第二章　矩阵

第一节：线性方程组矩阵

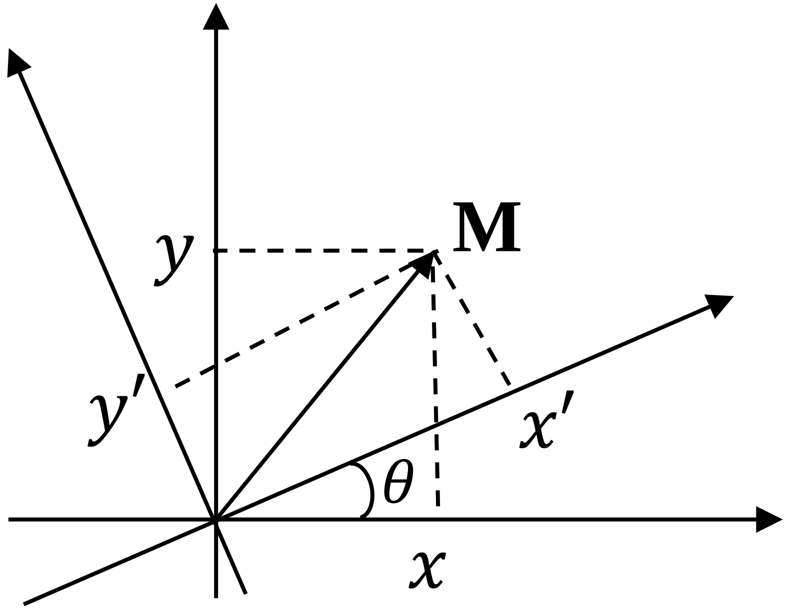
矩阵的概念

引例1.（坐标变换）在平面直角坐标系中，坐标轴绕原点沿逆时针方向旋转θ角，点M的新坐标(x',y')和旧坐标(x,y)之间的关系为

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

新旧坐标间的关系可用矩形数表表示

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$



对坐标变换关系的研究可以转化成对这张数表的研究。

矩阵的概念

引例2： 考虑如下线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

方程组未知量前的系数和右端常数项可以抽象成一个数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

对线性方程组的研究可以转化成对这张数表的研究。

矩阵的概念

引例3. 数字图像可以表示成一个或几个数表

223	90	98
224	220	89
221	215	84

对图像的处理可以转化为对数表的处理。

矩阵的定义

定义：由$m \times n$个数$a_{ij}(i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n)$排成的$m$行、$n$列的矩形**数表**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个$m \times n$矩阵. 其中a_{ij}称为该矩阵的第i行第j列元素，简称为该矩阵的(i,j)元素.

矩阵的记号：$\boldsymbol{A}$ 或$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或$(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})

方阵：$m = n$时，我们称$\boldsymbol{A}_{n\times n}$为**$n$阶方阵**或**$n$阶矩阵**，也记为$\boldsymbol{A}_n$

元素是实（复）数的矩阵称为实（复）矩阵

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 是2×4实矩阵

$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 是一个3阶复矩阵

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是3×1矩阵

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 是1×4矩阵

(4) 是1×1矩阵

对于方阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

副（次）对角线

主对角线

同型矩阵与矩阵相等

定义（同型矩阵）：设矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，这里$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的行数相等，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的列数也相等，把这样的矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$称为**同型矩阵**。

定义（矩阵相等）：如果两个同型矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的对应元素都相等，即$a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则称**$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相等**，记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注：两个元素全为零的矩阵一定相等么?

不同型的矩阵是不相等的

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

几种特殊的矩阵

1. 1阶方阵$[a]$通常写成a，**即把1阶方阵和一个数不予区分**.

