


# 第六章 数字滤波器的基本原理与特性

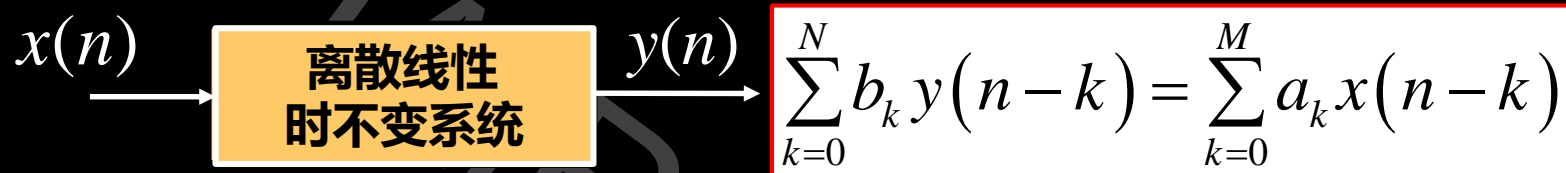
郑南宁 教授

# 回顾：

- ① 任意一个序列都可以用其幅度加权的单位采样序列的线性组合来表征
- ② 离散时间系统
- ③ 线性时不变系统的单位采样响应 $h(n)$
- ④ 因果性与稳定性
- ⑤ 任何离散线性时不变系统都可以用常系数差分方程来表征
- ⑥ 离散线性时不变系统的 $h(n)$  
  - 有限冲激响应 FIR
  - 无限冲激响应 IIR
- ⑦ 利用差分方程导出系统函数 $H(z)$

## ■ 差分方程与系统函数

### □ 线性常系数差分方程表示的离散线性时不变系统



$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{b_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{b_0} y(n-k), \quad b_0 \neq 0$$

### □ 线性常系数差分方程表示的离散线性时不变系统具有 $z^{-1}$ 的有理函数形式的系统函数

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad \text{或} \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

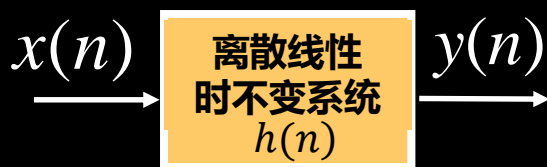
## ■ 离散线性时不变系统的频率响应

- 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 定义为系统对复指数输入信号（特征函数） $e^{j\omega n}$ 的复增益（特征值）
- 若系统的傅里叶变换存在，则有

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i e^{-j\omega i}}{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}}$$

系统的频率响应由  
 **$z$ 平面中单位圆上**  
的系统函数值确定

## □ 数字滤波器



设计一个合适的 $h(n)$ ，可以滤除输入信号 $x(n)$ 中不需要的频率分量，产生输出 $y(n)$ ，即系统完成**离散卷积运算**

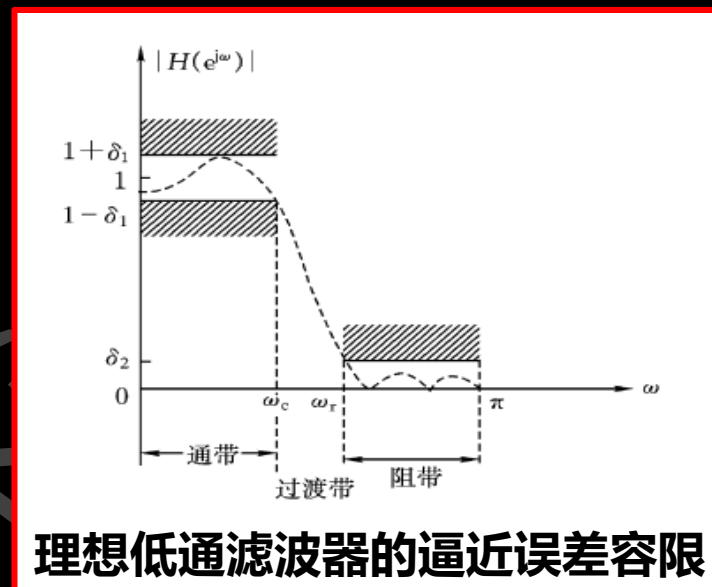
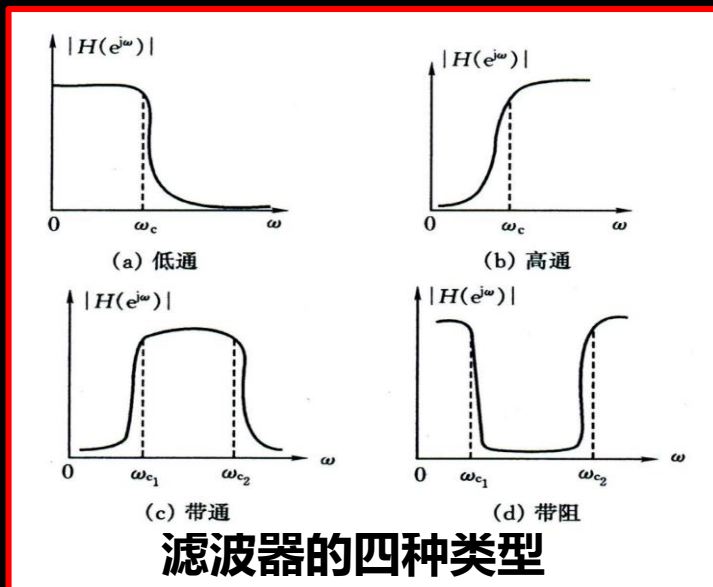
$$y(n) = x(n) * h(n)$$

这类系统称之为**数字滤波器**

数字滤波器的输入与输出的频率关系： $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

# 6.1 数字滤波器的基本原理

## 6.1.1 滤波器的基本类型与指标



通带内指标

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad |\omega| \leq \omega_c$$

$$\max_{\omega \in (0, \pi)} \{ ||H(e^{j\omega})| - 1 | \} \leq \delta_1, \quad (\omega_c \text{ 通带截止频率})$$

阻带内幅频特性逼近于0

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \omega_r \leq |\omega| \leq \pi \quad (\omega_r - \text{阻带截止频率})$$

## ■ 滤波器的基本指标

采用相对指标描述频率响应特性，以分贝（dB）为单位表示

$$20\lg \frac{|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|_{\max}} \text{ (dB)}$$

通带内允许的最大衰减  $\alpha_1 = 20\lg \frac{|H(e^{j\omega_c})|}{|H(e^{j0})|} = 20\lg(1 - \delta_1)$   
 (通带内衰减-3dB时，幅频响应降到0.707)

阻带内应达到的最小衰减  $\alpha_2 = 20\lg \frac{|H(e^{j\omega_r})|}{|H(e^{j0})|} = 20\lg(\delta_2)$   
 (阻带内衰减-40dB时，幅频响应达到0.01)

滤波器的主要技术指标：

- 阶数
- 通带截止频率 $\omega_c$ 及最大衰减 $\alpha_1$
- 阻带截止频率 $\omega_r$ 及最小衰减 $\alpha_2$

## 6.1.2 滤波器的基本方程与分类

### □ 滤波器的基本方程

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

$x(n)$ 和 $y(n)$ 是滤波器的输入输出序列,  $a_k$ 和 $b_k$ 是滤波器

### □ 滤波器的分类 — 递归与非递归

当 $b_0 = 1$ , 其余系数 $b_k$ 不是全部为零时, 滤波器为**递归**的, 又称**IIR**滤波器; **IIR**滤波器分为自回归移动平均 (**ARMA**) 和自回归 (**AR**) 滤波器 (当 $a_0 = 1$ , 其系数余 $a_k = 0$ )

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad \text{ARMA滤波器}$$

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad \text{AR滤波器}$$

当 $b_0 = 1$ , 其余系数 $b_k$ 全部为零时, 滤波器为**非递归**的, 又称**FIR**滤波器

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-k) \quad \text{MA滤波器}$$

这里将递归与IIR滤波器对应, 非递归与FIR滤波器对应, 但它们之间不是唯一对应的, 递归同样适用于FIR滤波器实现, 非递归也可实现IIR滤波器。要把实现方法与冲激响应区分开来。

## □ 滤波器的系统函数与冲激响应

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$



$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

LTI系统可由其冲激响应 $h(n)$ 完全刻画

$$y(n) = T \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) T \{ \delta(n-m) \}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = x(n) * h(n)$$

对于因果系统

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) h(n-m) = x(n) * h(n)$$



## 6.2 数字滤波器的基本特性

### 6.2.1 FIR滤波器的基本特性与类型

$h(n)$ 是FIR滤波器的单位冲激响应，长度为 $N$ ，则其系统函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)}$$

- 收敛域包括单位圆；
- $z$ 平面上有 $N-1$ 个零点；
- $z=0$ 是 $N-1$ 阶极点；

$H(z)$ 为 $z^{-1}$ 的 $N-1$ 阶多项式。其离散时间傅里叶变换为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

