第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

第一节：矩阵的初等变换

本节课教学内容

1 初等变换与初等矩阵的概念与关系

2 阶梯形矩阵

3 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

求解线性方程组：消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- 一般消元法的基本思想 ----- 同解变形

1) 交换某两个方程的位置

若 $\overline{A} \xrightarrow{r_i \boxed{\leftrightarrow} r_j} B$, 则 $B \xrightarrow{r_i \boxed{\leftrightarrow} r_j} \overline{A}$

2）用非零数k乘第i个方程

若 $\overline{A} \xrightarrow{kr_i} B$, 则 $B \xrightarrow{r_i/k} \overline{A}$

3）把第i个方程的k倍加至第j个方程

若 $\overline{A} \xrightarrow{r_i+kr_j} B$, 则 $B \xrightarrow{r_i-kr_j} \overline{A}$

例1 求解3元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=9 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=11 \\ 3x_1+6x_2-6x_3=0 \\ x_1+3x_2-5x_3=-8 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right]$$

解

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=9 \\ -7x_3=-7 \\ 3x_2-12x_3=-27 \\ 2x_2-7x_3=-17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & -12 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=9 \\ x_3=1 \\ x_2-4x_3=-9 \\ 2x_2-7x_3=-17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{7}r_2 \\ \frac{1}{3}r_3}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_4 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_4 - r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad\quad = 7 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = -5 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r1-2r3]{r_2+4r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{消元法}} \begin{cases} x_1 \quad\quad\quad = 12 \\ \quad x_2 \quad\quad = -5 \\ \quad\quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

唯一解

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -6 & 0 \\ \underbrace{1 \quad\ 3 \quad -5}_{\text{系数矩阵}A} & & & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

消元法的一般步骤 $\Longleftrightarrow$ 用初等行变换将$\overline{A}$化为行最简形

例2 求解 $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 3 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \qquad = -3 \end{cases}$

解

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad - x_4 = -2 \\ \quad x_2 \qquad - x_4 = -4 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases}$$

通解

约束未知量

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_4 \\ x_2 = -4 + x_4 \\ x_3 = -5 + 2x_4 \end{cases}$$

自由未知量

$(x_4$ 任意),

或

通解的参数式形式

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c \\ x_2 = -4 + c \\ x_3 = -5 + 2c \\ x_4 = c \end{cases}$$

其中c为任意常数

或

通解的向量形式

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1 初等变换与初等矩阵

定义1 (初等行变换) 对矩阵施行的下列3种变换称为初等行变换:

(1) 交换第i行与第j行的位置(记为$r_i \leftrightarrow r_j$)

(2) 用非零数k乘矩阵的第i行(记为kr_i)

(3) 把矩阵的第 i 行的k倍加到第 j 行上去(记为r_j+kr_i)

例如

$$A=\begin{pmatrix}5&0&1\\2&1&4\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\\5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1}\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\2&1&4\\5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\0&-3&-2\\5&0&1\end{pmatrix}=B$$

1 初等变换与初等矩阵

定义2 (初等列变换) 对矩阵施行的下列3种变换称为初等列变换:

(1) 交换第i列与第j列的位置(记为$c_i \boxed{\leftrightarrow} c_j$)

(2) 用非零数k乘矩阵的第i列(记为kc_i)

(3) 把矩阵的第i列的k倍加到第j列上去(记为c_j+kc_i)

例如

$$A=\begin{pmatrix}5&0&1\\2&1&4\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1-2c_3}\begin{pmatrix}3&0&1\\-6&1&4\\-5&2&3\end{pmatrix}=B$$

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

1 初等变换与初等矩阵

定义3 (矩阵等价)如果矩阵A经过有限次初等行(列)变换变成矩阵B，则称矩阵A与B行(列)等价.

矩阵行等价和矩阵列等价统称为矩阵等价，记作 $A \cong B$.

矩阵等价关系具有下列性质：

(1) 自反性： $A \cong A$

(2) 对称性： $if \quad A \cong B \Rightarrow B \cong A$

(3) 传递性： $if \quad A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

1 初等变换与初等矩阵

定义4 (初等矩阵) 对单位矩阵只作1次初等变换所得到的矩阵，称为初等矩阵.

3种初等变换对应3种初等矩阵.

(1) 互换单位矩阵I的第i行(列)与第j行(列)得初等矩阵:

$$P(i,j)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}&&\uparrow&&\uparrow&&\\&&第i列&&第j列&&\end{array} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Big\downarrow r_1\leftrightarrow r_3$$

例如 $P(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$\det(P(i,j)) = -1$

$P(i,j)$可逆, 逆矩阵为$P(i,j)$

1 初等变换与初等矩阵

(2) 用非零数k乘单位矩阵I的第i行(或第i列)得初等矩阵:

$$P(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \uparrow\text{第}i\text{列} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\downarrow -2r_3$$

例如 $P(3(-2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\det(\ P(i(k))\ ) = k \neq 0$

$P(i(k))$可逆, 逆矩阵为$P(i(1/k))$

1 初等变换与初等矩阵

(3) 把单位矩阵I的第i行的k倍加到第j行上去（或把I的第j列的k倍加到第i列上去）得初等矩阵：

$$P(i(k),j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列} \end{array}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\downarrow r_2 - 2r_3$$

例如 $P(3(-2),2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\ P(i(k),j)\ ) = 1$

$P(i(k),j)$可逆, 逆矩阵为$P(i(-k),j)$

总结：三种初等矩阵各自对应一种初等变换，其逆矩阵也为初等矩阵(并且是同类型的)，初等矩阵对应的初等变换与它的逆矩阵对应的初等变换互为**逆变换**。

1 初等变换与初等矩阵

初等变换与初等矩阵有什么关系呢？

例1 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，求$\underline{P(1,2)A}$，$\underline{AP(2(k))}$，$\underline{P(3(k),2)A}$.

解

$$P(1,2)A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AP(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1 初等变换与初等矩阵

初等变换与初等矩阵有什么关系?

