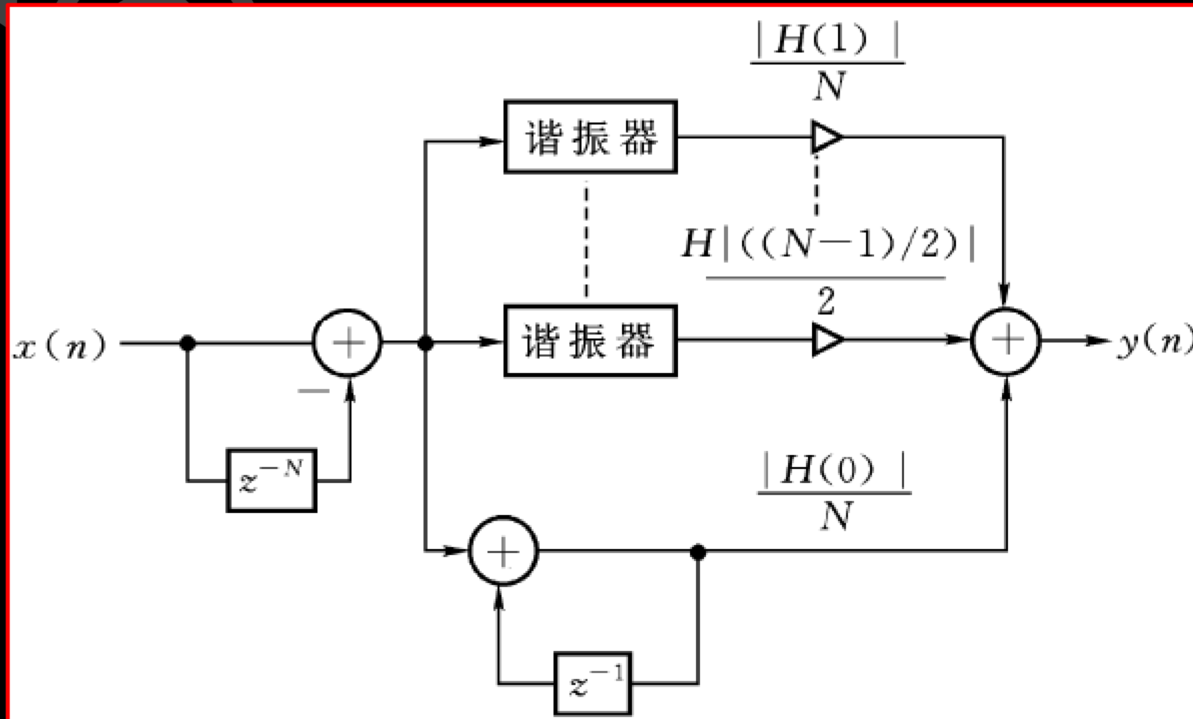
其中：

$$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

谐振器

$$H_c(z)=(1-z^{-N})$$

梳状滤波器



## 梳状滤波器

$$\boxed{H_c(z) = (1 - z^{-N})}$$

是$N$节延时单元的梳状滤波器，在单位圆上有$N$个等间隔角度的零点：$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, k = 0,1,\ldots,N-1$

**频率响应：**

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N}$$

$$= e^{-j\omega N/2}\left(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}\right)$$