显然 $H(e^{j\omega})$ 是频率的周期函数，周期为 $2\pi$ ，即

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi m)}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

由于任一长度为 $N$ 的序列完全由它的离散傅里叶变换的 $N$ 个采样确定，因此FIR滤波器的设计问题，就在于考虑使输出信号不失真的条件下，找出它的冲激响应系数或它的频率响应的 $N$ 个采样。下面的讨论就遵循这样的思路进行。

□ 使滤波器的输出信号不失真，冲激响应 $h(n)$ 需满足线性相位条件

## 1、 $h(n)$ 的幅频特性和相频特性

对于长度为 $N$ 的**FIR滤波器**的单位脉冲响应 $h(n)$ ，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$H(\omega)$ 为 $H(e^{j\omega})$ 的幅频特性， $\theta(\omega)$ 为 $H(e^{j\omega})$ 的相频特性

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctan \left[ \frac{\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}} \right] \\ &= \arctan \left[ \frac{-\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)} \right] = -\tau\omega \end{aligned}$$

**注意：**

- $H(\omega)$ 为 $\omega$ 的实函数，可能取负值；
- $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅度响应，总是正值；
- 相频特性与滤波器对输入信号产生的时延有密切关系

## 2、严格线性相位与广义线性相位

线性相位是指滤波器的相频特性（相位与频率之间）是线性的，即  $\theta(\omega)$  是  $\omega$  的线性函数，产生的相移是一常数

$$\theta(\omega) = -\omega\tau$$

(严格)  
线性相位

FIR滤波器的相延迟和群延迟的定义

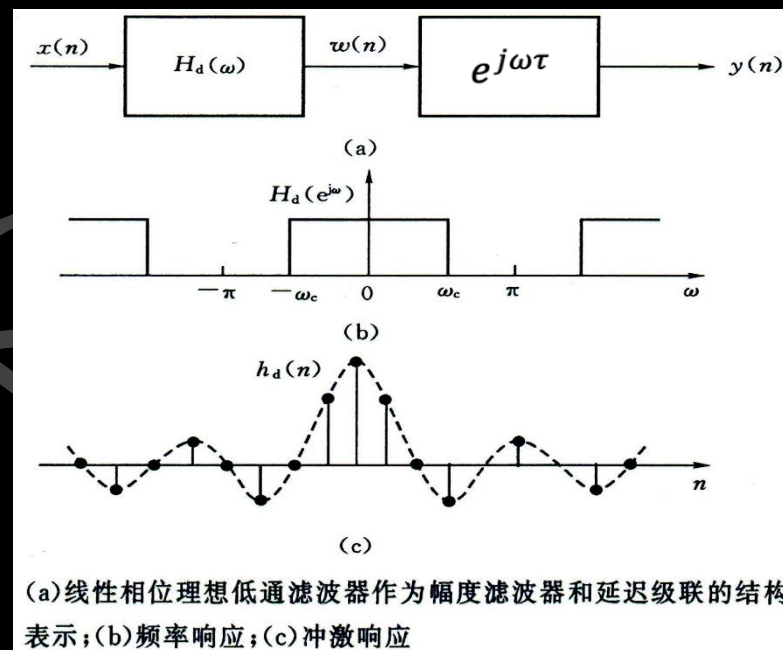
$$\text{相延迟 } \tau_p(\omega) = \frac{\theta(\omega)}{\omega}$$

$$\text{群延迟 } \tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \omega\tau, \theta_0 \text{ 是起始相位}$$

广义线性相位

- 相延迟表示信号载波的延迟，群延迟表示信号包络的延迟
- 群延迟偏离某个常数的程度表明相位特性的非线性程度
- 严格线性相与广义线性相位都满足群延迟是一个常数  $\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$
- 严格线性相位的群延迟和相延迟必定相等，都是一个常数  $\tau$



(举例：理想延迟系统)

- **举例：** 设一离散时间系统的幅频特性为1，相频特性具有如下线性相位：

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

当信号 $x(n)$ 通过该系统后，输出 $y(n)$ 的频率特性

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\tau\omega} X(e^{j\omega}) \\ &= |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})] - j\tau\omega} \end{aligned}$$

所以  $y(n) = x(n - \tau)$

即，输出 $y(n)$ 等于输入 $x(n)$ 时间上的位移。

## □ 滤波器冲激响 $h(n)$ 具有严格线性相位 $\theta(\omega) = -\omega\tau$ 的条件

由严格线性相位定义, 有

$$q(\omega) = -\omega\tau = \arctan \left[ \frac{-\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)} \right]$$

即

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}$$

利用交叉相乘并用三角函数 $\downarrow$ 的恒等关系合并有关项

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \sin(\omega\tau) \cos(\omega n) - \cos(\omega\tau) \sin(\omega n) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\tau - n)\omega] = 0 \end{aligned}$$

(接上页)

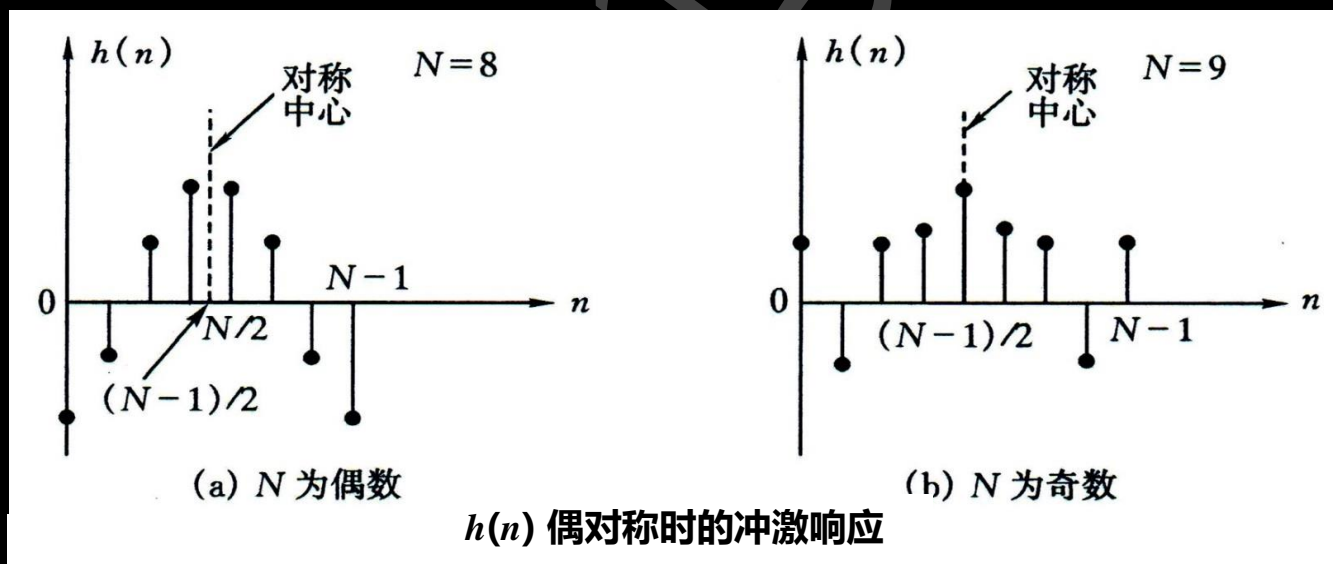
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin [(\tau - n)\omega] = 0$$

对于  $n$  和  $\tau$ , 解上式得到

$$\tau = \frac{N-1}{2} \text{ 和 } h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{偶对称}$$

由此我们知道, 要实现严格线性相位 (相延迟和群延迟相等) 的 FIR 滤波器的充要条件是冲激响应  $h(n)$  对中心点偶对称。

$h(n)$  的长度  $N$  又分为奇偶数



## □ 滤波器冲激响应满足广义线性相位 $\theta(\omega) = \theta_0 - \omega\tau$ 的条件

由广义线性相位定义, 有

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = H(\omega)e^{j(\theta_0 - \omega\tau)}$$

采用类似严格线性相位的方法, 得到

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \tau) - \theta_0] = 0 \quad \text{此方程对于具有恒定群延迟系统} \quad \text{(A)}$$

是关于 $h(n)$ ,  $\tau$ 和 $\theta_0$ 的一个必要条件, 它必须对所有 $\omega$ 都成立

当 $\theta_0 = 0$ 或 $\pi$ , 有

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(n - \tau)\omega] = 0$$

等价于严格线性相位的情形 (略)