例1 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,求$P(1,2)A, AP(2(k)), P(3(k),2)A$.

$$P(3(k),2)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1 初等变换与初等矩阵

性质1 (初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换，相当于对A左乘一个相应的初等矩阵；对矩阵A施行一次初等列变换，相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

用矩阵乘法表示初等行变换	用矩阵乘法表示初等列变换
$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$,则$B = P(i,j)A$	$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B$,则$B = AP(i,j)$
$A \xrightarrow{kr_i} B$,则$B = P(i(k))A$	$A \xrightarrow{kc_i} B$,则$B = AP(i(k))$
$A \xrightarrow{r_j + kr_i} B$,则$B = P(i(k),j)A$	$A \xrightarrow{c_i + kc_j} B$,则$B = AP(i(k),j)$

1 初等变换与初等矩阵

定理1 (初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换，相当于对A左乘一个相应的初等矩阵；对矩阵A施行一次初等列变换，相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

A与B行等价 $\Leftrightarrow$ 存在初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$使$P_s\ldots P_2P_1A=B$

若令$P=P_s\ldots P_2P_1$，则有

$$PA=B,$$

其中P为可逆矩阵. 为什么？

1 初等变换与初等矩阵

定理1 **(初等变换与初等矩阵的关系)**

对矩阵A施行一次初等行变换，相当于对A左乘一个相应的初等矩阵；对矩阵A施行一次初等列变换，相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

A与B列等价 $\Leftrightarrow$ 存在初等矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_t$使$AQ_1Q_2\ldots Q_t=B$

若令$Q=Q_1Q_2\ldots Q_t$，则有

$$AQ=B,$$

其中Q为可逆矩阵.

1 初等变换与初等矩阵

A与B**等价** ⟺ 存在初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_s, Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$使
$P_s \ldots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \ldots Q_t = B$

若令$P=P_s \ldots P_2 P_1$, $Q=Q_1 Q_2 \ldots Q_t$，则有

$$PAQ=B,$$

其中P, Q为可逆矩阵.

当矩阵A与B等价时，必存在可逆矩阵P, Q使$PAQ=B$，其中P, Q可以表示成若干初等矩阵之积.

本节课教学内容

1 初等变换与初等矩阵的概念与关系

2 阶梯形矩阵

3 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

2 阶梯形矩阵

定义5 (阶梯形矩阵) 称满足下列两个条件的矩阵为阶梯形矩阵：
1) 若有零行(元素全为零的行)，则零行都位于底部；
2) 各非零行的首非零元素都位于前一行首非零元的右边.

例2 判断下列矩阵是否为阶梯型矩阵.

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

√ √ ×

2 阶梯形矩阵

定义6 (简化行阶梯形矩阵) 称满足下列条件的矩阵为简化行阶梯形矩阵(行最简形).

1)阶梯形矩阵;

2)各非零行的首非零元均为1;

3)首非零元所在列其它元素均为0.

下面三个矩阵都是简化行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 阶梯形矩阵

定理2 对于任一非零矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$都可通过有限次初等行变换把它化成阶梯形矩阵，进一步可化为简化行阶梯型矩阵(行最简形).

例3 用初等行变换将矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

化成简化行阶梯形矩阵。

2 阶梯形矩阵

解

$$A=\begin{pmatrix}0&4&-12&2\\3&-1&-6&-2\\-1&-1&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\3&-1&-6&-2\\0&4&-12&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\0&-4&12&4\\0&4&-12&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\0&-4&12&4\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}r_3]{-r_1,\ -\frac{1}{4}r_2,}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3,}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

简化行阶梯形矩阵
(行最简形)

2 阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

简化行阶梯形矩阵(行最简形)

继续进行初等列变换：

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4+3c_2]{c_4+3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

非零矩阵经初等变换可化为左上角是单位阵、其余元素都是0的矩阵，称为A在等价意义下的标准形。

2 阶梯形矩阵

回顾:定义6 称满足下列条件的矩阵为**简化行阶梯形矩阵(行最简形)**.

1)阶梯形矩阵；

2)各非零行的首非零元均为1；

3)首非零元所在列其它元素均为0.

例4 设B是可逆矩阵A经有限次初等行变换所化成的简化行阶梯形矩阵，证明$B=I$.

证明思路: $B=PA$, $\det(P)\neq 0$, $\det(A)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\det(B)\neq 0$ $\Rightarrow$ B无零行

$$B\left\{\begin{array}{l}\text{阶梯形\&方阵\&无零行} \Rightarrow \text{首非零元素全部位于对角线上}\\ \text{首非零元均为1}\\ \text{首非零元所在列其它元素均为0}\end{array}\right\} \Rightarrow B\text{为单位阵}$$

2 阶梯形矩阵

定理3 设A为n阶方阵，则下列条件相互等价：

(1) A是可逆矩阵；

(2) A可经有限次初等行变换化成同阶单位矩阵I (即A行等价于同阶单位阵)；

(3) A可表示成若干个初等矩阵之积.

证 采用循环证法

(1)→(2): 前面例4已经证明了，一个可逆矩阵经过有限次初等行变换化成的行最简形就是单位阵

利用定理3可得到一种较为简单的求逆矩阵的方法.

(2)→(3): 存在初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_m$使$P_m\ldots P_2P_1A=I$

故 $A=(P_m\ldots P_2P_1)^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\ldots P_m^{-1}$

(3)→(1): 设 $A=Q_1Q_2\ldots Q_m$，其中Q_i, $i=1\ldots m$为初等矩阵.

有 $\det(Q_i)\neq 0$, $i=1\ldots m$. 故 $\det(A)\neq 0$, A可逆, 证毕.

本节课教学内容

1 初等变换与初等矩阵的概念与关系

2 阶梯形矩阵

3 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

3 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

回顾： **定理3** 设A为n阶方阵，则下列条件相互等价:

(1) A是可逆矩阵;

(2) A可经有限次初等行变换化成同阶单位矩阵I;

(3) A可表示成若干个初等矩阵之积.