$$= 2je^{-j\omega N/2}\sin\omega N/2$$

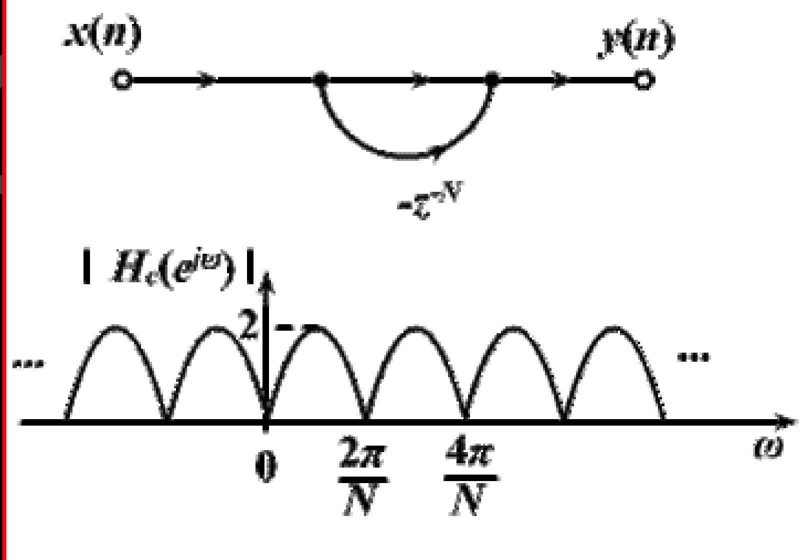


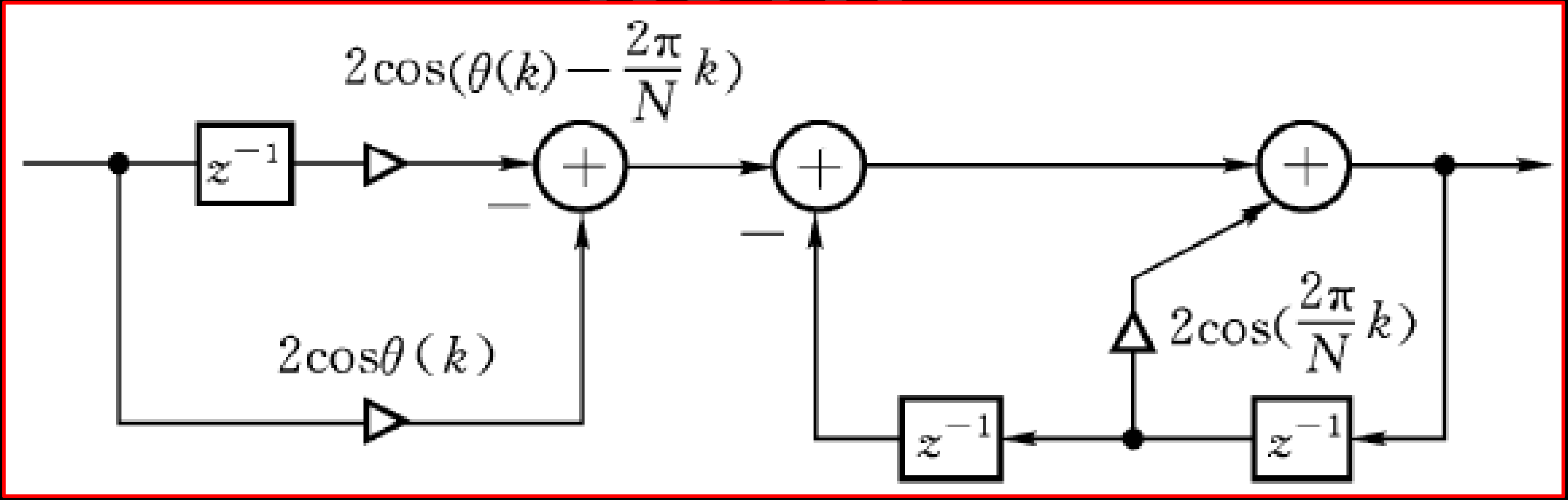

图5-18 梳状滤波器结构及频率响应幅度

## 谐振器

$$\boxed{H_k(z)=\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}$$

单位圆上有一个极点：$z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$，与梳状滤波器的第$k$个零点相抵消，使该频率$\omega=\frac{2\pi}{N}k$处的频率响应等于$H(k)$






**二阶谐振器结构图**

## ■ 频率抽样型结构的优缺点

□ 优点

（1）调整$H(k)$就可以有效地调整频响特性

（2）若$h(n)$长度相同，则网络结构完全相同，除了各支路增益$H(k)$，便于标准化、模块化

□ 缺点

（1）有限字长效应可能导致零极点不能完全对消，导致系统不稳定

（2）系数多为复数，增加了复数乘法和存储量

## 修正频率抽样结构*

为了克服系数量化误差可能导致系统不稳定的问题，将零极点全部移至单位圆内半径为 $r$ 的圆上（$r$<1且 $r\approx 1$ ）

$$\boxed{H(z)=(1-r^N z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_r(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}}$$