当  $\theta_0 = \pi/2$  或  $3\pi/2$

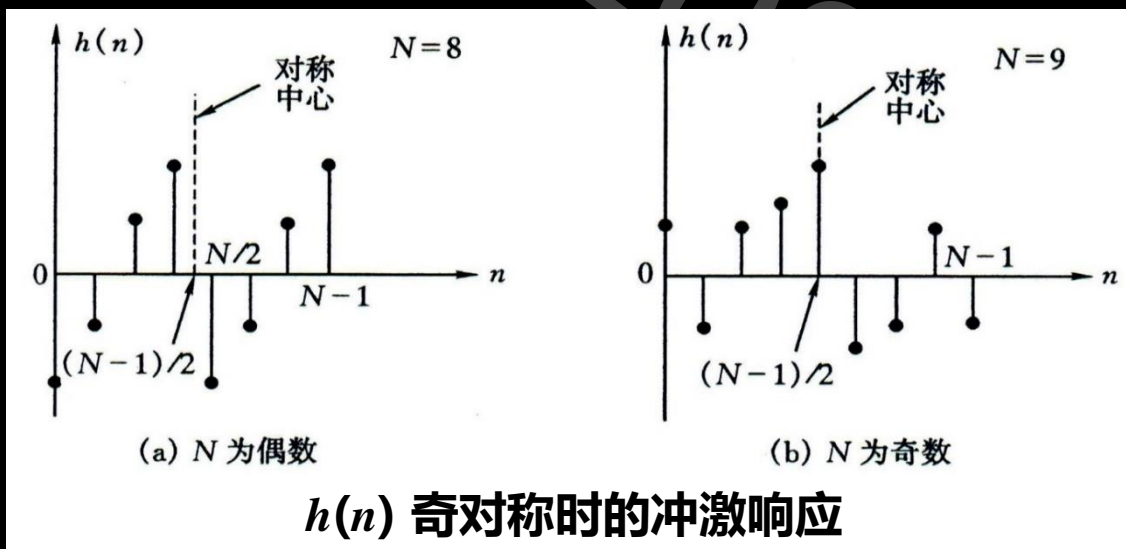
前面的式(A)  $\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n-\tau) - \theta_0] = 0$  变成  $\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos[(n-\tau)\omega] = 0$

对于  $n$  和  $\tau$ , 解上式得到

$$\tau = \frac{N-1}{2} \text{ 和 } h(n) = -(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{奇对称}$$

由此我们知道, 要实现广义线性相位 (恒定群延迟特性) 的FIR滤波器的充要条件是冲激响应  $h(n)$  对中心点奇对称。

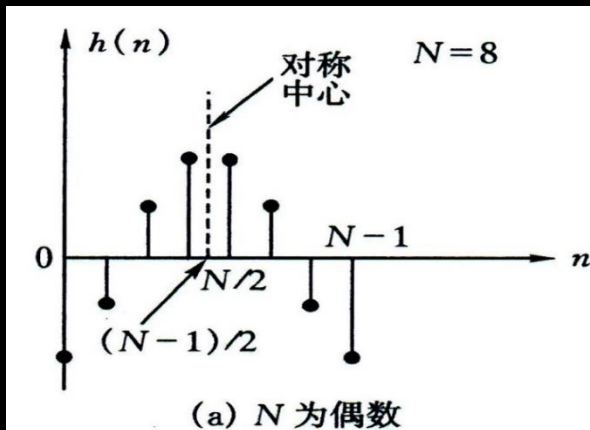
$h(n)$  的长度  $N$  又分为奇偶数



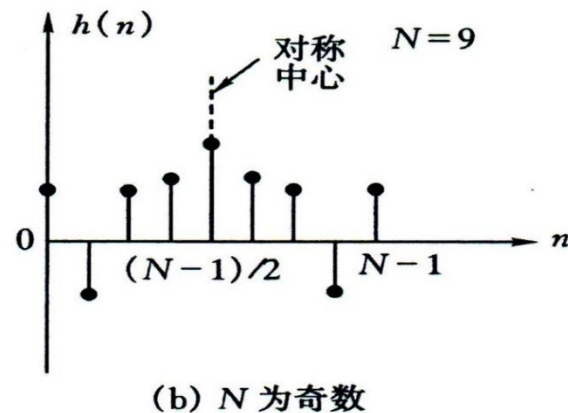


## 小结：线性相位FIR滤波器 $h(n)$ 的四种时域特性

$h(n)$  偶对称  
 $N$ 为偶数

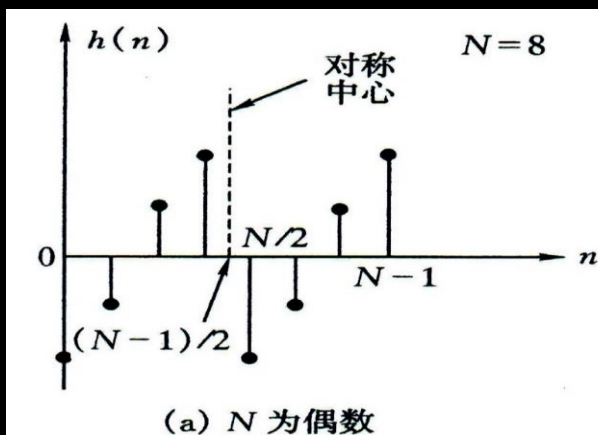


$h(n)$  偶对称  
 $N$ 为奇数

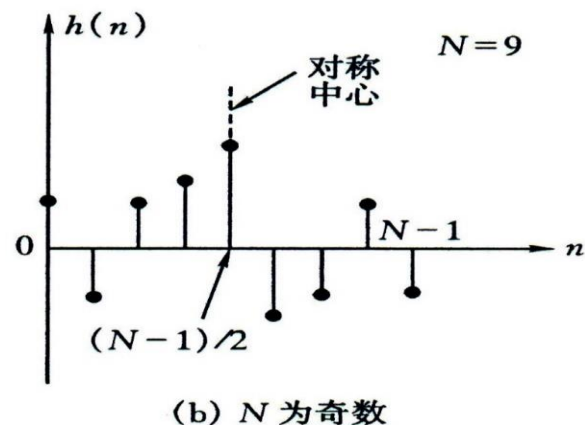


$h(n)$  偶对称时的冲激响应

$h(n)$  奇对称  
 $N$ 为偶数



$h(n)$  奇对称  
 $N$ 为奇数



$h(n)$  奇对称时的冲激响应

## ■ 小结

### □ FIR滤波器是线性相位的充分必要条件：

$$h(n) \text{ 为实序列且 } h(n) = \pm h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- (1) 在严格或广义线性相位条件下，滤波器都有 $(N-1)/2$ 采样周期的群延迟
- (2) 广义线性相位条件下，即 $h(n)$ 奇对称，滤波器还要产生 $90^\circ$ 相移

### □ 根据 $N$ 的奇偶性和 $h(n)$ 的奇偶对称性，线性相位FIR滤波器分为四种类型：

- (1)  $h(n)$ 偶对称， $N$ 为奇数
- (2)  $h(n)$ 偶对称， $N$ 为偶数
- (3)  $h(n)$ 奇对称， $N$ 为奇数
- (4)  $h(n)$ 奇对称， $N$ 为偶数

## ■ 由频率响应函数的级数展开验证线性相位的条件

线性相位一般形式  $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j(\alpha+\beta\omega)}$

FIR滤波器的系统函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j\omega(M-n)}$$

引入  $e^{-j\omega M}$

将上式右边的级数展开

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M} \left[ h(0)e^{j\omega M} + h(1)e^{j\omega(M-1)} + h(2)e^{j\omega(M-2)} + \dots + h(N-2)e^{j\omega(M-N+2)} + h(N-1)e^{j\omega(M-N+1)} \right]$$

令  $M = \frac{N-1}{2}$

(接下页)

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[ h(0)e^{j\omega \frac{N-1}{2}} + h(1)e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-1\right)} + h(2)e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-2\right)} + \dots + h(N-2)e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-N+2\right)} + h(N-1)e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-N+1\right)} \right]$$

上式中的  $M = \frac{N-1}{2}$

$$= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[ h(0)e^{j\omega \frac{N-1}{2}} + h(1)e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-1\right)} + h(2)e^{j\omega \left(\frac{N-1}{2}-2\right)} + \dots + h(N-2)e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}-1\right)} + h(N-1)e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \right]$$

利用复指数  $e^{j\omega \frac{N-1}{2}} = \cos\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) + j\sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right)$  ,  $e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} = \cos\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) - j\sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right)$

展开复指数，合并同类项，得到

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ \left[ h(0) + h(N-1) \right] \cos\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) + j \left[ h(0) - h(N-1) \right] \sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) + \dots \right. \\ \left. \left[ h(1) + h(N-2) \right] \cos\left(\omega \frac{N-1}{2} - 1\right) + j \left[ h(1) - h(N-2) \right] \sin\left(\omega \frac{N-1}{2} - 1\right) + \dots \right\} \quad (\text{A})$$

与线性相位一般形式比较（下页讨论）

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j(\alpha+\beta\omega)} = H(\omega)e^{j\alpha}e^{j\beta\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ [h(0) + h(N-1)] \cos\left(\omega\frac{N-1}{2}\right) + j[h(0) - h(N-1)] \sin\left(\omega\frac{N-1}{2}\right) + \dots \right. \\ \left. [h(1) + h(N-2)] \cos\left(\omega\frac{N-1}{2} - 1\right) + j[h(1) - h(N-2)] \sin\left(\omega\frac{N-1}{2} - 1\right) + \dots \right\} \quad (\text{A})$$

$$e^{j\beta\omega} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

将上式与频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 比较

$$H(e^{j\omega}) = \underline{H(\omega)} e^{j(\alpha+\beta\omega)} = \underline{H(\omega)} e^{j\alpha} e^{j\beta\omega} \quad (\text{讨论})$$