当A可逆时, 存在初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_m$使

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$$

$$\Longleftrightarrow P_m \cdots P_2 P_1 A A^{-1} = I A^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow P_m \cdots P_2 P_1 I = A^{-1}$$

求逆矩阵的初等变换法:

$$[A \,\vdots\, I] \xrightarrow{\text{若干次初等行变换}} [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

3 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

例5 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$[A\,\vdots\,I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

3 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[-r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

所以 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

第三章　矩阵

第二节：矩阵的秩

- 矩阵的行数和列数描述了矩阵的结构信息，但当矩阵的某一行（列）全为0时，有没有更本质的结构参数呢？，比如所化成的阶梯形矩阵的非零行数？
- 化矩阵成阶梯形的方法不是唯一的，得到的阶梯形矩阵也不是唯一的。

那么这些不同的阶梯形矩阵有什么共同的特性呢？

第二节：矩阵的秩

1. 矩阵的k阶子式

2. 矩阵的秩

3. 计算矩阵秩的一般方法

定义（矩阵的k阶子式）

在$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵$\boldsymbol{A}$中，任取$\boldsymbol{k}$行与$\boldsymbol{k}$列$(\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{m},\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{n})$，位于这些行列交叉处的$\boldsymbol{k}^2$个元素，不改变它们在$\boldsymbol{A}$中所处的位置次序而得的$\boldsymbol{k}$阶行列式，称为矩阵$\boldsymbol{A}$的一个 **k阶子式.**

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix}3&1\\0&5\end{vmatrix}\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&5\end{vmatrix}\quad |A|$$

2阶子式　　3阶子式　　4阶子式

注意区分以下概念：k阶子式，子矩阵，余子式，代数余子式

引理:设 A,B 行等价，则 A与 B中非零子式的最高阶数相等

第二节：矩阵的秩

1. 矩阵的k阶子式

2. 矩阵的秩

3. 计算矩阵秩的一般方法

定义2（矩阵的秩）

如果$A=O$, 则称A的秩为零；如果$A\neq O$，则称A中非零子式的**最高阶数**为A的**秩**. 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$.

例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 6\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\2 & 2 & 4 & -2\\3 & 3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$r(A)=2\qquad r(B)=3\qquad r(C)=1$$

根据定义，易得：

(1) 若$m\times n$矩阵$A\neq O$,则$1\leq r(A)\leq \min\{m,n\}$;

(2) $r(A)=r(A^T)$;

(3) $r(A)=r\Leftrightarrow A$中至少存在一个r阶非零子式，而且A中所有的$r+1$阶子式（如果存在的话）全为零.

定义3（满秩矩阵）

设A为$m\times n$矩阵,

若$r(A)=m$，则称A为行满秩矩阵

若$r(A)=n$，则称A为列满秩矩阵

设A为$n\times n$矩阵,

若$r(A)=n$，则称A为满秩方阵（可逆矩阵、非奇异方阵）

若$r(A)<n$，则称A为降秩方阵（不可逆方阵、奇异方阵）

n阶方阵A满秩(即$r(A)=n$) $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$

n阶方阵A不满秩(即$r(A)<n$) $\Longleftrightarrow$ $|A|=0$

例1 设$A=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$, $r(A)=3$,求常数a.

解 由条件知A为降秩方阵, 所以$\det(A)=0$.

即$\det(A)=\begin{vmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{vmatrix}=(1+3a)(1-a)^3=0$, $\Rightarrow$ $a=-\dfrac{1}{3}$或$a=1$

若$a=1$, 则$r(A)=1$,不合题意.

当$a=-\dfrac{1}{3}$时, A的左上角的三阶子式$=\dfrac{16}{27}\neq 0$, $r(A)=3$. 故$a=-\dfrac{1}{3}$.

第二节：矩阵的秩

1. 矩阵的k阶子式

2. 矩阵的秩

3. 计算矩阵秩的一般方法

阶梯形矩阵的秩等于其非零行的个数

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$

$$B=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\0&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

$r(B)=4$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(C)=1$

阶梯形矩阵的首非零元所在的行和列所组成的k阶子式$\neq 0$

所有$k+1$阶子式$=0$

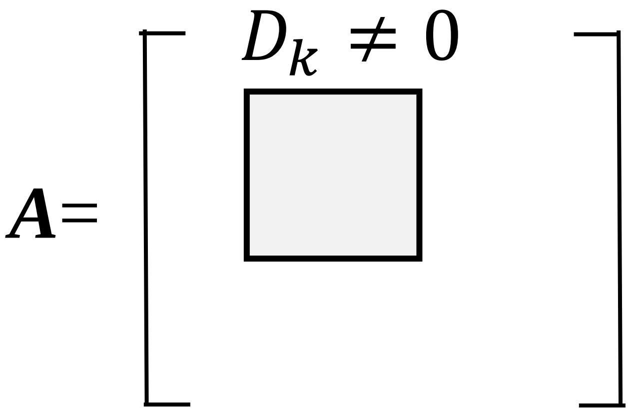
定理 设矩阵A经过若干次初等行变换变成了矩阵B，则$r(A)=r(B)$.即行等价的矩阵有相同的秩。