系统极点:

$$z_k=re^{j\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,\ldots,N-1$$

**对称性** $z_{N-k}=z_k^*$

$h(n)$实数 $H(k)=H^*((N-k))_N R(k)$

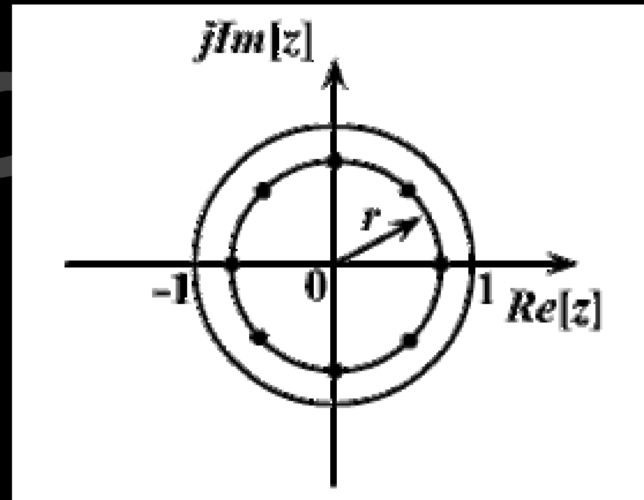



图5-20 抽样点改到$r\le 1$的圆上

将第$k$个和第$(N\text{-}k)$个谐振器合并成一个实系数的二阶网络:

$$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}+\frac{H(N-k)}{1-rW_N^{-(N-k)}z^{-1}}$$

$$=\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}+\frac{H^*(k)}{1-r(W_N^{-k})^*z^{-1}}$$

$$=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos(\frac{2\pi}{N}k)+r^2z^{-2}}$$

其中:

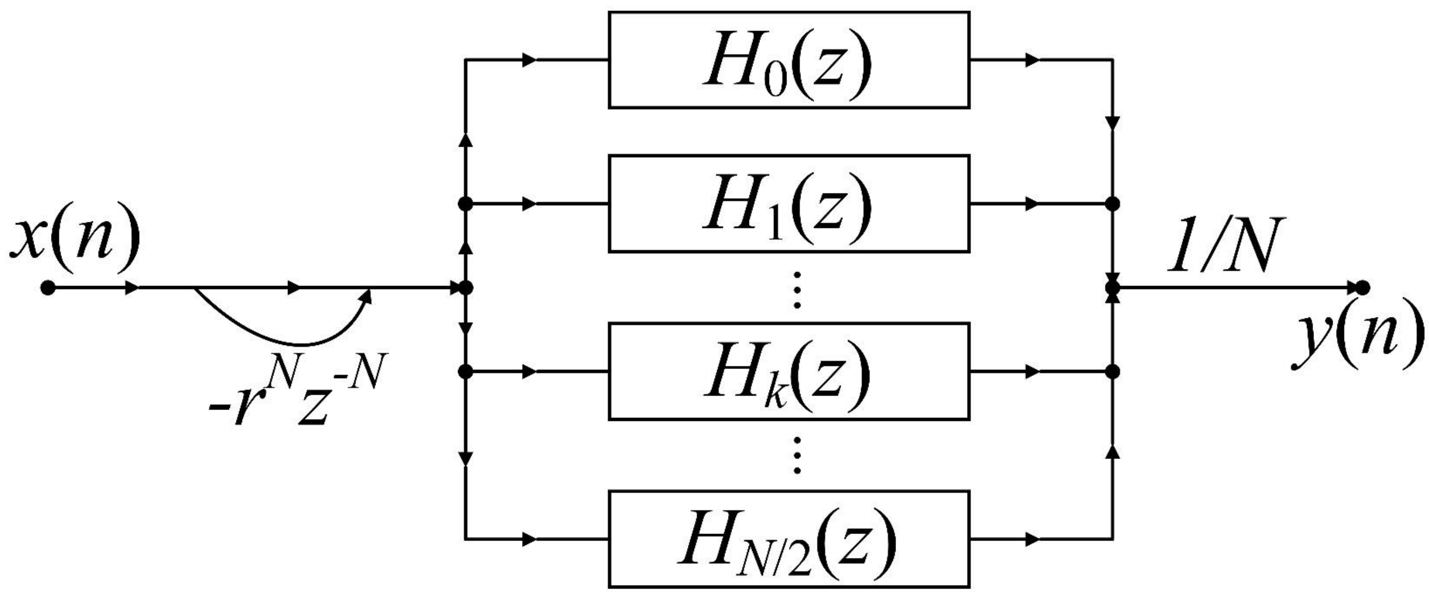
$$\beta_{0k}=2\,\mathrm{Re}[H(k)]$$

$$\beta_{1k}=-2r\,\mathrm{Re}[H(k)W_N^k]$$

$$\begin{cases} k=1,2,\ldots,(N-1)/2 & N\text{奇数} \\ k=1,2,\ldots,N/2-1 & N\text{偶数} \end{cases}$$

$N$偶数 $$H(z)=(1-r^N z^{-N})\frac{1}{N}\left[H_0(z)+H_{N/2}(z)+\sum_{k=1}^{N/2-1}H_k(z)\right]$$