□  $\beta$ 的取值:  $\beta = -(N-1)/2$

□  $\alpha$ 的取值:

(1)  $\alpha=0$  时,  $h(n)$ 偶对称, 即 $h(n) = h(N-1-n)$ , 大括号中的项为纯实数,

(2)  $\alpha=\pi/2$  时,  $h(n)$ 奇对称, 即 $h(n) = -h(N-1-n)$ , 大括号中的项为纯虚数

## 当 $h(n)$ 为偶对称时, FIR滤波器的幅频和相频特性

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n} = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)}$$

令  $N-1-n=m$ , 则有

$$= z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1}{2} [H(z) + z^{-(N-1)} H(z^{-1})] = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{1}{2} [z^{-n+\frac{N-1}{2}} + z^{n-\frac{N-1}{2}}] \right]$$

将 $z=e^{j\omega}$ 带入上式, 即得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

**幅频特性**  $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$

**相频特性**  $\theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega$

## 当 $h(n)$ 为奇对称时, FIR滤波器的幅频和相频特性

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = -\sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n} = -\sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)}$$

令  $N-1-n=m$ , 则有

$$= -z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = -z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1}{2} [H(z) - z^{-(N-1)} H(z^{-1})] = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{1}{2} \left[ z^{-n+\frac{N-1}{2}} - z^{n-\frac{N-1}{2}} \right] \right]$$

将 $z=e^{j\omega}$ 带入上式, 即得

$$H(e^{j\omega}) = -je^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

因此

**幅频特性**  $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$

**相频特性**  $\theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega + \frac{\pi}{2}$

## ■ 线性相位FIR滤波器的四种类型

(1) I型  $h(n) = h(N - 1 - n)$ , 偶对称,  $N$ 为奇数

由前面推导出的幅频特性  $H(\omega)$  为:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

**幅频特点:**

- $h(n)$ 对 $(N-1)/2$ 偶对称, 余弦项也对 $(N-1)/2$ 偶对称
- 以 $(N-1)/2$ 为中心, 把两两相等的项进行合并, 因 $N$ 为奇数, 余下中间项  $n=(N-1)/2$



$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

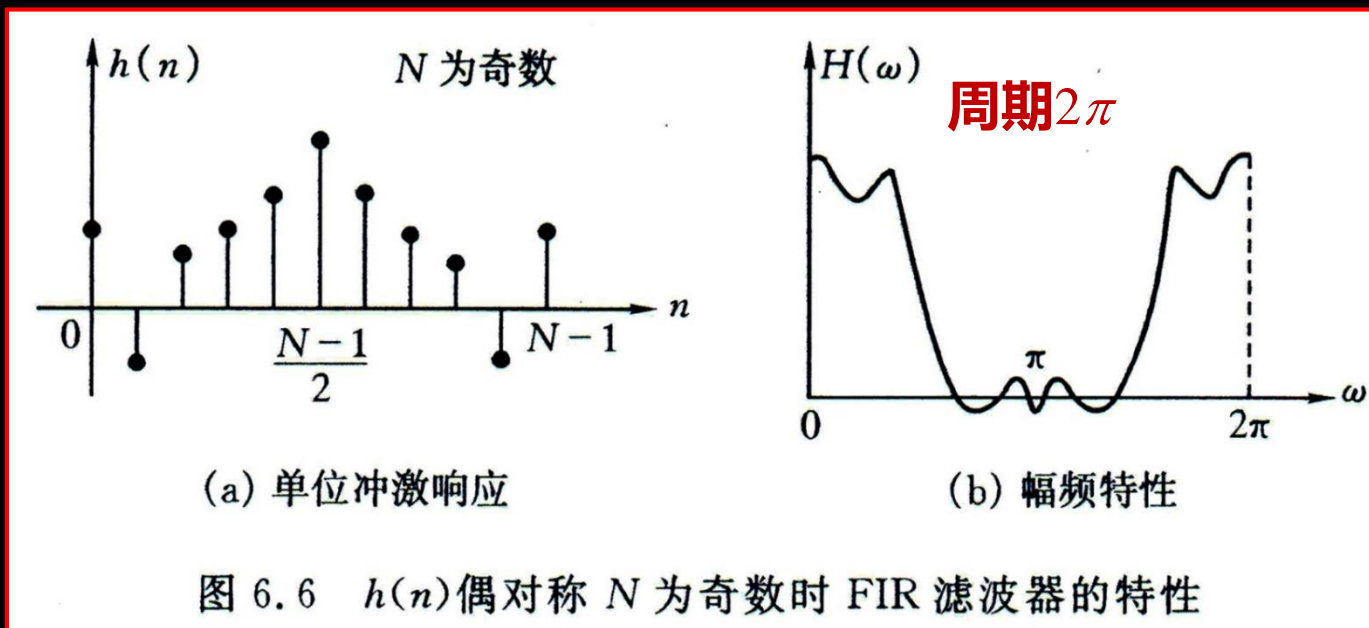
$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos \omega m$$

$$\text{令 } m = \frac{N-1}{2} - n$$

$$= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos \omega n$$

其中：

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$



幅频特性:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1/2} a(n) \cos \omega n$$

- 式中  $\cos \omega n$  项对  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  皆为偶对称, 则幅频特性对  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  是偶对称的
- 可实现所有滤波特性 (低通、高通、带通、带阻)

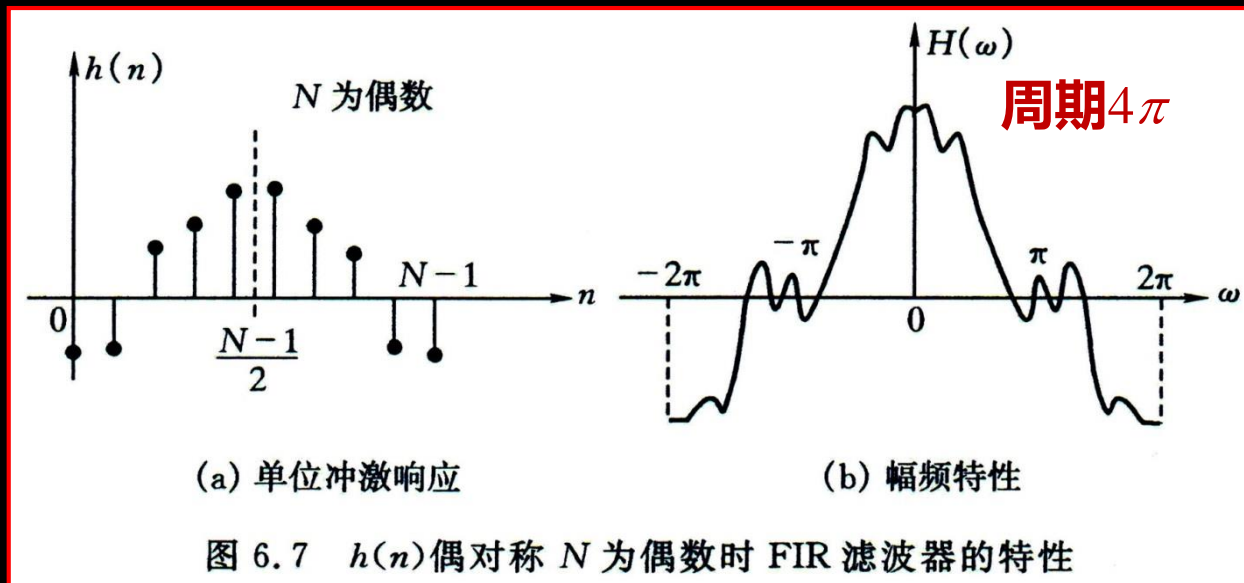
(2) II型  $h(n) = h(N - 1 - n)$ , 偶对称,  $N$ 为偶数

推导情况和前面 $N$ 为奇数类似, 不同点是由于 $N$ 为偶数, 相等的项合并成 $N/2$ 项:

$$\text{令 } m = \frac{N}{2} - n$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \cos\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

其中:  $b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$



幅频特性:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

- 由于  $\cos[\omega(n - 1/2)]$  对  $\omega = \pi$  奇对称, 所以  $H(\omega)$  在  $\omega = \pi$  呈奇对称
- 当  $\omega = \pi$  时,  $\cos[\omega(n - 1/2)] = 0$ , 故  $H(\pi) = 0$ , 即  $H(z)$  在  $z = -1$  处有一零点, 因此这种情况不能用于  $H(\pi) \neq 0$  的滤波器, 即不能实现高通、带阻滤波器