2. 零矩阵 所有元素都为零的矩阵，记为$\boldsymbol{O}_{m\times n}$或$\boldsymbol{O}$

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

3. 单位矩阵 主对角线元素都是1，其他元素都是0的n阶方阵

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

记为$\boldsymbol{I}_n$或$\boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{E}_n$或$\boldsymbol{E}$

几种特殊的矩阵

4. 行矩阵(n维行向量)与列矩阵(m维列向量)

$$\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

5. 上（下）三角矩阵

主对角线下（上）边的元素全为零的**方阵**，称为上（下）三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上三角矩阵 **下三角矩阵**

几种特殊的矩阵

6. **对角矩阵** 主对角线以外的元素全为零的方阵，称为n阶对角矩阵

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

对角矩阵可以简记为$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$

对于非齐次线性方程组,有如下几个矩阵:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

未知数矩阵$\boldsymbol{x}$: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

系数矩阵A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

常数项矩阵b: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

增广矩阵$[A|\boldsymbol{b}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

第二节：矩阵的运算

1.矩阵的代数运算

2.矩阵的转置

3.方阵的行列式

矩阵的代数运算

代数运算：加法，数与矩阵的乘法，矩阵之间的乘法

定义（矩阵的加法）：设$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$和$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$是两个同型的矩阵，规定$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和是由$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的对应元素相加所得到的$m\times n$矩阵，记为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

负矩阵：对于矩阵$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$称矩阵$\left(-b_{ij}\right)_{m\times n}$为$\boldsymbol{B}$的负矩阵，记为$-\boldsymbol{B}$

矩阵的代数运算

矩阵的减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$$

矩阵加法的运算规律：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ 交换律

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ 结合律

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$ 零矩阵的作用

（4）$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 负矩阵的作用

矩阵的加法和数的加法运算规律类似，需注意的是同型的矩阵才能够进行加法运算

数与矩阵的乘法（数乘运算）定义：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$， k 为数，规定k与$\boldsymbol{A}$的乘积是用k去乘$\boldsymbol{A}$的每个元素所得到的$m\times n$矩阵，记为$k\boldsymbol{A}$（或$\boldsymbol{A}k$），即 $k\boldsymbol{A}=\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}$

例如：

$$(-2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

数乘的运算规律：

假设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都为$m\times n$矩阵，$k,l$为任意常数，则有：

（1）$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$, $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（2）$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$　　结合律

（3）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$　　数的分配律

（4）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$　　矩阵的分配律

矩阵的加法与数乘运算合起来，统称为**矩阵的线性运算**。

例1 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,

且$3B+2X=2A$,求X.

解

定义（矩阵的乘法）： 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，规定$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积为矩阵$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，记为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中

左行乘右列

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

这里$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$，即$\boldsymbol{AB}$的$(i,j)$元素为$\boldsymbol{A}$的第$i$行各元素分别与$\boldsymbol{B}$的第$j$列对应元素的乘积之和.

注意： 1. 左边矩阵列数等于右边矩阵行数，两个矩阵才能相乘

2. 乘积矩阵的行数、列数分别等于左边矩阵的行数，右边矩阵的列数

$$(\boldsymbol{AB})_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$$

例2：设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\\ 7 & -1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$

$\boxed{4\times 2\text{矩阵}}$ $\boxed{2\times 3\text{矩阵}}$

求AB

解

$$AB=\begin{bmatrix}1\times 1+2\times(-1) & 1\times 2+2\times 3 & 1\times 0+2\times 4\\ 3\times 1+4\times(-1) & 3\times 2+4\times 3 & 3\times 0+4\times 4\\ -1\times 1+0\times(-1) & -1\times 2+0\times 3 & -1\times 0+0\times 4\\ 7\times 1+(-1)\times(-1) & 7\times 2+(-1)\times 3 & 7\times 0+(-1)\times 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 8\\ -1 & 18 & 16\\ -1 & -2 & 0\\ 8 & 11 & -4\end{bmatrix}$$

$\boxed{4\times 3\text{矩阵}}$

注意：*BA*无意义

例3：设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

求AB

解

例4：设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$n\times 1$ $\qquad$ $1\times n$

求$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

矩阵乘法一般不能交换顺序，因此，我们称$\boldsymbol{AB}$为“用$\boldsymbol{A}$左乘$\boldsymbol{B}$”或“用$\boldsymbol{B}$右乘$\boldsymbol{A}$”

例5：设矩阵$A=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

求AB和BA

解

由 $AB=O$ 一般不能推出 $A=O$ 或 $B=O$.