$N$奇数 $$H(z)=(1-r^N z^{-N})\frac{1}{N}\left[H_0(z)+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}H_k(z)\right]$$




**FIR滤波器修正后的频率抽样结构**

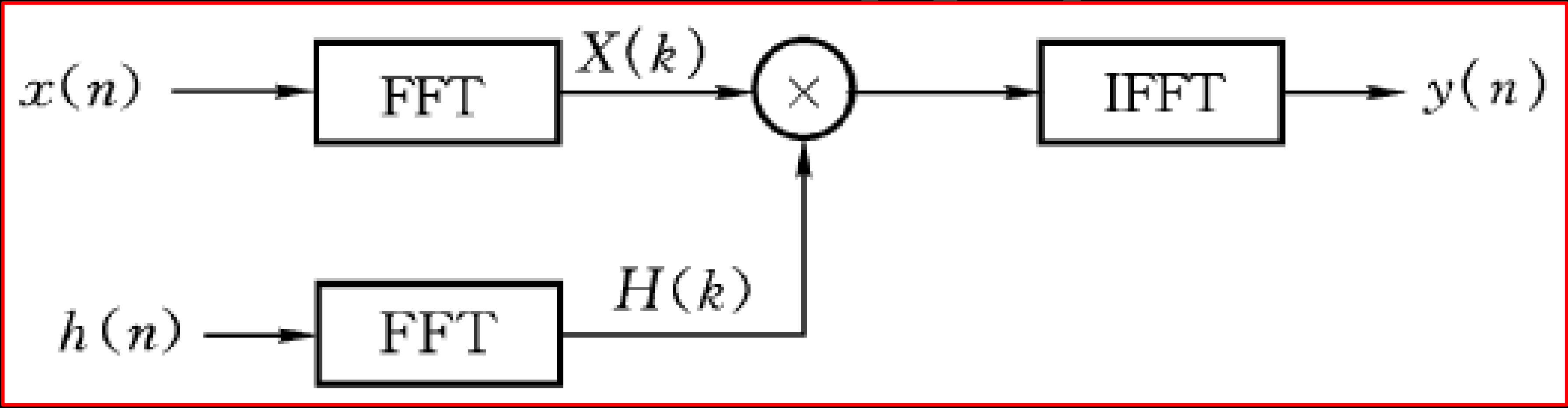
## 快速卷积（FFT）型结构*

如果$x(n)$的长为$N_1$，$h(n)$的长为$N_2$，将$x(n)$补$L-N_1$个零值点，$h(n)$补$L-N_2$零值点，只要满足$L \geq N_1 + N_2 - 1$,就有

$$\boxed{y(n) = x(n) \otimes h(n) = x(n) * h(n), 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2}$$

由卷积定理得$Y(k)=X(k)H(k)$，所以有

$$\boxed{y(n) = \mathrm{IDFT}[Y(k)] = \mathrm{IDFT}[X(k)H(k)] = x(n) * h(n)}$$



## ■ 线性相位FIR滤波器的结构

FIR滤波器单位抽样响应$h(n)$为实数，$0 \le n \le N-1$，且满足

偶对称：$h(n) = h(N-1-n)$

奇对称：$h(n) = -h(N-1-n)$

即对称中心在 $(N\text{-}1)\,/\,2$处，则这种FIR滤波器具有严格线性相位。

## $N$为奇数时：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N-1)/2-1}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-(N-1)/2}$$