(3) III型  $h(n) = -h(N-n-1)$  , 奇对称,  $N$  为奇数

由于  $h(n) = -h(N-n-1)$  , 当  $n = \frac{N-1}{2}$  时

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) = -h\left(N - \frac{N-1}{2} - 1\right) = -h\left(\frac{N-1}{2}\right) \Rightarrow h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

由前面推导出的幅频特性  $H(\omega)$  为:

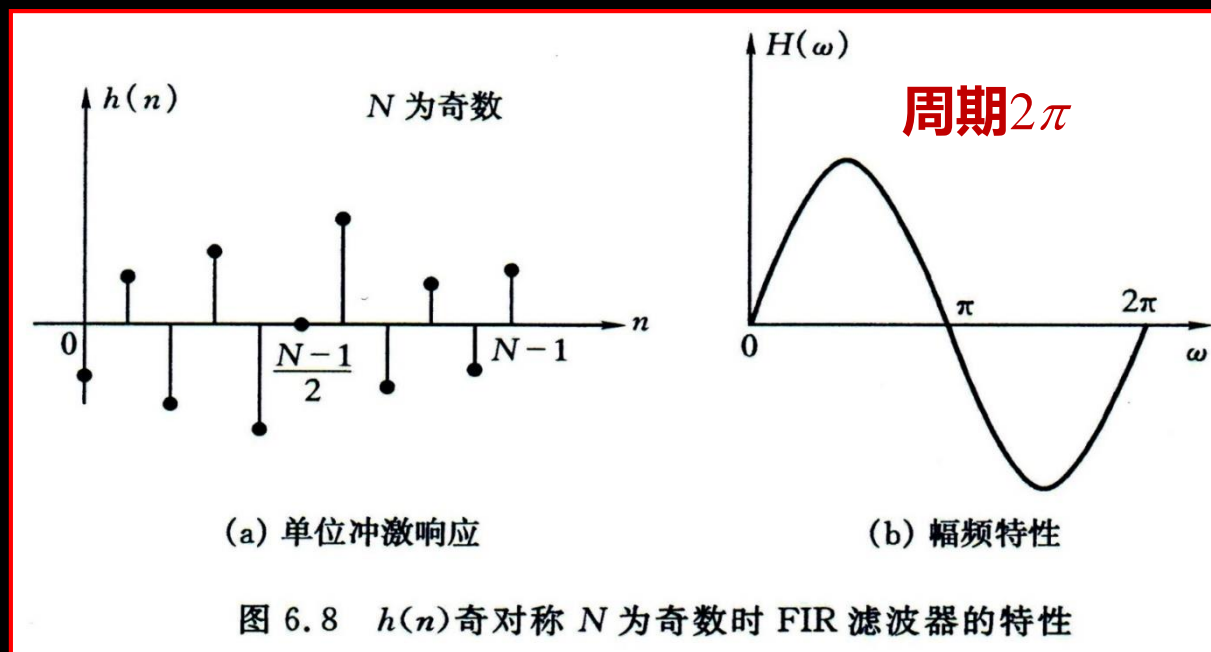
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right]$$

$$\text{令 } m = \frac{N-1}{2} - n$$

得到

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin \omega n$$

其中:  $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$



## 幅频特性:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin \omega n,$$

- 幅频函数  $H(\omega)$  在  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  呈奇对称
- $H(\omega)$  在  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  处值为 0, 即  $H(z)$  零点在  $z = \pm 1$  处, 不能用于  $H(0) \neq 0$  和  $H(\pi) \neq 0$  的滤波器设计, 但可以实现带通滤波器

#### (4) IV型 $h(n) = -h(N-n-1)$ ，奇对称， $N$ 为偶数

幅频特性：

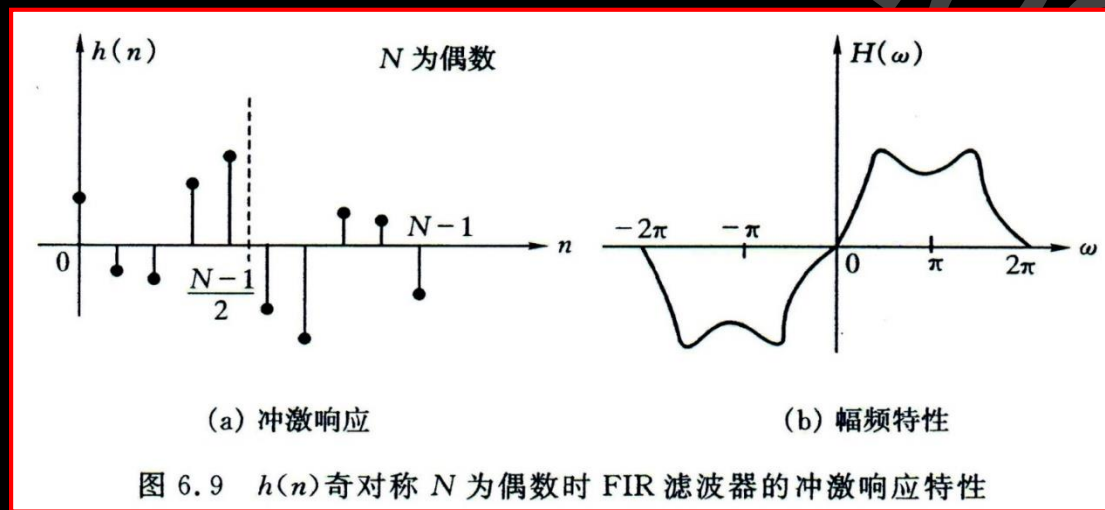
$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \sin\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

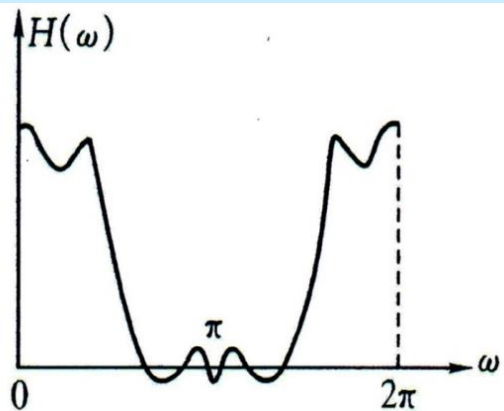
其中： $d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

□ 由于 $\sin[\omega(n-1/2)]$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处都为0，因此 $H(\omega)$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处也为0，即 $H(z)$ 在 $z=1$ 处有零点；并对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈奇对称，故不能实现低通、带阻滤波器

□ 由于 $\sin[\omega(n-1/2)]$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处都呈奇对称，对 $\omega = \pi$ 呈偶对称，故幅频函数 $H(\omega)$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 也呈奇对称，在 $\omega = \pi$ 处呈偶对称

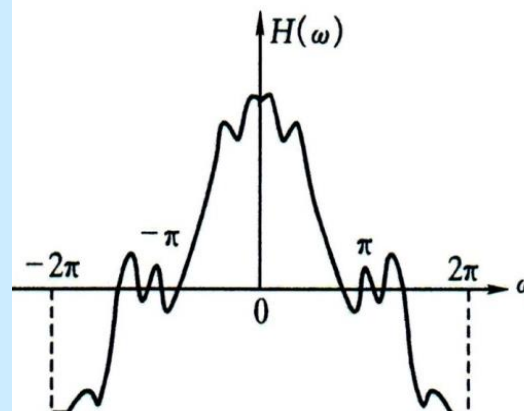


# 线性相位FIR滤波器的四种类型幅频特性图



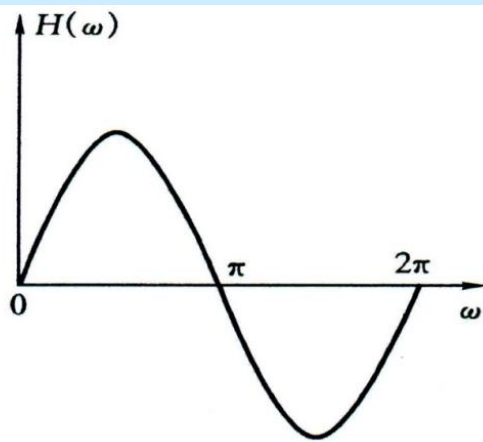
$H(\omega) = H(-\omega)$   
 $\omega = 0$ 处  
 频率偶对称,  
 $H(2\pi + \omega)$   
 $= H(\omega)$ , 周期 $2\pi$