矩阵乘法的运算规律(假定其中的所有运算都有意义):

(1) $I_{\mathrm{m}}A_{m\times n} = A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$ 单位矩阵的作用

(2) $O_{\mathrm{m}}A_{m\times n} = A_{m\times n}O_n = O_{m\times n}$ 零矩阵的作用

(3) $(AB)C = A(BC)$ 乘法结合律

(4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ 关于数乘的结合律

(5) $A(B + C) = AB + AC$ 左分配律

(6) $(A + B)C = AC + BC$ 右分配律

例：（线性变换与矩阵）设有由变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$的变换

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots,+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

其中$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为常数.

上式称为从变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_m$的线性变换

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

线性变换的矩阵表示

线性变换与矩阵$\boldsymbol{A}$一一对应，$\boldsymbol{A}$称为线性变换的矩阵.

例：（线性方程组与矩阵）有了关于矩阵的研究，我们可以讨论

一般的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

由矩阵乘法，我们有

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

线性方程组的矩阵表示

$\boldsymbol{A}$称为线性方程组的**系数矩阵**

方阵的幂

设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，由于矩阵乘法满足结合律，所以m个矩阵$\boldsymbol{A}$的乘积不加括号是有意义的，我们定义$\boldsymbol{A}$**的幂**为

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I},\qquad \boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}$$

性质：对于任意非负整数k、l，我们有

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\qquad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$$

注：对于同阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$来说，下列等式**不一定成立**

$$(\boldsymbol{AB})^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m,\qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

仅在$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$时上述等式成立

例6： 设 $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda \\ 0 & 1\end{pmatrix}$，计算$A^2, A^3, \cdots A^n$.

解：

第一节：矩阵及其运算

1.矩阵的概念

2.矩阵的代数运算

3.矩阵的转置

4.方阵的行列式

矩阵的转置

定义：把$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$的行依次换成列（列依次换成行）所得到的$n \times m$矩阵，称为$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，记为$\boldsymbol{A}^T$，即

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

矩阵转置的运算规律：

(1) $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$　　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(3) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$　　(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

(5) $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^T = \boldsymbol{A}_m^T\boldsymbol{A}_{m-1}^T\cdots\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T$

性质（4）的证明：设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}$ ，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$

1. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T$与$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$都是$n\times m$矩阵，下面我们仅需验证对应元素相等

2. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ji} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}$，我们可知$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T{}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}$

$$(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{s}(\boldsymbol{B}^T)_{ik}(\boldsymbol{A}^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{s} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}b_{ki}$$

例7：设矩阵$\boldsymbol{A} = [1/2 \quad 0 \quad 1/2], \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},$

其中$\boldsymbol{I}$为3阶单位阵，求$\boldsymbol{BC}$

解：

对称矩阵：若方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$满足$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，则称$\boldsymbol{A}$为对称矩阵

反对称矩阵：若方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$满足$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，则称$\boldsymbol{A}$为反对称矩阵

（由于$a_{ii}=-a_{ii}$，反对称矩阵的主对角线元素为零）

例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 6 & 1\\ 6 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$ 是对称矩阵， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\\ 6 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是反对称矩阵

例：证明任何一个方阵可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和

证明思路：

$$\boldsymbol{A}=\underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)}_{\text{对称矩阵}}+\underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)}_{\text{反对称矩阵}}$$

例8：设列矩阵 $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，满足 $\mathbf{X}^T\mathbf{X}=1$，E 为 n 阶单位矩阵，且 $H=E-2XX^T$，证明 H 是对称矩阵，且 $HH^T=E$．