证明思路：

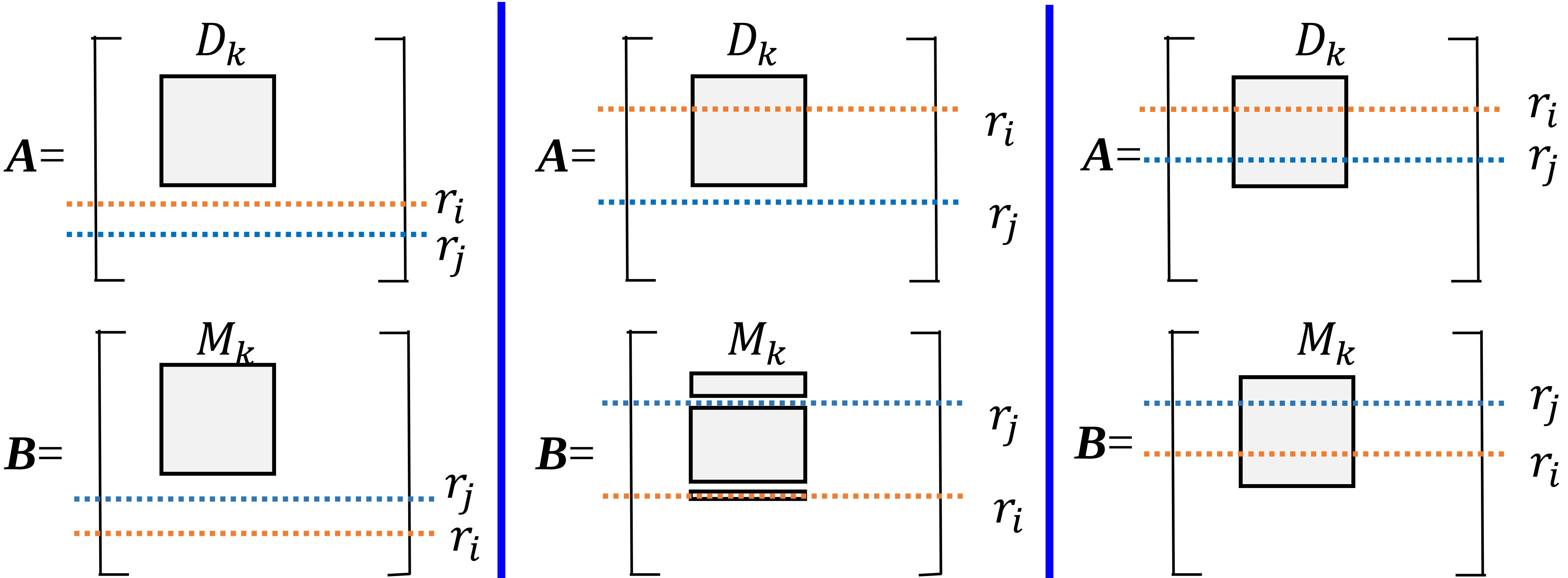
只需证明A经过一次初等行变换变为B之后$r(B)\geq r(A)$，由于初等变换的逆变换也是初等变换，可知$r(A)\geq r(B)$，从而有做一次初等行变换后$r(A)=r(B)$，那么做有限次初等行变换矩阵的秩也不变。

设$r(A)=k$,则A中必存在非零的k阶子式D_k

为了方便讨论，我们假设D_k是A中连续的一块(不连续的情况也可以类似地进行讨论)



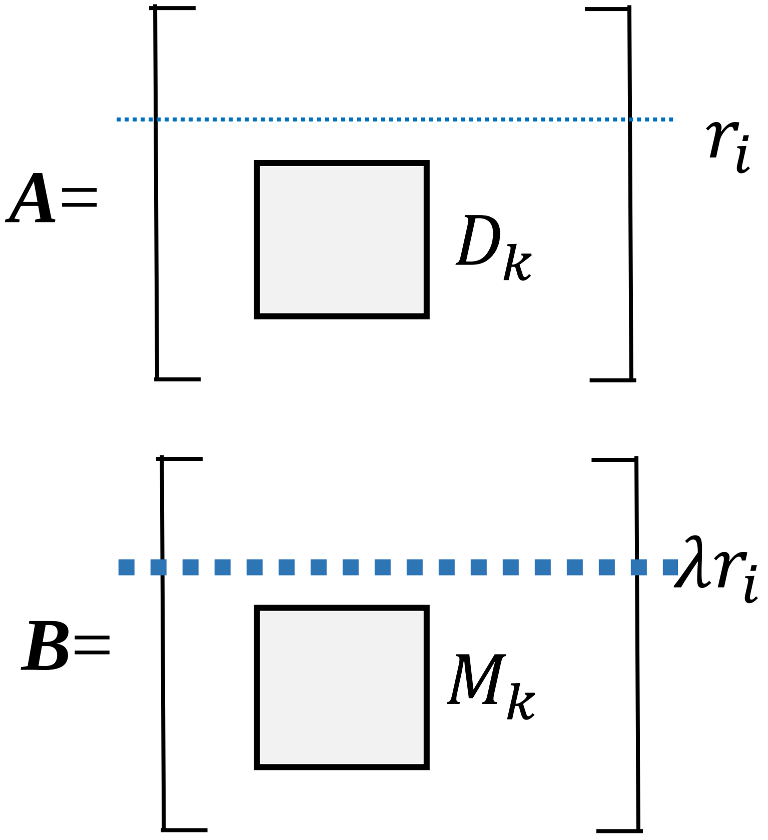
A有k阶非零子式D_k，对A进行变换$r_i \leftrightarrow r_j$得矩阵B，则B中总能找到一个k阶非零子式M_k，M_k与D_k的关系有如下三种情况：



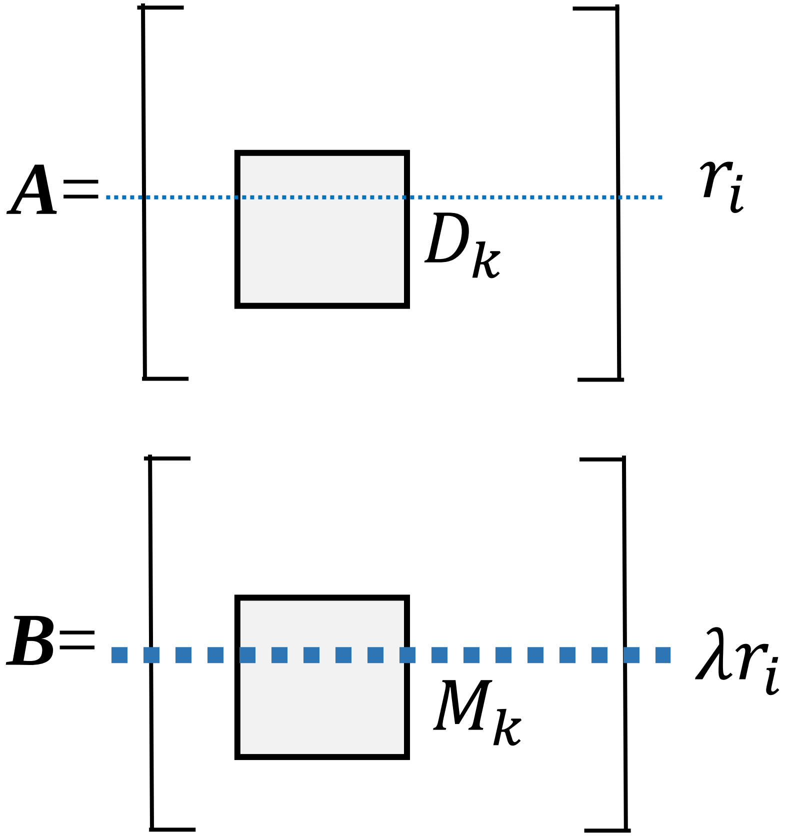
$M_k = D_k$　　$M_k = D_k$ 或 $M_k = -D_k$　　$M_k = -D_k$