**I型  $h(n)=h(N-n-1)$ ,  $N$  为奇数**



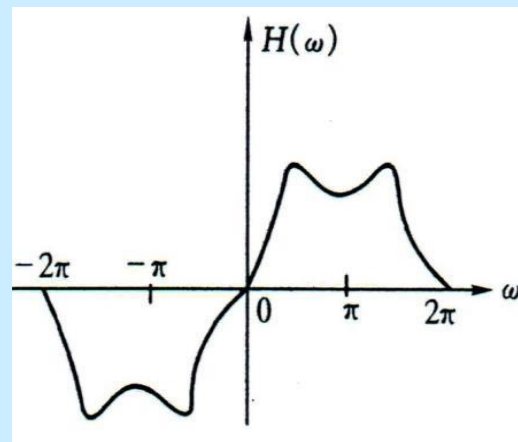
$H(\omega) = H(-\omega)$   
 $\omega = 0$ 处  
 频率偶对称,  
 $H(\pi + \omega) =$   
 $-H(\pi - \omega)$   
 $\omega = \pi$ 处  
 频率奇对称,  
 $H(4\pi + \omega)$   
 $= H(\omega)$ , 周期 $4\pi$

**II型  $h(n)=h(N-n-1)$ ,  $N$  为偶数**



$H(\omega) = -H(-\omega)$ ,  
 $\omega = 0$ 处  
 频率奇对称,  
 $H(\pi + \omega)$   
 $= -H(\pi - \omega)$   
 $\omega = \pi$ 处  
 频率奇对称,  
 $H(2\pi + \omega)$   
 $= H(\omega)$ , 周期 $2\pi$

**III型  $h(n)=-h(N-n-1)$ ,  $N$  为奇数**



$H(\omega) = -H(-\omega)$   
 $\omega = 0$ 处  
 频率奇对称,  
 $H(\pi + \omega)$   
 $= -H(\pi - \omega)$   
 $\omega = \pi$ 处  
 频率偶对称,  
 $H(4\pi + \omega)$   
 $= H(\omega)$ , 周期 $4\pi$

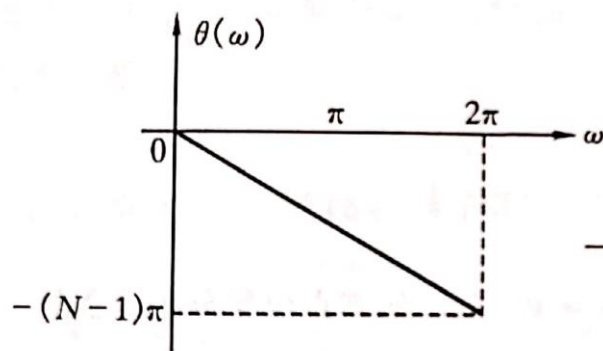
**IV型  $h(n)=-h(N-n-1)$ ,  $N$  为偶数**



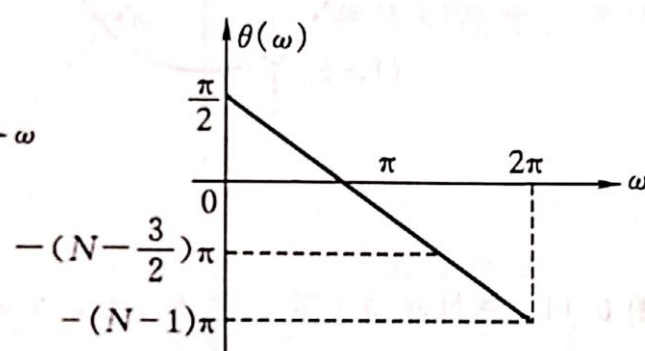
- 线性相位FIR滤波器的频率响应都可以表达为一个线性因子 $e^{j\theta(\omega)}$ 与一个 $\omega$ 的实函数 $H(\omega)$ 之积;

当 $h(n)$ 为偶对称时 
$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

当 $h(n)$ 为奇对称时 
$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$



(a)  $h(n)$ 为偶对称时的相频特性



(b)  $h(n)$ 为奇对称时的相频特性

## ■ 具有线性相位的FIR滤波器系统函数 $H(z)$ 的零点分布

FIR滤波器的系统函数 $H(z)$ 可展开为 $z^{-1}$ 的 $N - 1$ 阶多项式，即

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1) z^{-1} + \cdots + h(N-1) z^{-(N-1)} \\ &= \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n} = \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-1-m)} \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^m = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

- 收敛域包括单位圆；
- $z$ 平面上有 $N-1$ 个零点；
- $z=0$ 是 $N-1$ 阶极点；

$H(z)$ 在原点上的 $N - 1$ 阶极点对系统的稳定性无关紧要，在 $z$ 平面内 $N - 1$ 个零点分布互为倒数，**由于 $h(n)$ 的对称性，零点位置受到限制。**

系统函数 $H(z)$ 的零点也是 $H(z^{-1})$ 的零点，反之亦然，即线性相位FIR滤波器的零点必是互为倒数。

- 考虑  $z=re^{j\theta}$ ，考察零点的位置：
- 单位圆内非实轴上
  - 单位圆内的实轴上
  - 单位圆上非实轴上
  - 单位圆与实轴交点

□ 在单位圆内非实轴上有一个零点  $z_k = r_k e^{j\theta_k}$

$H(z^{-1})$ 的零点  $z_k^{-1} = (r_k e^{j\theta_k})^{-1} = \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$  也是 $H(z)$ 的零点;

$h(n)$ 为实序列,  $H(z)$ 复数零点成对出现,  $z_k^*$ 与 $(z_k^*)^{-1}$ 也是 $H(z)$ 零点;

四个零点同时存在, 构成四阶系统, 即

$$H_k(z) = (1 - z^{-1} r_k e^{j\theta_k})(1 - z^{-1} r_k e^{-j\theta_k})(1 - z^{-1} \frac{1}{r_k} e^{j\theta_k})(1 - z^{-1} \frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k})$$

□ 在单位圆内的实轴上有一个零点  $z_k = r_k$

$H(z^{-1})$ 的零点  $z_k^{-1} = (r_k)^{-1} = 1/r_k$  也是 $H(z)$ 的零点, 无共轭零点;

两个零点构成二阶系统

$$H_m(z) = (1 - z^{-1} r_k)(1 - z^{-1} \frac{1}{r_k})$$

□ 在单位圆上非实轴上有一个零点  $z_k = e^{j\theta_k}$

不存在关于单位圆镜像对称的零点；

$h(n)$ 为实序列， $H(z)$ 复零点成对出现，单位圆上 $z_k^*$ 也是 $H(z)$ 零点；

两个零点构成二阶系统

$$H_l(z) = (1 - z^{-1}e^{j\theta_k})(1 - z^{-1}e^{-j\theta_k})$$

□ 在单位圆与实轴交点上有一个零点  $z_k = 1$  or  $z_k = -1$

既无镜像零点，也无共轭零点，构成最简单的一阶系统

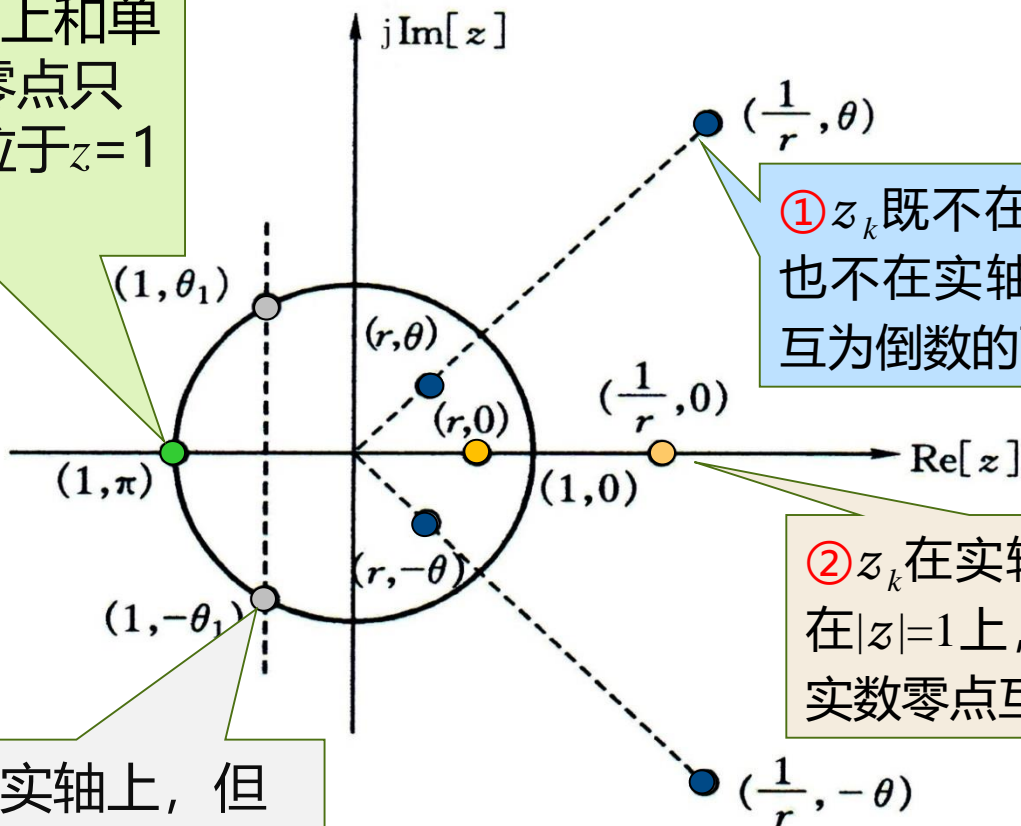
$$H_n(z) = (1 \pm z^{-1})$$

线性相位FIR滤波器的系统函数可以表达为上述各式情形的级联

$$H(z) = \left[ \prod_k H_k(z) \right] \left[ \prod_m H_m(z) \right] \left[ \prod_l H_l(z) \right] \left[ \prod_n H_n(z) \right]$$