证明

第一节：矩阵及其运算

1.矩阵的概念

2.矩阵的代数运算

3.矩阵的转置

4.方阵的行列式

定义（方阵的行列式）：对于n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，称$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，简记为$\det(\boldsymbol{A})$或$|\boldsymbol{A}|$

注意区别：方阵是一个数表，行列式是一个数

方阵的行列式的运算规律：

（1） $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$

（2） $\det(k\boldsymbol{A}) = k^n\det(\boldsymbol{A})$

（3） $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$

行列式的乘法公式，
证明见教材47页

推广：$\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m) =$
$\det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_m)$

例9：设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\3&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，求 $|AB|, |A^3|, |3A|$.

思考： $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$ 是否总是成立？

第二章　矩阵

第三节：逆矩阵

课前思考

上一节中我们学习了矩阵的加法、减法、数乘、乘积运算，那么我们能不能对矩阵定义“除法运算”呢？

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有$b \div a = ba^{-1}$。

其中a^{-1}满足$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$，a^{-1}称为a的逆元。

矩阵也有逆元吗？

第二节：逆矩阵

1.逆矩阵的概念

2.矩阵可逆的充要条件

3.逆矩阵的基本性质

4.逆矩阵的初步应用

逆矩阵：

定义：设$\boldsymbol{A}$为n阶**方阵**，如果存在n阶方阵$\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

则称方阵$\boldsymbol{A}$是**可逆的**（或称为**非奇异的**），并称方阵$\boldsymbol{B}$为方阵$\boldsymbol{A}$的

逆矩阵或**逆阵**，记为$\boldsymbol{A}^{-1}$，即$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

不存在逆阵的方阵也称为**奇异矩阵**。

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\because AB = BA = I$

$\therefore B$是A的逆矩阵.

即$A^{-1} = B$.

方阵的逆矩阵不一定存在：

例：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵存在么？

有 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+2b_{12} & 0\\ b_{21}+2b_{22} & 0\end{bmatrix}\neq \boldsymbol{I}$

所以$\boldsymbol{A}$是不可逆的.

（1）方阵可逆的条件是什么？
（2）逆矩阵是否唯一？
（3）可逆时，如何求逆矩阵？

逆矩阵的唯一性：

设$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$都是方阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，则有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$$

于是有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C}$$

所以$\boldsymbol{A}$的逆矩阵是唯一的。

第二节：逆矩阵

1.逆矩阵的概念

2.矩阵可逆的充要条件

3.逆矩阵的基本性质

4.逆矩阵的初步应用

定义：（**伴随矩阵**）设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为$n(n\geq 2)$阶方阵，$\det(\boldsymbol{A})$的元素$a_{ij}$的代数余子式为$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称以$A_{ji}$为$(i,j)$元素的$n$阶方阵为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，记为$\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

例： 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$的伴随矩阵.

解 $A_{11}=5,\ A_{21}=-2,\ A_{12}=-3,\ A_{22}=1,$ 故$A^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

定理1：设$\boldsymbol{A}$为$n(n\geq 2)$阶方阵，则成立$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$

证： **回想行列式的性质：** $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det(\boldsymbol{A}), & 当j=i\\ 0, & 当j\neq i\end{cases}$

这条性质意味着：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\det(\boldsymbol{A}) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det(\boldsymbol{A}) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \det(\boldsymbol{A})\end{bmatrix}=\det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$$

同理可证： $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$

定理1：设A为$n(n \geq 2)$阶方阵，则成立$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$

如果 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ ⇒ $$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*\right) = \left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

定理2：（**方阵可逆的充要条件**）$n(n \geq 2)$阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，且当$\boldsymbol{A}$可逆时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*$$

证：(**必要性**)若$\boldsymbol{A}$可逆，则存在方阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，则有$\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{1}$，故$\det(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{0}$;

(**充分性**)由定理1，若$\det(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{0}$，则有$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*\right) = \left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$，

可知$\boldsymbol{A}$的逆矩阵存在，并且$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*$.