$\therefore B$中存在k阶的非零子式M_k，$r(B) \geq r(A) = k$

对A进行变换λr_i，$\lambda \neq 0$得矩阵B，则B中总能找到一个k阶非零子式M_k，M_k与D_k的关系有如下两种情况：



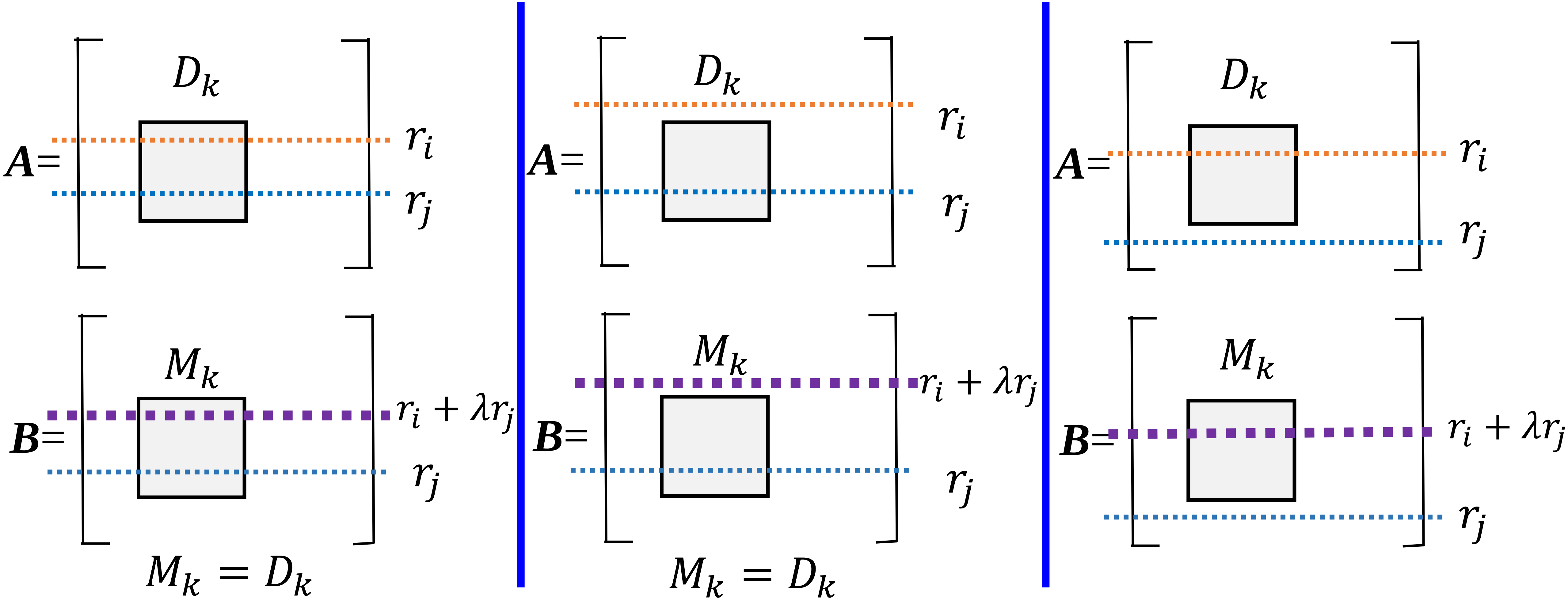
$$M_k = D_k$$



$$M_k = \lambda D_k$$

∴B中存在k阶的非零子式M_k，$r(B) \geq r(A) = k$

对A进行变换$r_i+\lambda r_j$得矩阵B，有如下三种情况：

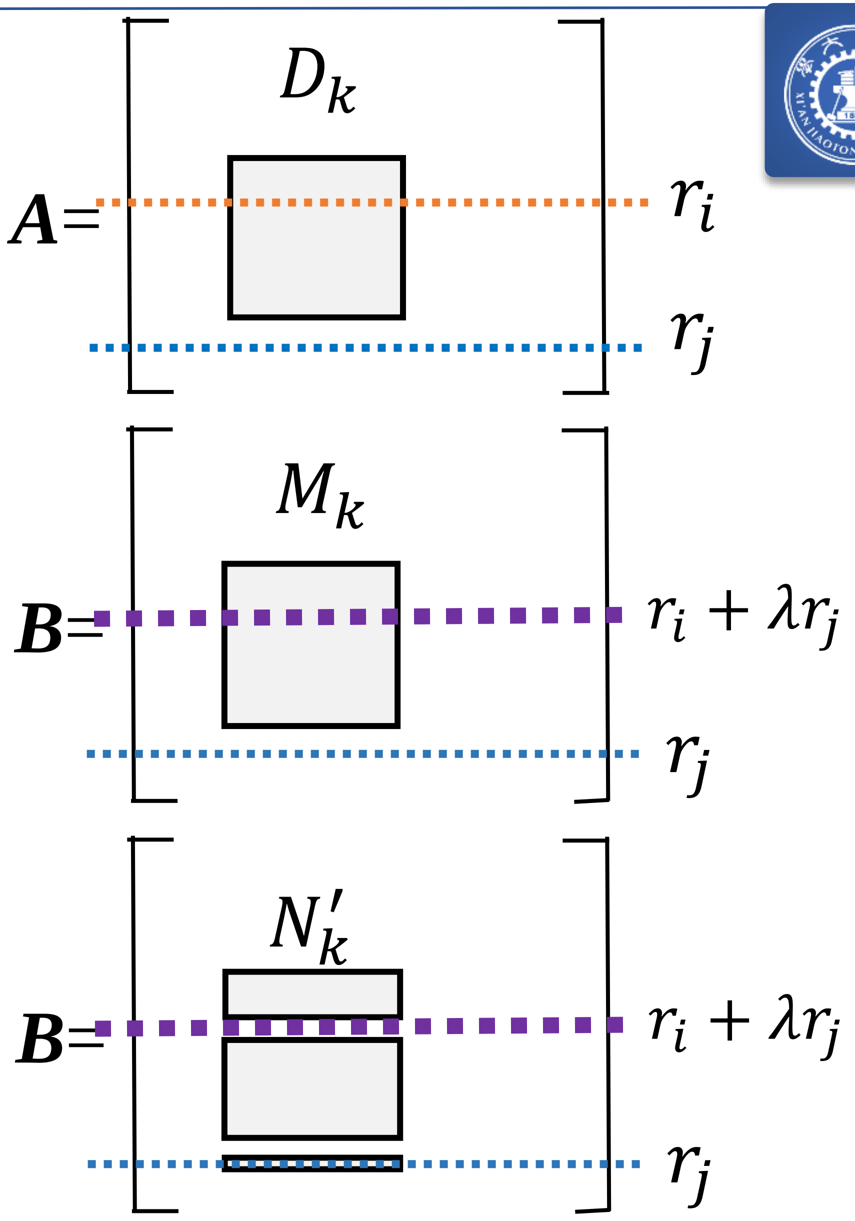


∴对前两种情况，$\boldsymbol{B}$中存在k阶的非零子式M_k，$r(B)\geq r(A)=k$

$$M_k=\begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_i+\lambda r_j \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_i \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_j \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=D_k+\lambda N_k$$

$M_k-\lambda N_k=D_k\neq 0$，因此，$M_k, N_k$不同时为零，

若$N_k\neq 0$，则$\boldsymbol{B}$中存在k阶子式$N_k'=\begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \\ r_j \end{vmatrix}\neq 0$



所以对第三种情况，$\boldsymbol{B}$中存在k阶非零子式（M_k或N_k'），$\boldsymbol{r(B)\geq r(A)=k}$

定理 设矩阵A经过若干次初等行变换变成了矩阵B，则$r(A)=r(B)$.即行等价的矩阵有相同的秩。 $B = PA$

推论1 设矩阵A经过若干次初等列变换变成了矩阵B，则$r(A)=r(B)$. 即列等价的矩阵有相同的秩。 $B = AQ$

推论2 设A为$m\times n$矩阵，P为m阶满秩方阵，Q为n阶满秩方阵，则有

$$r(PA)=r(A),\quad r(AQ)=r(A),\quad r(PAQ)=r(A)$$

即用满秩方阵(可逆矩阵)乘矩阵后，矩阵的秩不改变。

求矩阵秩的方法： 将A经初等行变换变成阶梯形矩阵，则非零行的个数就是A的秩.

求矩阵的秩的方法：

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵}B$$

A的秩等于B中非零行的个数

例2 求下列矩阵A的秩

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

求矩阵的秩的方法：

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵}B$$

A的秩等于B中非零行的个数

例2 求下列矩阵A的秩

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-4r_2 \\ r_4-r_3}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2-r_4 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad R(A)=3.$

性质

1. $0 \le r(A_{m\times n}) \le min\{m, n\}$.

2. $r(A) = r(A^T)$.