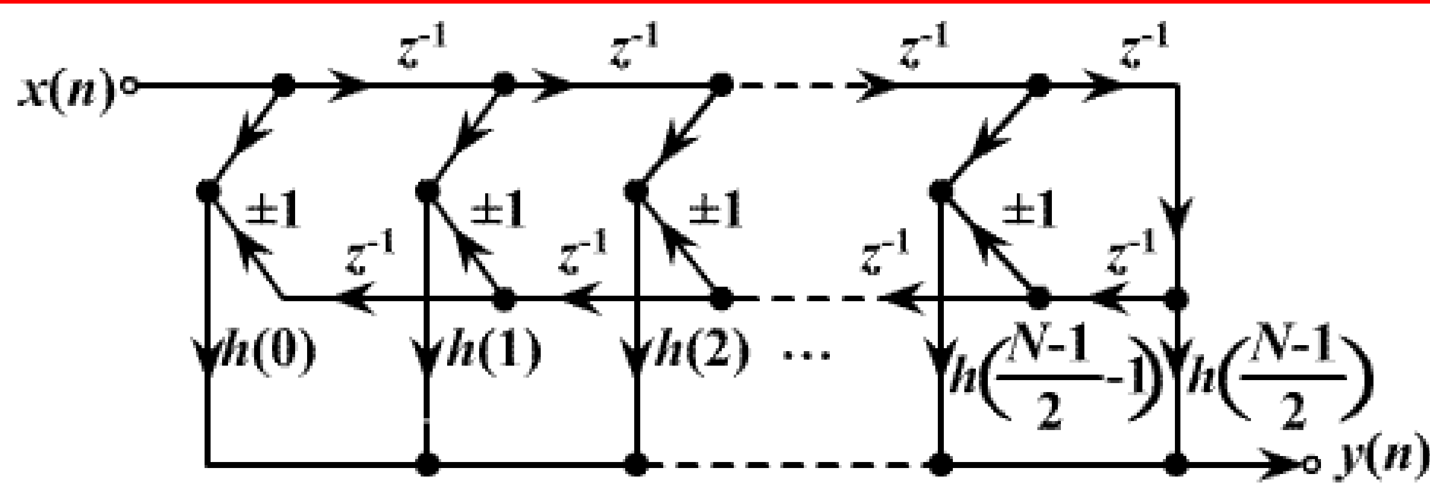



图5-26 $N$为奇数时线性相位$FIR$滤波器的直接型结构

## ▫ N为偶数时：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\right]$$

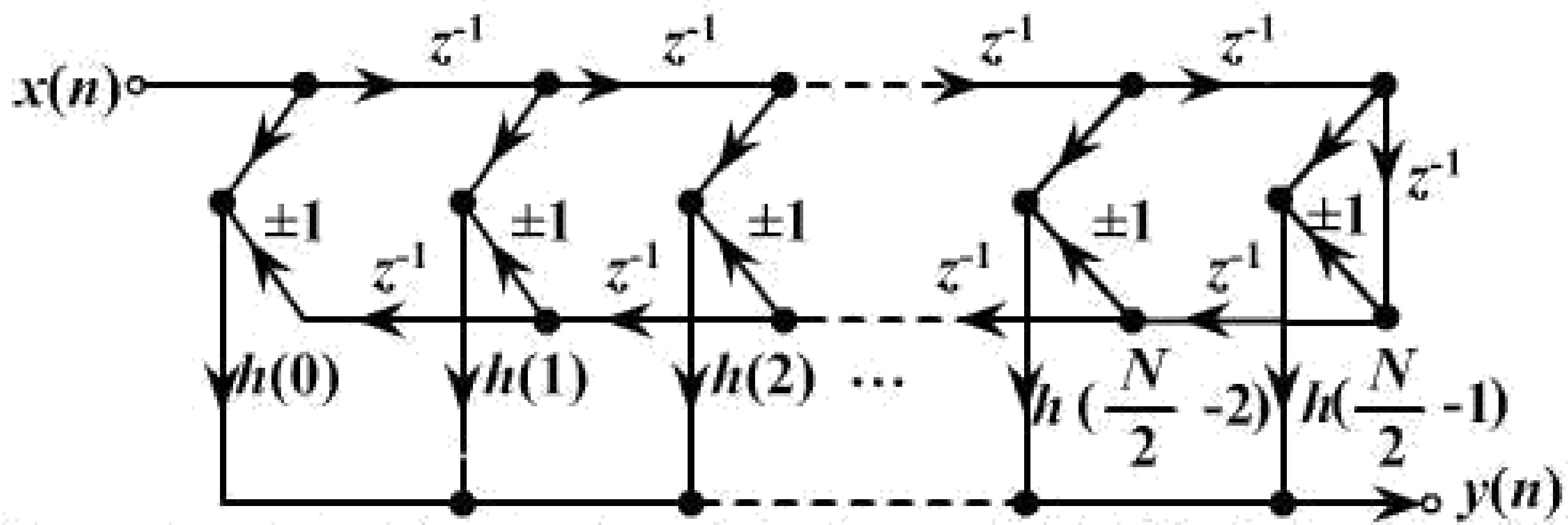



图5-27 N为偶数时，线性相位FIR滤波器的直接型结构
(h(n) 偶对称时±1取+1, h(n)奇对称时±1取-1)

# 本章小结:

- 傅里叶级数展开法设计FIR滤波器
- 窗函数设计法
- 频率采样法
- FIR滤波器的实现结构