推论1：如果$n(n \geq 2)$阶方阵$\boldsymbol{A}$的行列式 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，则

$$\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$$

证：在公式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$两端取行列式，得$\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^n$，

因为$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，可得$\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$

推论2：如果同阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，则$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均可逆，且

$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

证：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = 1$, 故$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0, \det(\boldsymbol{B}) \neq 0$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均可逆.

用$\boldsymbol{A}^{-1}$左乘$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$的两端，得$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. 其余结论可类似证明。

推论2说明：要验证方阵$\boldsymbol{B}$是方阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，只需验证$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$中的一个就可以了。

例：下列矩阵是否可逆？如果可逆，求其逆矩阵

$$(1)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -4\end{bmatrix} \qquad (2)\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

解

例：求下列矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}, \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0\right)$$

解：1）

例：求下列矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}, \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0\right)$$

解 2）

例：设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$可逆，并求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$.

$$\boxed{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}}$$

解：因为

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}$$

故有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$$

化简得

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$$

$$1/2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$$

这说明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$可逆，且$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=1/2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$

第二节：逆矩阵

1.逆矩阵的概念

2.矩阵可逆的充要条件

3.逆矩阵的基本性质

4.逆矩阵的初步应用

逆矩阵的基本性质：

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶可逆方阵，常数$k\neq 0$，则有：

逆 (1) $\boldsymbol{A}^{-1}$可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$ ⇐ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

转置 (2) $\boldsymbol{A}^T$可逆，且$(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$ ⇐ $\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^{-1})^T=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{I}$

数乘 (3) $k\boldsymbol{A}$可逆，且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$ ⇐ $(k\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

乘法 (4) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$可逆，且$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ ⇐ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

行列式 (5) $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$ ⇐ $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\det(\boldsymbol{I})=1$

性质(4)推广：若$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$均为$n$阶可逆方阵，则$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$可逆，且$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$。特别的，我们有$(\boldsymbol{A}^m)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^m$.

例：设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，$\det(\boldsymbol{A}) = 1/2$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，求行列式$\det[(3\boldsymbol{A})^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*]$的值

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

解：由于$(3\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，$2\boldsymbol{A}^* = 2\det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$，

所以

$$D = \det\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \det(\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$= \frac{-8}{27}\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-16}{27}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

例：设方阵A、B均可逆，$k\neq 0$，试证明

(1) A^*可逆,且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{A}{|A|}$ $\Leftarrow$ $\dfrac{A}{|A|}A^* = A^*\dfrac{A}{|A|} = E, A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$

(2) $A = |A|(A^*)^{-1}$, $\boxed{A^* = |A|A^{-1}}$

(3) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$ $\Leftarrow$ $(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\dfrac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}A^*$

(4) $|A^*| = |A|^{n-1}$ $\Leftarrow$ $|A||A^*| = |A|^n$

(5) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ $\Leftarrow$ $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\dfrac{A}{|A|}$

(6) $(AB)^* = B^*A^*$

$$(AB)^* = |A||B|(B^{-1}A^{-1}) = |B|B^{-1}|A|A^{-1} = B^*A^*$$

第二节：逆矩阵

1.逆矩阵的概念

2.矩阵可逆的充要条件

3.逆矩阵的基本性质

4.逆矩阵的初步应用

利用逆矩阵求解线性方程组、矩阵方程

例：利用逆矩阵来求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解：利用逆矩阵来求解线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这里$\det(\boldsymbol{A}) = 1 \neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆，于是，我们有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

当$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m$阶，$n$阶可逆矩阵时，矩阵方程（其中$\boldsymbol{X}$为未知矩阵）

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{D},\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{F}$$

的解分别为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}^{-1}$$

例：设矩阵$\boldsymbol{X}$满足矩阵方程$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&6\\1&1\\2&-3\end{bmatrix}$$

求矩阵$\boldsymbol{X}$

解：由$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，得$\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，即$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

经计算知$\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\neq 0$，从而$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}$.