3. 若 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$.

4. 若 P、Q可逆，则$r(PAQ) = r(A)$.

5. $max\{r(A),\ r(B)\} \le r(A, B) \le r(A) + r(B)$.

6. $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

7. $r(AB) \le min\{r(A),\ r(B)\}$.

8. 若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $r(A) + r(B) \le n$.

第三章　几何向量及其应用

第二节：数量积、向量积、混合积

魏志强

数学与统计学院

作业

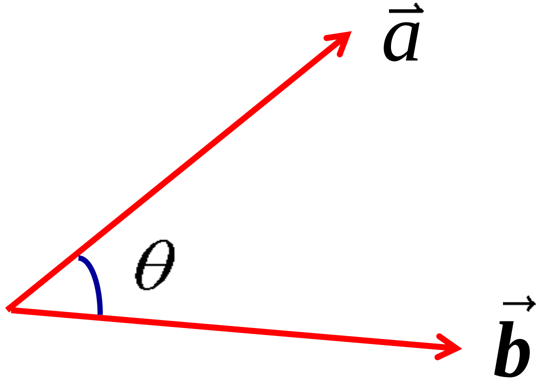
习题3.2

(A) 2, 3, 7, 8, 11, 13, 14, 18

一、数量积（内积、点积）

1、定义3.2.1（数量积、内积、点积）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\cos\theta=\|\vec{a}\|\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=\|\vec{b}\|\left(\vec{a}\right)_{\vec{b}}$$



2、性质:

（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

（2） $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

（3） $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

（4） $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2\geq 0$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

由数量积的交换律和分配律，我们有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\vec{a_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\ell_j\vec{b_j}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_i\ell_j(\vec{a_i}\cdot\vec{b_j})$$

3、数量积的坐标表示：

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$， $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

4、应用（1）求向量的模 $\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

（2）求非零向量间的夹角

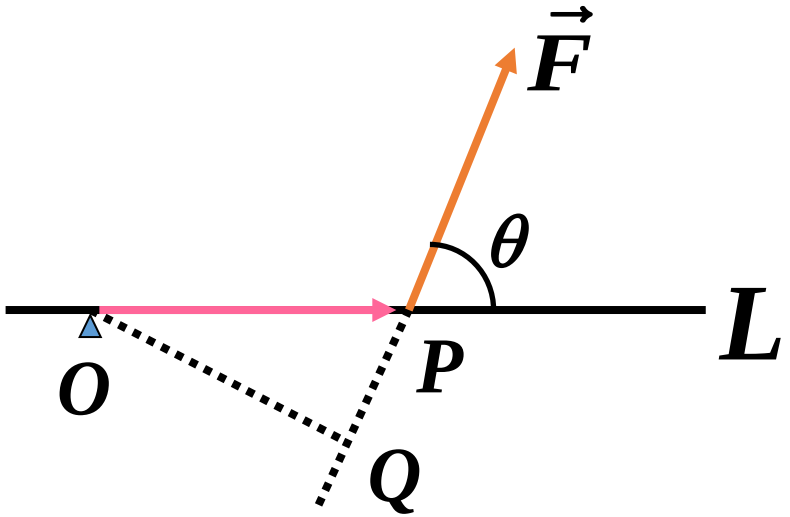
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}}=\vec{a}^0\cdot\vec{b}^0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

（3）求射影 $\vec{a}_{\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=\vec{a}\cdot\vec{b}^0$， $\vec{b}_{\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}=\vec{a}^0\cdot\vec{b}$.

