西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数与解析几何A卷 课时：56/64 考试时间：2019年1月8日

一、单项选择题（每题3分，共15分）

1. D;　2. C;　3 A;　4 B;　5 A;

二、填空题（每题3分，共15分）

1、$\dfrac{(-1)^n 4^n}{5^{n-1}}$；**2**、$2$；**3**、$k(-4,6,-1)^T+(3,-4,1)^T, k$任意；4、$x^2+y^2+z^2=1$；

5、$\dfrac{1}{\sqrt{2018}}, \sqrt{\dfrac{3}{2018}}(1-\dfrac{x}{1009})$；6、$\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$。

三、（10分）解：当$n=1$时，$D_n=a_1+x$；

当$n>1$时，$D_n=x^{n-1}(a_1+\cdots+a_n+x)$.

四、（13分）**解**：$\lambda=1$，方程组有无穷多解，先讨论$\lambda\neq 1$.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda&\lambda+3&1&-2\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&\lambda&1&\lambda\\\lambda-1&3&0&-(\lambda+2)\\0&1-\lambda&\lambda-1&\lambda(\lambda-1)\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&\lambda+1&0&0\\0&(2-\lambda)(2+\lambda)&0&-(\lambda+2)\\0&-1&1&\lambda\end{array}\right],$$

因此，当$\lambda\neq 1,\pm 2$时，方程组有惟一解；当$\lambda=2$时，方程组无解；当$\lambda=1$或$\lambda=-2$时，方程组有无穷多解.

当$\lambda=-2$时，令$x_1=1,x_2=1,x_3=-1$是非齐次方程组的特解，此时系数矩阵的秩为2，$[1,1,1]^{\mathrm{T}}$是其基础解系，故通解为$[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}+c[1,1,1]^{\mathrm{T}}, c$是任意数.

当$\lambda=1$时，其增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&4&1&-2\\1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0&1&0&-1\\1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0&1&0&-1\\1&0&1&2\end{array}\right],$$

通解$[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[2,-1,0]^{\mathrm{T}}+c[-1,0,1]^{\mathrm{T}}, c$是任意数.

五、（13分）

1）解：此直线的对称式方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$；

2）证：将此直线方程写成一般式$\begin{cases}2x=y\\3x=z\end{cases}$，由平面束方程知过直线$L$的平面方程具有形式$\lambda(2x-y)+\mu(3x-z)=0$，于是其法向量为$(2\lambda+3\mu,-\lambda,-\mu)$，

又平面$x+2y+3z=4$的法向量为$(1,2,3)$，而$(2\lambda+3\mu,-\lambda,-\mu)\bullet(1,2,3)=0$，故结论成立。

3）解：曲面方程为$x^2+y^2=\dfrac{5}{9}z^2$。

六、（13 分）解：**1)** 二次型对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix},$$

其所有的顺序主子式分别为 $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = 1 - t^2$，由顺序主子式大于零得 $t \in (-1,1)$，于是有当 $t \in (-1,1)$ 时，该二次型是正定的。

2) 当 $t = 1$ 时，二次型对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求得其特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$，

它们对应的特征向量分别为

$\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1)^T, \alpha_2 = (1,0,0)^T, \alpha_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)^T$，

令 $Q = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$，则经正交变换 $(x_1, x_2, x_3)^T = Q(y_1, y_2, y_3)^T$，

可得标准形为 $y_2^2 + 2y_3^2$。

3) 此时 $f = 1$ 表示椭圆柱面。

七、（9 分）证：由题意有 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$，

下用反证法证之。假设向量 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则存在 λ 使得 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$，于是可得:

$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$，即

$(\lambda - \lambda_1)\alpha_1 + (\lambda - \lambda_2)\alpha_2 = \theta$, **……6 分**

由属于不同特征值的特征向量线性无关可得 $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$，这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾。

八、(6 分) 证：由分块矩阵的初等变换得:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-B & \dfrac{A+B}{2} \\ O & A+B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-B & O \\ O & A+B \end{pmatrix}$$

因此有 $r(\boldsymbol{M}) = r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

九、证：因为 $\det(A) = 0$，即有 $r(A) < n$，所以 $r(A^*) = 0$ 或 $r(A^*) = 1$；

当 $r(A^*) = 0$ 时，$A^* = O$，故 A^* 无非零特征值；

当 $r(A^*) = 1$ 时，存在非零 n 维列向量 α, β 使得 $A^* = \alpha\beta^T$，此时有 $\det(\lambda I_n - A^*) = \lambda^{n-1}(\lambda - \beta^T\alpha)$，可知 A^* 有 $n-1$ 个特征值为零，另一个特征值为 $\beta^T\alpha$，若 $\beta^T\alpha = 0$，则 A^* 无非零特征值，若 $\beta^T\alpha \neq 0$，则有 $\beta^T\alpha + (n-1)\times 0 = tr(A^*) = A_{11} + \cdots + A_{nn}$。结论得证。