当$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m$阶，$n$阶可逆矩阵时，矩阵方程（其中$\boldsymbol{X}$为未知矩阵）

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{D},\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{F}$$

的解分别为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}^{-1}$$

例：设矩阵$\boldsymbol{X}$满足矩阵方程$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

求矩阵$\boldsymbol{X}$

解：由$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，得$\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，即$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

经计算知$\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\neq 0$，从而$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}$.

例：设$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$, $AP=P\Lambda$, 求A^n

矩阵A的多项式

设$\phi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$为$x$的$m$次多项式， A为n阶矩阵，记

$$\phi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$$

称$\phi(A)$为矩阵A的m次多项式。

我们常用上例中计算A^n的方法来计算$\phi(A)$，即

（1）如果$A=P\Lambda P^{-1}$,则$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$,从而

$$\phi(A)=a_0PEP^{-1}+a_1P\Lambda P^{-1}+\cdots+a_mP\Lambda^mP^{-1}$$

（2）如果$\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,则$\Lambda^k=diag(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k)$,从而

$$\phi(\Lambda)=$$

例： 设$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, AP=P\Lambda$, 求$\phi(A)=A^3+2A^2-3A$

小结

- 判别矩阵A是否可逆

  定义：$AB = I$

  定理2：$\det(A) \neq 0$

- 求逆矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

- 逆矩阵的性质（逆、转置、数乘、乘法、行列式）
- 利用逆矩阵求线性方程组、矩阵方程

$$x = A^{-1}b \qquad X = A^{-1}FB^{-1}$$

第二章　矩阵及其运算

2.4　Cramer法则

2.4 Cramer法则

非齐次与齐次线性方程组的概念

设有n个未知量m个方程的线性方程组:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零，则称此方程组为非齐次线性方程组;

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

则称此方程组为齐次线性方程组;

对于n元齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，称它为n元齐次线性方程组的零解.

若有一组不全为零的数是齐次线性方程组的解，则称其为齐次线性方程组的非零解.

齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解；

例如 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$只有零解； 而$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$有非零解.

Cramer（克拉默）法则

定理 对于有n个未知量n个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么方程组有**唯一**解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}.$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素依次用方程组右端的常数项替代后得到的n阶行列式.

利用逆矩阵证明Cramer法则

Cramer法则 对于n个未知数n个方程的线性方程组$Ax=b$,

如果它的系数行列式$D=|A|\neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是将D的第j列元素依次用右端的常 数项替换所得到的n阶行列式.

证 若$|A|\neq 0$,则A可逆. $Ax=b\Rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}=x=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}A^*b=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{1}{D}\underline{(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj})}$$

等于 D_j?

又 $$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

故 $$x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n.$$

推论1 对于n个未知量n个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解.

推论2 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

例1 用Cramer法则解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 2 \\ \cdots \\ x_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ nx_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 2 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{其他每行}]{\text{将第一行乘-1加到}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)! \neq 0$$

方程组有唯一解

例1 用Cramer法则解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ x_1+x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=2 \\ \cdots \\ x_1+(n-1)x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ nx_1+\quad x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_i=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 2 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=2D,$$

$(i\neq n)$

方程组的唯一解为：

$$x_i=\frac{D_i}{D}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

$$x_n=\frac{D_n}{D}=2$$

例2 问λ取何值时，齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

解

第二章　矩阵及其运算

第五节：分块矩阵

第五节：分块矩阵

本节介绍在处理行数、列数较高的矩阵时的常用技巧——**矩阵分块法**。通过矩阵的分块，可将大矩阵的运算转化成小矩阵的运算，从而简化运算。

第三节：分块矩阵

1.分块矩阵的概念

2.分块矩阵的运算

在研究行数、列数较高的矩阵时，常常需要对矩阵采用分块的方法，即用一些横线和纵线将它分划成若干个矩形的**子块**（都是子矩阵），以这些子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{array}\right]$$