二、两向量的向量积 (叉积，外积)

实例 设O为一根杠杆L的支点，有一力$\vec{F}$作用于这杠杆上P点处. 力$\vec{F}$与OP的夹角为θ，力$\vec{F}$对支点O的力矩是一向量$\vec{M}$，它的模



$$\|\vec{M}\| = |OQ|\|\vec{F}\| = \|\overrightarrow{OP}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$$

$\vec{M}$的方向垂直于OP与$\vec{F}$所决定的平面，指向符合右手系.

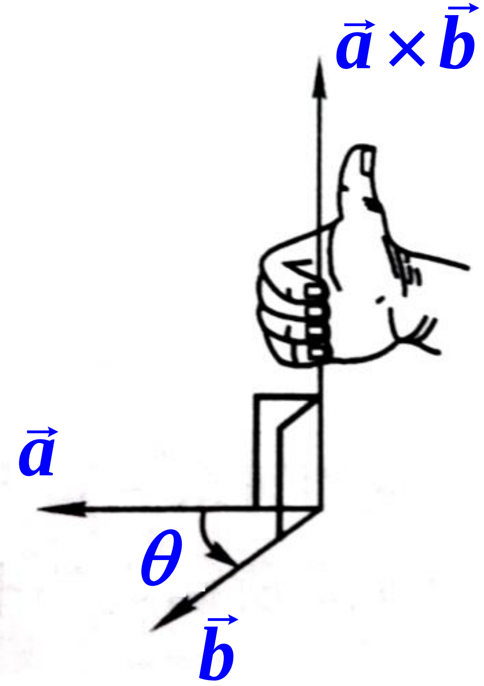
1、定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积(外积、叉积)**为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

大小： $\|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta$ (其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

方向： $\vec{c}$既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，且$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$符合右手系.

$\Longrightarrow$ (1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



2、向量积的基本性质

（1）$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. 不满足交换律

（2）若λ为数：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

（3）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

3、向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$

$\because\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$

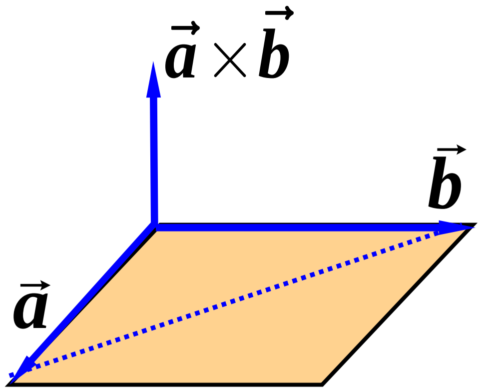
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

向量积的计算公式

4、向量积在几何上的几个应用

（1）求平行四边形的面积



$$S_{平行四边形}=\|\vec{a}\times\vec{b}\|,\quad S_{\Delta}=\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

（2）判别两向量是否共线

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

（3）求与两个不共线的向量都垂直的向量

例: 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},\quad\|\vec{c}\|=5\sqrt{5},$$

与$\vec{a},\vec{b}$都垂直的单位向量：$\pm\dfrac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$

三、向量的混合积

1、**定义** 设已知三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，称**数量**$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$为这三个向量的**混合积**，记为$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.

2、**坐标表示：** 设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$,

因为 $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

则 $$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

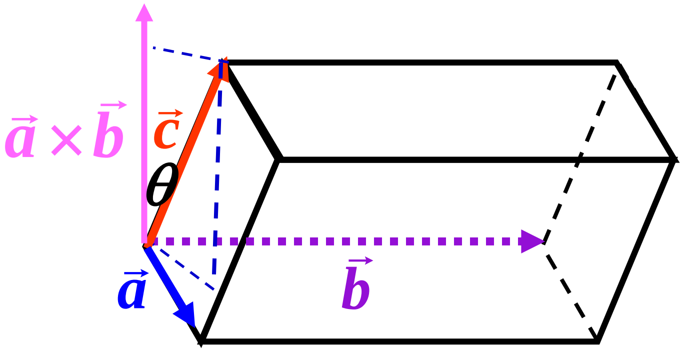
3、**性质：**（1）$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$. 即 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

（2）互换混合积中任意两个向量的位置，则混合积变号

例如 $[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ ]$

4、混合积的几何意义

混合积$[\vec a\ \vec b\ \vec c]=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$的绝对值表示以向量$\vec a$、$\vec b$、$\vec c$为棱的平行六面体的体积.



θ 为锐角时，$\vec a\times\vec b\ \cdot\vec c=\left\|\vec a\times\vec b\right\|\ \left\|\vec c\right\|\cos\theta=V_{六面体}$

θ 为钝角时，$-\ \vec a\times\vec b\ \cdot\vec c=V_{六面体}$

- 三向量共面的混合积表示：

三向量$\vec a$、$\vec b$、$\vec c$共面 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $[\vec a\ \vec b\ \vec c]=0.$

例 已知$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=2$，计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解

$$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=4.$$

第三章　矩阵与线性方程组

第三节：　线性方程组的解

n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [A \,\vdots\, b]$$

系数矩阵　　　　增广矩阵

n元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $Ax = b$

一些概念：

方程组的解：$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$使得每个方程两端都相等

解向量：n维列向量$x_0 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$

解集合：方程组的全部解所组成的集合；解方程组就是要找出它的全部解，即找出它的解集合。

一般解（通解）：当方程组的解不唯一时，称其全部解的表达式为方程组的一般解或通解。

同解（等价）：如果两个线性方程组有相同的解集合，称它们是同解的。

对于线性方程组解的讨论

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- 如何判断线性方程组有没有解？
- 在方程组有解时，它有多少解？如何求出它的全部解？
- 如果方程组的解不唯一，那么这些解之间的关系，即解的结构如何？

例1 求解3元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right]$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -7x_3 = -7 \\ 3x_2 - 12x_3 = -27 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & -12 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{-\frac{1}{7}r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \end{cases} \quad \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{r_4 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 4x_3 = -9 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{r_4 - r_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 7 \\ \quad x_2 & = -5 \\ \quad\quad x_3 & = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow[r1-2r3]{r_2+4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{消元法}} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

唯一解

$$\overline{A} = \left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -6 \\ 1 & 3 & -5 \end{matrix}}_{\text{系数矩阵}A} & \begin{matrix} \vdots & 9 \\ \vdots & 11 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & -8 \end{matrix} \end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

消元法的一般步骤 $\Longleftrightarrow$ 用初等行变换将 $\overline{A}$ 化为行最简形

结论1 当 $r(A) = r(\overline{A}) =$ 未知量个数时,方程组有唯一解

例2 求解 $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 3 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \qquad = -3 \end{cases}$

结论2 当$r(A) = r(\overline{A}) <$ 未知量个数时，方程组有解且有无穷多解

(n-r个自由未知量)

解

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad - x_4 = -2 \\ \quad x_2 \qquad - x_4 = -4 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases}$$

通解

约束未知量

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_4 \\ x_2 = -4 + x_4 \\ x_3 = -5 + 2x_4 \end{cases}$$

自由未知量

$(x_4$ 任意$)$,

或

通解的参数式形式

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c \\ x_2 = -4 + c \\ x_3 = -5 + 2c \\ x_4 = c \end{cases}$$

其中c为任意常数

或

通解的向量形式

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例3 求解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+5x_3=3 \end{cases}$

解 $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_2+2x_3=1 \\ 0=1 \end{cases}$

$r(A)=2,\ \ r(\overline{A})=3$

方程组无解

结论1 当$r(A)=r(\overline{A})=$未知量个数时,方程组有唯一解

结论2 当$r(A)=r(\overline{A})<$未知量个数时,方程组有解且有无穷多解

结论3 当$r(A)\neq r(\overline{A})$时,方程组无解

线性方程组的解

定理1 (线性方程组有解判定定理)

$\boldsymbol{n}$元线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩，即$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$.

当有解时,解的情形分为两种:

(1)有唯一解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=\boldsymbol{n}$;
(2)有无穷多解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\overline{\boldsymbol{A}})<\boldsymbol{n}$,此时通解中有**n−r** 个自由未知量

证明： 考虑n元线性方程组$Ax=b$，设系数矩阵A的秩为r.

不失一般性的，我们设A化成的行最简形中，首非零元都位于前r列（此时首非零元对应的未知量为$x_1, x_2, \cdots, x_r$）

通过初等行变换我们可以得到

$$\bar{A}=[A \vdots b] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{A}=[A \vdots b] \to \left[\begin{array}{ccccccccc:c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

情况1：$d_{r+1} \neq 0$， 此时方程组显然无解， $r(\bar{A}) = r(A) + 1$

情况2：$d_{r+1} = 0$， 我们分两种情况讨论

（1）：$r = n$ 方程组有唯一解： $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$

（2）：$r < n$ 方程组有无穷多解，通解如下

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 &= d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots c_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots \\ x_r &= d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots c_{rn}x_n \end{aligned}$$

此时方程组有
$n - r$个自由未知量，
r个约束未知量

例4 若 $\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & a & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & \vdots & (a-1)^2 \end{bmatrix}$

试判定方程组解的情况,并在有解时,求其全部解

解 (1) 显然未知量个数$n=3$,

当$a \neq 1$且$a \neq -3$时,$r(\overline{A})=r(A)=3$,故此时方程组有唯一解,

逆向求解,即将阶梯形矩阵进一步化为简化行阶梯形:

$$\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & a & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \dfrac{a-1}{a+3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4-\dfrac{3(a-1)}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1-\dfrac{a(a-1)}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \dfrac{a-1}{a+3} \end{bmatrix}$$

得唯一解为 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{a+15}{a+3}, \\ x_2 = \dfrac{-3-a^2}{a+3}, \\ x_3 = \dfrac{a-1}{a+3} \end{cases}$

例4 若 $\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & (a-1)^2 \end{array}\right]$

试判定方程组解的情况,并在有解时,求其全部解

(2)当 $a=1$ 时, $r(A)=r(\overline{A})=2<3$, 方程组有无穷多解,

此时 $\overline{A} \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4-3x_3 \\ x_2 = -1-x_3 \end{cases} \quad (x_3\text{任意}), \quad \text{或} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3c \\ -1-c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)当 $a=-3$ 时, $r(A)=2, r(\overline{A})=3$, 方程组无解.

例5 若$\overline{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,试求方程组的通解

解

$$\overline{A} \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -14 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \quad -14x_4 = -18 \\ x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -18 + x_2 + 14x_4 \\ x_3 = 2 - 4x_4 \\ x_5 = 5 \end{cases} \quad (x_2, x_4\text{为任意常数})$$

通解

n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = 0,$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

n元齐次线性方程组$Ax = 0$,总有$r(A) = r(\overline{A})$,

即方程组必有解,因此,

(1) $Ax = 0$有唯一解 $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) = n$

(2) $Ax = 0$有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$有非零解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) < n$

定理2

对于n元齐次线性方程组$Ax=0$，解的情况只有以下两种：

$(1) Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow r(A)=n$;

$(2) Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$,且此时通解中有n-r 个自由未知量

推论1　设A为n阶方阵，则有：

$Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

$Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow \det(A)=0$

推论2　设A为$m\times n$矩阵,$m<n$,则$Ax=0$必有非零解

证：因$r(A)\leq m<n \Rightarrow Ax=0$必有非零解

例6 求解方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

解 $\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$

(1)当$\det(A) = (\lambda-1)^2(\lambda+2) \neq 0$,即$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时,

存在唯一解$x = 0$

例6 求解方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

$\det(A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$

(2)当$\lambda = 1$时, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$(其中$x_2, x_3$任意)

(3)当$\lambda = -2$时, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ (x_3任意)

定理3

矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解的充分必要条件$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$

定理4

设$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,则$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{C}) \leq \boldsymbol{min}\{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})\}$.