西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数与解析几何（A卷） 课时：56/64 考试时间：2017 年 1 月 9 日

一、单选题 （每小题 **3** 分，共 **15** 分）

1. C；**2. C**；**3. D**；**4. B**； **5. D**.

二、填空题 （每小题 **3** 分，共 **15** 分）

1. 1； **2.** $\frac{1}{3}(2I-A)$； **3.** -3； **4.** 椭圆 ； **5.** $2\sqrt{7}$.

三、解: **(1)**设 l 的方向向量 $s=(m,n,p)$，则由 $l // \pi_1$ 可得 $s \perp n_1=(3,-4,-1)$，

故 $3m-4n-p=0$.

记 $s_1=(2,1,-1)$，由 $A(-3,0,1)\in l, B(0,1,-1)\in l_1$ 且 l 与 l_1 相交，可得 $s,s_1,\overline{AB}$ 共面，故

$$[s,s_1,\overline{AB}]=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0，即 -m+n-p=0.$$

(2) 解方程组 $\begin{cases} 3m-4n-p=0 \\ -m+n-p=0 \end{cases}$ 可得，$m=-5p, n=-4p$，令 $p=1$，则 $s=(-5,-4,1)$.

(3) 直线 l：$\frac{x+3}{-5}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{1}$.

四、证: 令 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=0$，即

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+3k_2-2k_3)\alpha_2+(2k_2+k_3)\alpha_3=0,$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+3k_2-2k_3=0 \\ 2k_2+k_3=0 \end{cases}$，

因 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0$， **(3 分)** 故齐次方程组只有零解，即 $k_1=k_2=k_3=0$，

故 $\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关.

五、解: (1) 对方程组的增广矩阵做行初等变换

$$\overline{A}=(A,b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{pmatrix},$$

因 $Ax=b$ 存在两个不同的解, 所以 $r(A)=r(\overline{A})<3$. 故 $\lambda=-1,a=-2$.

(2)当 $\lambda=-1,a=-2$ 时, $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

故可得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}+x_3\\ x_2=-\dfrac{1}{2}+0x_3\end{cases}$.

令 $x_3=0$, 可得 $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{1}{2}$, 故 $\eta=\frac{1}{2}(3,-1,0)^T$ 为该方程组的一个特解;

令 $x_3=1$, 可得 $x_1=1,x_2=0$, 故 $\xi=(1,0,1)^T$ 为对应齐次方程组的一个基础解系.

故该方程组的通解为 $x=\eta+k\xi=\frac{1}{2}(3,-1,0)^T+k(1,0,1)^T,\forall k$.

六、解: 因 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$, 即 $A\alpha_1=1\alpha_1,A\alpha_2=2\alpha_2,A\alpha_3=3\alpha_3$, 故

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 阶方阵 A 的三个不同特征值对应的特征向量, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

从而矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆,

所以

$$A=P\mathrm{diag}(1,2,3)P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}.$$

七、**解:** (1)二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$, 因二次型正定, 故

$D_1=2>0, D_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=6>0, D_3=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{vmatrix}=2(9-a^2)>0$, 故 $-3<a<3$. 又 $a>0$,

故 $0<a<3$.

(2)记 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$, 则 $|A|=2(9-a^2)=1\times2\times5=10$, 故 $a=\pm2$, 又 $a>0$, 故 $a=2$,

此时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

$I-A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\zeta_1=(0,1,-1)^T$ 为 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量.

$2I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\zeta_2=(1,0,0)^T$ 为 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量.

$5I-A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\zeta_3=(0,1,1)^T$ 为 $\lambda_3=5$ 对应的特征向量.

将 ζ_1,ξ_2,ξ_3 单位化, 可得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T,\eta_2=(1,0,0)^T,\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$,

故所用的正交变换矩阵为

$$C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

八、题一解:（1） $[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

因为$\det\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=-2\neq 0$，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价，

故β_1,β_2,β_3也是V的基.

（2）基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，

所以T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵

$$B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}-6 & 5 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 24 & 48\\ -12 & -10 & -24\\ -12 & -12 & -21\end{pmatrix}.$$

题二解 ：$[x^2+x,\, x^2-x,\, x+\mathbf{1}]=[1,x,x^2]\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

所以，由基（I）到基（II）的过渡矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

由f在基（I）下的坐标$x=(2,4,4)^{\mathrm{T}}$，得f在基（II）下的坐标为

$$y=A^{-1}x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 4\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

或：令$f=4x^2+4x+2=a(x^2+x)+b(x^2-x)+c(x+1)$，比较两端同次幂的系数，得

$\begin{cases}a+b=4\\ a-b+c=4\\ c=2\end{cases}$，解得$a=3,b=1,c=2$. 故$f$在基（II）下的坐标为$y=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

九、证**:** (必要性):

设$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为$A$的$n$个不同的特征值, 则存在可逆矩阵$P$, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda_1.$$

(1) 由$AB=BA$可得, $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$, 记$C=P^{-1}BP$, 则有

$\Lambda_1 C=C\Lambda_1$,

即

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

亦即

$$\begin{pmatrix}\lambda_1c_{11} & \lambda_1c_{12} & \cdots & \lambda_1c_{1n}\\ \lambda_2c_{21} & \lambda_2c_{22} & \cdots & \lambda_2c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_nc_{n1} & \lambda_nc_{n2} & \cdots & \lambda_nc_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1c_{11} & \lambda_2c_{12} & \cdots & \lambda_nc_{1n}\\ \lambda_1c_{21} & \lambda_2c_{22} & \cdots & \lambda_nc_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1c_{n1} & \lambda_2c_{n2} & \cdots & \lambda_nc_{nn}\end{pmatrix}.$$

比较两边对应位置元素可得, $\lambda_ic_{ij}=\lambda_jc_{ij}\Leftrightarrow(\lambda_i-\lambda_j)c_{ij}=0$.

由$\lambda_i\neq\lambda_j(j\neq i)$可得, $c_{ij}=0(j\neq i)$, 故

$$P^{-1}BP=C=\begin{pmatrix}c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn}\end{pmatrix}.$$

(2) 记 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, 若 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也是 B 的特征向量，则有 $Bp_i=\mu_i p_i(i=1,2,\cdots,n)$,

即

$$BP=B(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}=P\Lambda_2,$$

从而

$$P^{-1}ABP=(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)=P^{-1}BAP,$$

由此可得

$$AB=BA.$$