西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数与解析几何（A）课时：64 考试时间：2020 年 1 月 8 日

一填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $-1,\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 6 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$；　**2.** $-\dfrac{1}{70}$；　**3.** $k=-1$；

4. $(A^{-1}+I)$ 或 $(A+I)A^{-1}$ 或 $A^{-1}(A+I)$；　**5.** $\dfrac{1}{6}$；　**6.** $(2,-1,-1,1)^T$；

7. $\mathrm{diag}(1,2,-3)$；　**8.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$；　**9.** $x^2+y^2-2z^2-2z-1=0$;　**10.** $(n+1)^r$

二、$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1+x & 1\\ 0 & 0 & -x & x\\ -x & 0 & -x & 0\\ 0 & -x & -x & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2+x & 1\\ 0 & 0 & 0 & x\\ -x & 0 & -x & 0\\ 0 & -x & -x & 0\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 1 & 2+x\\ -x & 0 & -x\\ 0 & -x & -x\end{vmatrix}=x^4$　8 分

三、$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5]\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　2 分

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$, 4 分　$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, 6 分 $\alpha_5=5\alpha_1-8\alpha_2-2\alpha_4$　8 分

四、$X(A-2I)=B$，　3 分　$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　5 分

故 $X=B(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$　8 分

五、联立三平面方程，得方程组 $\begin{cases}x+y+2z=1\\ x+\lambda y+z=2\\ \lambda x+y+z=1+\lambda\end{cases}$　(1)

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 2\\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\end{pmatrix}$$　3 分

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=3$, 方程组有唯一解，从而三平面交于一点. 4 分

当 $\lambda=0$ 时，$r(A)\neq r(\bar{A})$, 方程组无解，从而三平面无交点.　5 分

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=2$, 三平面交于一条直线.　6 分

此时 $\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 方程组(1)的通解为

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$，此为交线的参数方程。或

$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ （对称式方程），或 $\begin{cases}x+y+2z=1\\x+y+z=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=3\\z=-1\end{cases}$ 8分

六、解(1)由基$\{x^2,x,1\}$到基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$ 2分

所以T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵为

$$D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{pmatrix}.$$ 4分

解(2) 由$3x^2-2x+1$在基$\{x^2,x,1\}$下的坐标为$x=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, 5分

知$T(3x^2-2x+1)$在基$\{x^2,x,1\}$下的坐标为

$$y=Ax=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix}$$ 7分

故$T(3x^2-2x+1)=2x^2+9$. 8分

七、$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\a&\lambda-2&-a-3\\a+3&0&\lambda-a-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-a-2)$. 2分

若λ=2是二重根，则$2+a=2$，从而$a=0$. 此时$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&3\\-3&0&2\end{pmatrix}$.

由$2I-A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&-3\\3&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

知λ=2的几何重数是1, 不等于代数重数, 故A不可对角化. 5分

若$\lambda=-1$是二重根，则$-2-a=1$，从而$a=-3$. 此时$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

由$-I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

知$\lambda=-1$的几何重数也是2, 故A可对角化. 8分

解$(-I-A)x=0$,得$\lambda=-1$的两个线性无关的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

解$(2I-A)x=0$,得$\lambda=2$的特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 10 分

八、利用配方法，得$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2-(x_2-2x_3)^2+(4+k)x_3^2$ 3 分

令$y_1=x_1-2x_2, y_2=x_2-2x_3, y_3=x_3$,得标准型$f=y_1{}^2-y_2{}^2+(4+k)y_3^2$.

所用的可逆线性变换为$x=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}y$. 5 分

对二次型$g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$, 令$z_1=y_1-y_2, z_2=y_3, z_3=y_1+y_2$得标准型$g=y_1^2-y_2^2$

所用可逆线性变换为$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$. 8 分

由于二次型$g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$的正负惯性指数均为1,故当$k=-4$ 时,

二次型f与g有相同的规范型, 从而存在可逆线性变换将f 化为g. 10 分

九(1) 设$r(A)=r$,则存在可逆矩阵P,Q,使$PAQ=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$

即$A=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}PP^{-1}Q^{-1}$, 3 分

令$F=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}P, U=P^{-1}Q^{-1}$, 则$A=FU$,

其中$F^2=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}P=F, U$可逆. 5 分

(2) 由A为正交矩阵, 得$A^TA=I$;由A为正定矩阵, 得$A^T=A$; 故$A^2=I$. 2 分

即 $(A-I)(A+I)=O$

由A正定知A的特征值均大于零, 于是$A+I$的特征值均大于1 .

所以$A+I$ 可逆. 4 分

等式$(A-I)(A+I)=O$两端右乘$(A+I)^{-1}$得$A-I=O$,即$A=I$. 5 分

（2）的另一证法：

因$\boldsymbol{A}$正定，所以$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，其全部特征值为正的实数．　1 分

设λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\xi \in \mathbf{R}^n$是对应的特征向量，则$\xi \neq \mathbf{0}$，$\boldsymbol{A}\xi = \lambda\xi$.

从而$\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \lambda\xi^{\mathrm{T}}$，于是$\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\xi = \lambda^2\xi^{\mathrm{T}}\xi$.

又$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，故$(\lambda^2 - 1)\xi^{\mathrm{T}}\xi = 0$.

而$\xi^{\mathrm{T}}\xi > 0$，所以$\lambda^2 - 1 = 0$，必有$\lambda = 1$.
即$\boldsymbol{A}$的所有特征值均为1.　3 分

又存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \Lambda = \boldsymbol{I}$，
所以$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$.　5 分