# FIR滤波器的零点位置的四种情形

④  $z_k$  在实轴上和单位圆上，则零点只有一个，或位于  $z=1$  或位于  $z=-1$



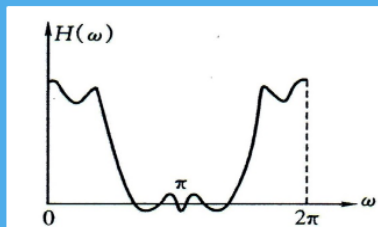
①  $z_k$  既不在单位圆上，也不在实轴上，有四个互为倒数的两组共轭对

②  $z_k$  在实轴上，不在  $|z|=1$  上，则两个实数零点互为倒数

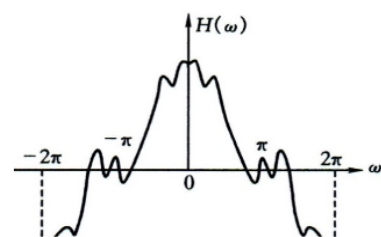
③  $z_k$  不在实轴上，但在  $|z|=1$  上，由于共轭对的倒数是它们本身，故此时零点是一组共轭对

$$H(z_k) = \pm z^{N-1} H(z^{-1}) = 0$$

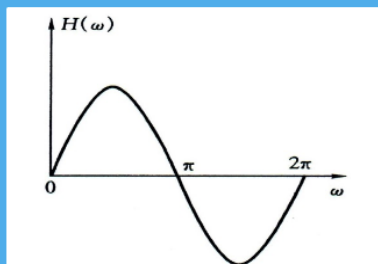
# 四种线性相位FIR滤波器的频率响应及其零点分布



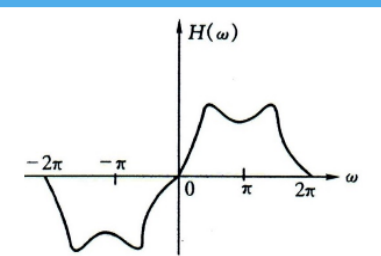
I型  $h(n)=h(N-n-1)$  ,  $N$  奇数



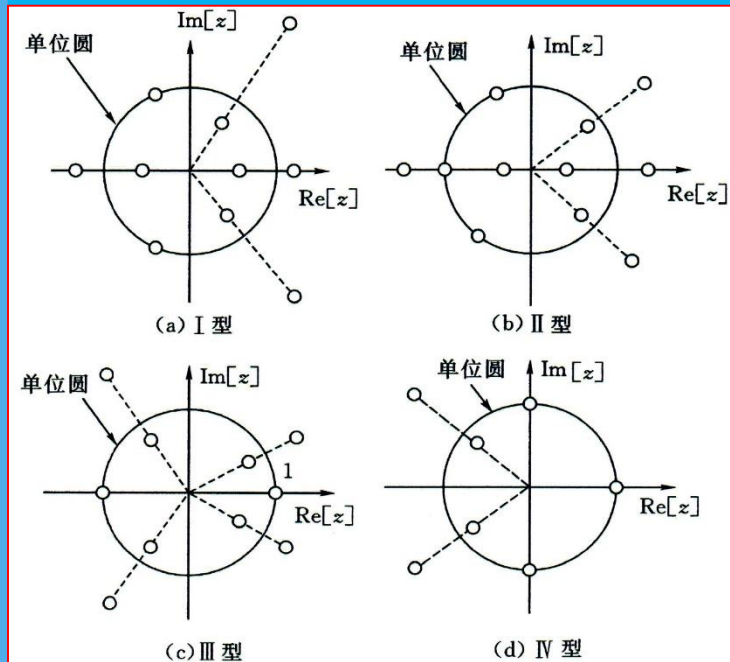
II型  $h(n)=h(N-n-1)$  ,  $N$  偶数



III型  $h(n)=-h(N-n-1)$  ,  $N$  奇数



IV型  $h(n)=-h(N-n-1)$  ,  $N$  偶数



- I型:  $h(n)$ 偶对称,  $N$ 为奇数; 零点无限制, 滤波器类型不限
- II型:  $h(n)$ 偶对称,  $N$ 为偶数; 因 $H(\pi)=0$ , 因此在 $z=-1$ 处必有一阶零点, 既在单位圆, 又在实轴, 所以, 必有单根; **不能设计高通、带阻**
- III型:  $h(n)$ 奇对称,  $N$ 为奇数; 因 $H(0)=0, H(\pi)=0$ , 在 $z=1, -1$ 处必有两个一阶零点, 都是 $H(z)$ 的单根; **只能设计带通**
- IV型:  $h(n)$ 奇对称,  $N$ 为偶数; 因 $H(0)=0$ , 在 $z=1$ 处必有一阶零点, 是 $H(z)$ 的单根; **不能设计低通、带阻**

**举例：** 已知数字滤波器 $N=5$ ,  $h(0) = h(1) = h(3) = h(4) = -1/2$ ,  $h(2) = 2$ , 求幅度函数 $H(\omega)$ , 并判断滤波器类型。

**解：** 由于 $N$ 为奇数, 且 $h(n)$ 偶对称, 该滤波器是I型线性相位FIR滤波器

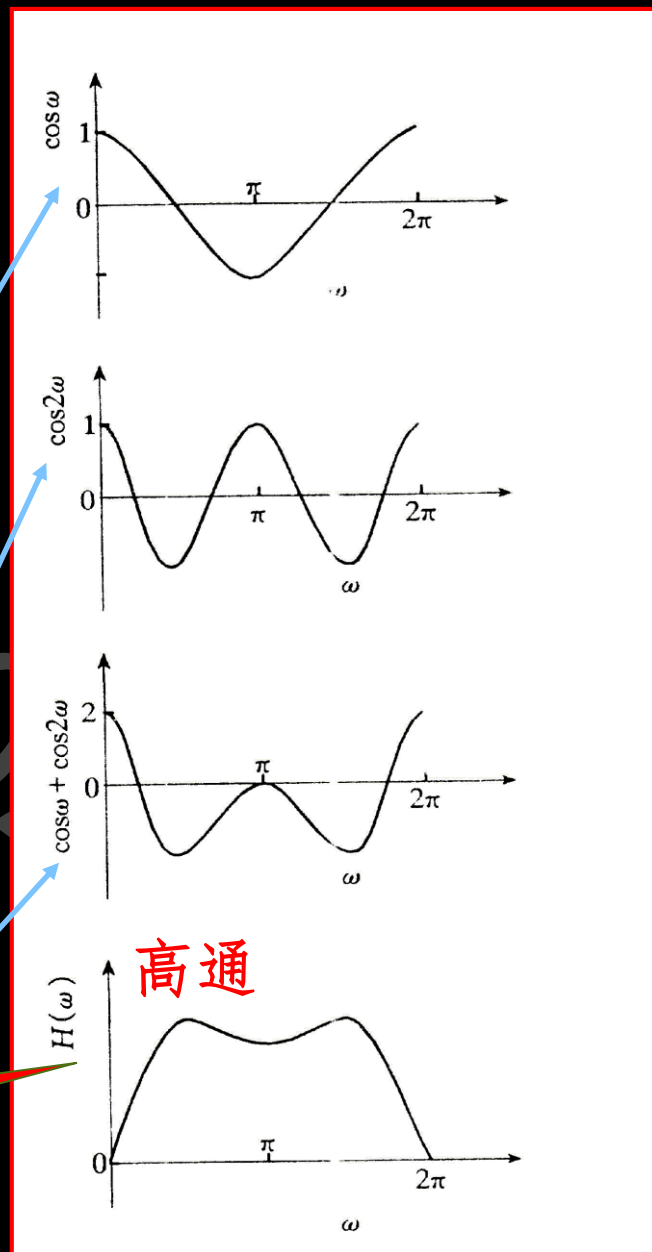
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\omega$$

$$a(0) = h(2) = 2$$

$$a(1) = 2h(1) = -1$$

$$a(2) = 2h(0) = -1$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 2 - \cos\omega - \cos2\omega \\ &= 2 - (\cos\omega + \cos2\omega) \end{aligned}$$



## 6.2.2 IIR滤波器的基本特性

### □ 因果、稳定的IIR滤波器

$$\begin{cases} h(n) = 0, & n < 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

### □ 考虑有理函数形式的系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}, \quad a_k, b_k \text{ 是实数}, \quad a_M \neq 0, b_N \neq 0$$

