

# 西安交通大学考试题

成绩

课程 线性代数 B 卷

学院 \_\_\_\_\_ 考试日期 2023 年 11 月 19 日

专业班号 \_\_\_\_\_

姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 期中  期末

一、选择题（6 小题，每题 3 分，共计 18 分）

1. 设  $A$  为方阵，如果  $A^3 = O$ ，则 ( )

- A.  $E - A$  不可逆， $E + A$  不可逆      B.  $E - A$  不可逆， $E + A$  可逆  
C.  $E - A$  可逆， $E + A$  不可逆      D.  $E - A$  可逆， $E + A$  可逆

2023 年期末考试 A；

2. 设  $A, B$  为满足  $AB = O$  的任意两个非零矩阵，则下列说法正确的是 ( )

- A. 矩阵  $A$  的列向量组线性相关， $B$  的行向量组线性相关  
B. 矩阵  $A$  的列向量组线性相关， $B$  的列向量组线性相关  
C. 矩阵  $A$  的行向量组线性相关， $B$  的行向量组线性相关  
D. 矩阵  $A$  的行向量组线性相关， $B$  的列向量组线性相关

3. 设三阶矩阵  $A$  的特征值互不相同，且  $|A| = 0$ ，则  $R(A) = ( )$

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

4. 设有齐次线性方程组  $Ax = 0, Bx = 0$ ，其中  $A, B$  均为  $m \times n$  矩阵，则以下正确的是 ( )

- A. 若  $Ax = 0$  的解均是  $Bx = 0$  的解，则  $R(A) \leq R(B)$   
B. 若  $R(A) \geq R(B)$ ，则  $Ax = 0$  的解均是  $Bx = 0$  的解  
C. 若  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解，则  $R(A) = R(B)$   
D. 若  $R(A) = R(B)$ ，则  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解

5. 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为 0, 1, 2，则  $R(A+E) + R(A-E) = ( )$

- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

6. 设  $A, B, C$  是  $n$  阶方阵， $E$  是  $n$  阶单位阵，满足  $B = E + AB, C = A + CA$ ，则  $B - C = ( )$

- A.  $E$       B.  $-E$       C.  $A$       D.  $-A$

二、填空题（6 小题，每题 3 分，共计 18 分）

1. 设向量组  $\alpha_1 = [a+1 \ 1 \ 1]^T$ ， $\alpha_2 = [2 \ a+2 \ 2]^T$ ， $\alpha_3 = [3 \ 3 \ a+3]^T$  线性相关，则  $a =$  \_\_\_\_\_

2. 设  $a = [0 \ 2 \ -1]^T$ ， $b = [3 \ 1 \ -1]^T$ ， $c$  与  $a$  正交，且  $b = \lambda a + c$ ，则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_

3. 已知三阶矩阵的特征值为  $-1, 1, 2$ ， $E$  为三阶单位阵，则  $|-A^* + 2A - E| =$  \_\_\_\_\_

4. 序列  $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$  的逆序数为 \_\_\_\_\_

5. 二阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ , 那么  $A^{51} =$  \_\_\_\_\_

6. 三元非齐次线性方程组  $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 11x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$  的解为 \_\_\_\_\_

三、(9分) 设 3 阶方阵  $A$  和  $B$  满足  $A^{-1}BA = 6A + BA$ , 其中  $A = \text{diag}(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7})$ , 求  $B$ .

四、(9分) 求解如下齐次方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

五、(10分) 已知矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = (-2\mathbf{A})^*$ , 求  $\det(\mathbf{B})$

六、(10分) 求下列矩阵 $A$ 的列向量组的一个最大无关组, 并将其余列向量用所求最大无关组表示。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 9 \\ 1 & 4 & 16 & p \end{bmatrix}$$

- 七、(10分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4tx_1x_3$ .
- (1) 当  $t$  取何值时, 该二次型正定?
  - (2) 取  $t = 1$ , 用正交变换法将  $f$  化成标准型, 写出标准型及所用的正交变换

八、(10分) 已知线性方程组 
$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

- (1) 当 $a$ 为何值时有唯一解?
- (2) 当 $a$ 为何值时无解?
- (3) 当 $a$ 为何值时有无穷多解? 写出解的表达式。

九、(6分) 设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 2A - 3E = O$ , 证明  $R(A+E) + R(A-3E) = n$ .