西安交通大学考试题

成绩	

课 程 线性代数A卷

学 院 ____________ 考试日期 2023年 11月 19日

专业班号 ____________________

姓 名 ______________ 学 号________________ 期中 □ 期末 □

一、选择题（6小题，每题3分，共计18分）

1. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，其中$m<n$，且$R(\boldsymbol{A})=m$，则下列说法正确的是（ ）

A. 矩阵$\boldsymbol{A}$的m个行向量所构成的向量组线性相关

B. 矩阵$\boldsymbol{A}$的任意n个列向量所构成的向量组线性无关

C. 设矩阵$\boldsymbol{B}$为$n\times m$，则$|\boldsymbol{BA}|=0$

D. 齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

2. 设四阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值互不相同，且$|\boldsymbol{A}|=0$，则$R(\boldsymbol{A})=$（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 设$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$对应的齐次线性方程组，则以下正确的是（ ）

A. 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解

B. 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解

C. 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解

D. 若$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

4. 设方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有（ ）

A. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$ B. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$ C. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$ D. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

5. 矩阵$\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{bmatrix}$的秩为3，则（ ）

A. a,b,c都不等于1 B. a,b,c都不等于0

C. a,b,c互不相等 D. $a=b=c$

6. n阶行列式$D=\det(a_{ij})=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,则下列说法不正确的是（ ）

A. 和式记号是对集合$P=\{p_1p_2\cdots p_n|p_1p_2\cdots p_n\text{是}1,2,\cdots,n\text{的排列}\}$作和

B. 和式中每一项都是取自D中不同行、不同列的元素之积

C. D中这样不同行、不同列的n个元素之积共有$n!$个

D. t是以$p_1\,p_2\cdots p_n$为标准排列的逆序数

二、填空题（6小题，每题3分，共计18分）

1. 设向量组$\boldsymbol{\alpha_1}=[a+2\quad 1\quad 0]^T$，$\boldsymbol{\alpha_2}=[0\quad a-1\quad -1]^T$，$\boldsymbol{\alpha_3}=[2\quad 2\quad a+1]^T$线性相关，则$a=$ __________

2. 设$\boldsymbol{a} = [1 \quad 2 \quad -1]^T$，$\boldsymbol{b} = [1 \quad 2 \quad 3]^T$，$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$正交，且$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$，则$\lambda =$ ________

3. 已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为 1，2，$\frac{1}{2}$，E为三阶单位阵，则$|\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}| =$ ____

4. 方程$f(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + x \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & a_4 \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & a_4 \\ a_1 + x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$ 的根为________

5. 矩阵$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 矩阵$\boldsymbol{A}$和矩阵$\boldsymbol{B}$相似，则 $R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{2E}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})=$ ________

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$，$\boldsymbol{A}_{ij}$为$|\boldsymbol{A}|$中元$a_{ij}$的代数余子式，已知$a_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij}$, $a_{11} = 2a_{12} = 3a_{13}$，并且$a_{11} > 0$, 则 $a_{11}=$ ________

三、（9 分）求解如下齐次方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

四、（10 分）4 阶矩阵$\boldsymbol{A}$和未知矩阵$\boldsymbol{X}$满足关系$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} * -8\boldsymbol{E} = 6\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}$, 若矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$.

五、（10 分）计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$$

六、（10 分）设向量组A: $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 3]^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = [-1 \quad -3 \quad 5 \quad 1]^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = [3 \quad 2 \quad a+4 \quad 11]^T, \boldsymbol{\alpha}_4 = [-2 \quad -6 \quad 10 \quad a]^T$,向量$\boldsymbol{\beta} = [1 \quad 1 \quad b+1 \quad 3]^T$.

(1) 当a，b满足什么条件时，$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组A线性表示？

(2) 当a，b满足什么条件时，$\boldsymbol{\beta}$能由向量组A线性表示且表示法唯一？写出唯一表达式。

七、（10 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4tx_1x_3-8x_2x_3$.

(1) 当t取何值时，该二次型正定？

(2) 取$t=1$，用正交变换法将f化成标准型，写出标准型及所用的正交变换

八、（10 分）设三维向量空间R^3有两个基，

(I) $\boldsymbol{\alpha_1} = [1 \quad 2 \quad 4]^T$，$\boldsymbol{\alpha_2} = [0 \quad -1 \quad 1]^T$，$\boldsymbol{\alpha_3} = [2 \quad 3 \quad 8]^T$

(II) $\boldsymbol{\beta_1} = [1 \quad 2 \quad 2]^T$，$\boldsymbol{\beta_2} = [0 \quad -1 \quad 1]^T$，$\boldsymbol{\beta_3} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵A.

(2) 设向量$\boldsymbol{\alpha}$在基(I)下的坐标为$\boldsymbol{x} = [-1 \quad 1 \quad 2]^T$，求向量$\boldsymbol{\alpha}$在基(II)下的坐标$\boldsymbol{y}$.

九、（5 分）设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $a_1\neq 0$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明 $\lambda = 0$是 $\boldsymbol{A}$ 的 n-1 重特征值.

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值以及 n 个线性无关的特征向量.