- $M \leq N$ 时, 称为 $N$ 阶滤波器, 稳定性要求 $N$ 个非零极点位于单位圆内
- $M > N$ 时, 滤波器为 $M-N$ 阶的FIR滤波器与 $N$ 阶IIR滤波器串联
- IIR滤波器的零点决定了滤波器的性能, 与滤波器稳定性无关
- 除了全部极点都在单位圆上外, 不存在稳定的线性相位IIR滤波器



## ■ IIR滤波器的相位特性

回顾FIR线性相位滤波器

$$H(z_k) = \pm z_k^{-(N-1)} H(z_k^{-1})$$

$H(z)$ 和 $H(z^{-1})$ 具有相同的零极点，因此具有线性相位且稳定的IIR滤波器是不可物理实现的。

□相位特性推导：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad H(e^{-j\omega}) = |H(e^{-j\omega})| e^{-j\theta(\omega)}$$



$$\theta(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \left[ \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] = \frac{1}{2j} \ln \left[ \frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} \right]$$

## □ 相延迟和群延迟

相延迟

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = -\frac{1}{2j\omega} \ln \left[ \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right]$$

群延迟

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{2j} \ln \left[ \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] \right\}$$

- IIR滤波器的群延迟不可能为常数，这是IIR滤波器与FIR滤波器的一个重要区别
- 尽管群延迟为常数难以实现，但可以在**特定频带（比如通带）**尽可能逼近常数，从而实现近似线性相位的IIR滤波器

## ■ 全通滤波器

对所有 $\omega$ , 幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 为一常数的滤波器称为全通滤波器; 全通滤波器不改变信号的振幅, 但可以用来逼近期望的相位特性。

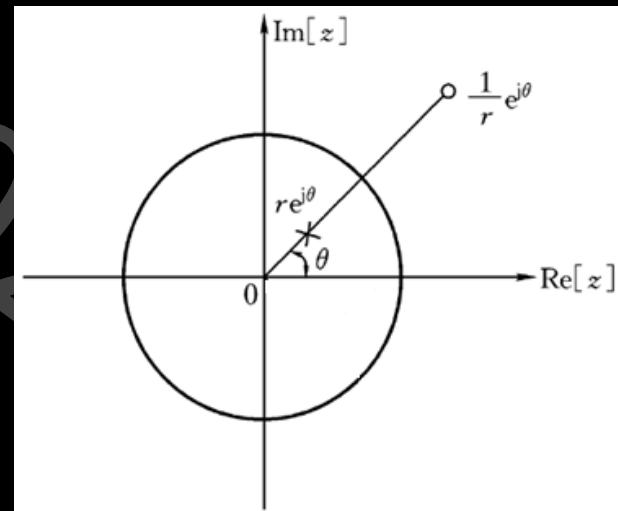
全通滤波器的零极点以单位圆成镜像分布, 若单位圆内有一个极点 $z=a$ , 则单位圆外必有一个零点 $z=1/a^*$ 。

### □ 一阶全通滤波器

$$H(z) = c \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad 0 < |a| < 1$$

极点:  $re^{j\theta}$       零点:  $1/re^{j\theta}$

为使 $h(n)$ 为实数,  $a$ 必须为实数。



## □ 二阶全通滤波器

$$H(z) = c \frac{(z - r^{-1}e^{j\theta})(z - r^{-1}e^{-j\theta})}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})}, \quad c, r, \theta \in \mathbb{R}, 0 < r < 1$$

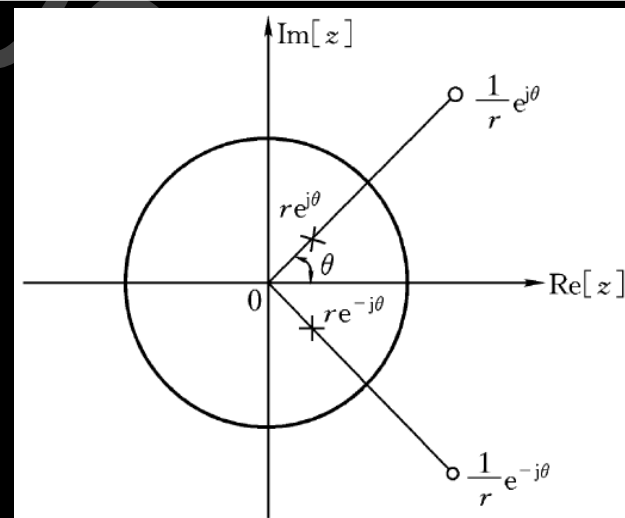
$$H(z) = c \frac{(z^2 - 2zr^{-1}\cos\theta + r^{-2})}{(z^2 - 2zr\cos\theta + r^2)} = c \frac{z^2(z^{-2} - 2z^{-1}r\cos\theta + r^2)}{r^2(z^2 - 2zr\cos\theta + r^2)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{c}{r^2} \right| = \text{constant}$$

若要 $h(n)$ 为实序列，两个零点（极点）必须为共轭对。

共轭极点： $re^{j\theta}$ 、 $re^{-j\theta}$

共轭倒数零点： $1/re^{j\theta}$ 、 $1/re^{-j\theta}$

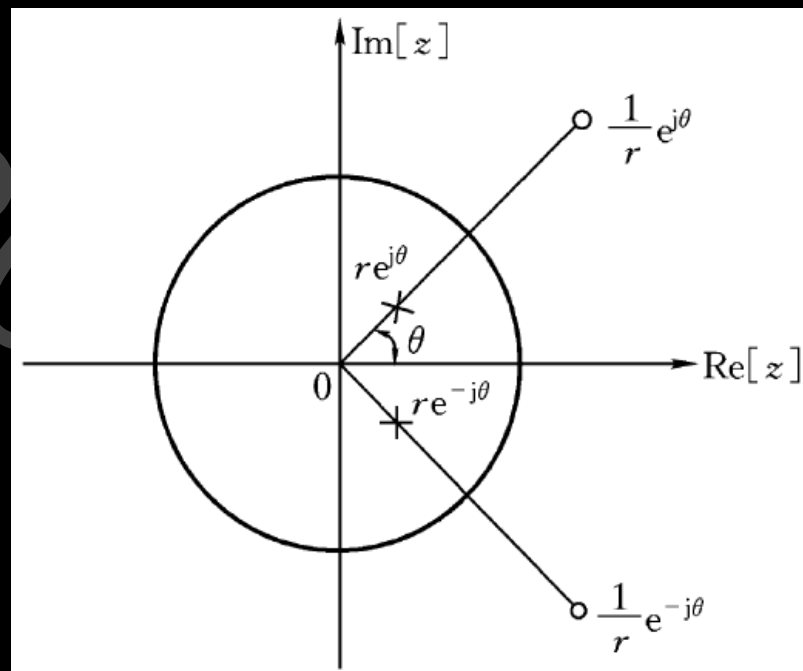


## □ 全通系统的应用

全通系统在数字系统中不改变信号的幅频特性，是一种纯相位滤波器，常见的应用包括：

(1) 作为相位均衡器，**校正系统的相位**，而不改变系统的幅度特性；

(2) 级联一个全通系统，可以**改变零极点分布**，使非稳定滤波器变成一个稳定滤波器。



## 6.2.3 FIR和IIR数字滤波器的比较

### ■ 性能方面

#### □ FIR滤波器

**优点：**可以得到严格的线性相位；

**缺点：**由于滤波器传输函数的极点固定在原点，所以只能用较高阶数的滤波器达到性能指标。

#### □ IIR滤波器

**优点：**较低阶数滤波器实现，存储单元少，所以经济且效率高；极点可位于单位圆内任何地方，幅频的可选择性好；

**缺点：**相位是非线性的；往往幅频可选择性（分辨率）越好，相位非线性越严重。

## ■ 结构方面

- **FIR滤波器**：一般采用**非递归型结构**，由于FIR的单位冲激响应 $h(n)$ 有限长，可采用FFT运算，其运算速度快，误差小；
- **IIR滤波器**：往往对应**递归型结构**，极点要控制在单位圆内，系统才确保稳定，缺点是有限字长效应时，容易产生**寄生振荡**。

## ■ 应用方面

- **FIR滤波器**：能适应某些特殊的应用，如构成微分器或积分器，因而适应性更大，范围更广。
- **IIR滤波器**：设计较简单，主要应用于设计具有**片断（部分频带）常数**特性的滤波器，如低通、高通、带通及带阻等滤波器。

**举例**：在语音通信中，对相位线性特性要求不高，可以选用经济高效的**IIR**滤波器实现；而在图像通信中，对相位的线性特性要求较高，则要用稍为复杂的**FIR**滤波器来实现。



## 本章小结:

- 数字滤波器基本概念与分类
- 线性相位FIR数字滤波器基本特性
- FIR滤波器幅频函数的四种类型
- FIR滤波器系统函数的零点位置
- IIR滤波器的基本特性
- FIR和IIR数字滤波器的比较