在研究行数、列数较高的矩阵时，常常需要对矩阵采用分块的方法，即用一些横线和纵线将它分划成若干个矩形的**子块**（都是子矩阵），以这些子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

I_3 $\quad A_{12}$ $\quad O_{2\times 3}$ $\quad A_{22}$

$$A=\begin{bmatrix} I_3 & A_{12} \\ O_{2\times 3} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

按列分块

$$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$$

分块对角矩阵(准对角方阵)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&O&O\\O&\boldsymbol{A}_2&O\\O&O&\boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}$$

主对角线上各子块都为**方阵**，其他部分子块为零，称这样的**方阵**为**分块对角矩阵**或**准对角方阵**

第三节：分块矩阵

1.分块矩阵的概念

2.分块矩阵的运算

分块矩阵的加法及数与分块矩阵的乘法：

对同型矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$作同样的划分，得分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{bmatrix}$$

按照矩阵的加法及数与矩阵的乘法的定义，有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{bmatrix},\quad k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}\ (k\text{为常数})$$

分块矩阵的转置：

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

先大转置，再小转置

例如：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

分块矩阵的乘法：

设矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})_{m\times l}, \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_{ij})_{l\times n}$分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt}\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{A}_{ir}$的列数分别等于$\boldsymbol{B}_{1j}, \boldsymbol{B}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{B}_{rj}$的行数$(i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t)$，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \boldsymbol{C}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{bmatrix}$$

顺序不可以换

其中$\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ir}\boldsymbol{B}_{rj}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$

$$(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$$

对于矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，

(1)将$\boldsymbol{B}$**按列分块**，有$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_n]$，其中$\boldsymbol{B}_j=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix}$，$j=1,2,\cdots,n$

则有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_n]=[\boldsymbol{AB}_1 \quad \boldsymbol{AB}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{AB}_n]$

(2)将$\boldsymbol{A}$**按行分块**，有$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{A}_i=[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is}]$，$i=1,2,\cdots,m$

则有$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$

例：设$\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$均为3维列向量，方阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，

$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]$，已知$\det(\boldsymbol{A})=a$，求$\det(\boldsymbol{B})$.

解：由矩阵的乘法可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad 2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$1\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right]$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{AP}$$

$$\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{P})=12a$$

分块对角矩阵的乘积

设有两个分块对角矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_m\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i$为同阶方阵，$i=1,2,\dots,m$，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^n & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^n\end{bmatrix}$$

例：求$\boldsymbol{A}^2$，其中矩阵$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&0&8\end{bmatrix}$$

解：

例：设$\boldsymbol{A}_{n\times n},\boldsymbol{B}_{m\times m}$均为方阵，$\boldsymbol{C}$为任意的$n\times m$矩阵，问分块上三角形矩阵$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$何时可逆？当可逆时，求其逆矩阵。

解：由于$\det(\boldsymbol{D})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$，所以，矩阵$\boldsymbol{D}$可逆$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可逆

设矩阵$\boldsymbol{D}$的逆为$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{X}_{11}$是$n$阶方阵，$\boldsymbol{X}_{22}$是$m$阶方阵

根据逆矩阵的定义，有

分块对角矩阵的逆矩阵

设$\boldsymbol{A}$为分块对角矩阵（未写出的子块都是零子块）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_m)$$

若$\det(\boldsymbol{A}_i) \neq 0$，$i = 1,2,\cdots,m$，$\boldsymbol{A}$可逆，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} {\boldsymbol{A}_1}^{-1} & & & \\ & {\boldsymbol{A}_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & {\boldsymbol{A}_m}^{-1} \end{bmatrix}$$

$A_i\ (i=1,2,\cdots s)$均为可逆方阵.

$$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_s & & \end{pmatrix},\qquad 则\ A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix};$$

例: 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解:

例: 设 $A=\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$, 其中 $a_i \neq 0$, 求 A^{-1}.

解: