西安交通大学考试题

成绩	

课　程　线性代数与解析几何　（A 卷）

学　院 ________　考试日期 2020 年 1 月 8 日

专业班号 ________ 考场座位号 ________

姓　名 ________　学号 ________　期中 □ 期末 □

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
满分	30	8	8	8	8	8	10	10	10
得分									
评阅人									

一填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 设$\alpha=(-1,2)$, $\beta=(3,1)$, 则$\alpha\beta^{\mathrm{T}}=$____,$\alpha^{\mathrm{T}}\beta=$________,$(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)^{99}=$__________.

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{pmatrix}$,则行列式$|AB^{-1}|=$________

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,如果$\alpha_1+\alpha_2, k\alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$线性相关，则$k=$________

4. 设矩阵A以及$A+I$均可逆，其中I为单位矩阵，记$G=I-(A+I)^{-1}$，则$G^{-1}=$________

5. 过四点$A(-1,0,1), B(-2,1,4), C(1,3,-3), D(0,1,-1)$空间四面体$ABCD$的体积为=________.

6. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,其中列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$. 则齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系为__________.

7. 设3阶方阵A满足$I-A, 2I-A, 3I+A$都不可逆，则A与对角阵________相似.

8.由向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$生成的$\mathbf{R}^3$的子空间的标准正交基为 ________.

9. 直线$L: x-1=y=z$绕Z轴旋转所形成的旋转曲面的方程为________.

10. 设n阶实对称幂等矩阵A(满足$A^2=A$)的秩为r, 则 $\det(I+A+A^2+\cdots+A^n)=$________.

二(8分)计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

三(8分)求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$的极大线性无关组，并将其余的向量用所求得的极大无关组线性表示.

四(8分)设$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$,求矩阵方程 $XA=2X+B$的解.

五(8分)已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为:

π_1: $x+y+2z=1$, $\pi_2: x+\lambda y+z=2$, $\pi_3: \lambda x+y+z=1+\lambda$.

1.当λ取何值时,这三个平面交于一点?交于一条直线?没有公共交点?

2.当它们交于一直线时,求直线的方程.

六、(8分)设T为$F[x]_2$上的线性算子,T在基$\{x^2, x, 1\}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

(1)求T在基$\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$下的矩阵;

(2)求$T(3x^2-2x+1)$.

七(10分)已知矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$有一个二重特征值.

1.求a,并讨论A是否相似于对角阵.

2.如果A相似于对角阵,求可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=\Lambda$是对角阵.

八(10分)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+kx_3^2$, $g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$.

1.求可逆线性变换$x=Py$将f化成标准型.

2.问:k满足什么条件时，存在可逆线性变换将f化成g.

九、(10分)证明题

1. 设A为n阶矩阵, 证明存在幂等矩阵F(即$F^2=F$)及可逆矩阵U,使得$A=FU$.

2.设A既是正交矩阵又是正定矩阵，证明$A=I$.