西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数 A 卷　　课时：32　考试时间：2023 年 11 月 19 日

一、单选题

1. C；2. D;　3. B　4. D　5. C　6. D

二、填空题

1. 0 或-1；　2. $\frac{1}{3}$;　3. $-\frac{1}{4}$　4. 0 或者$-\sum_{i=1}^{4} a_i$　5. 4　6. $\frac{6}{7}$

三、系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{17}&\frac{13}{17}\\0&1&-\frac{19}{17}&\frac{20}{17}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，(3 分)

从而可得同解方程组$\begin{cases}x_1 \quad -\frac{3}{17}x_3+\frac{13}{17}x_4=0\\ x_2-\frac{19}{17}x_3+\frac{20}{17}x_4=0\end{cases}$，取$x_3$，$x_4$为自由未知量，

$\begin{cases}x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4\\ x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4\end{cases}$，(3 分)

因此通解可以表示为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}\frac{3}{17}\\\frac{19}{17}\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\frac{13}{17}\\-\frac{20}{17}\\0\\1\end{bmatrix}$. (3 分)

四、可检验矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行列式$|\boldsymbol{A}|=2$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，(2 分)

上式两边同时左乘 A^{-1}, 右乘以 A, 可得 $\boldsymbol{XA}^*\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=6\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$，由于 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，因此上式可化为 $2\boldsymbol{X}-8\boldsymbol{E}=6\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$，即（$2\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}^{-1}$）$\boldsymbol{X}=8\boldsymbol{E}$，设 $\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}^{-1}$，因此矩阵 $\boldsymbol{X}=8\boldsymbol{D}^{-1}$. (4 分)

由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-1&0&1&0\\-3&3/2&0&1/2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-4&0&0&0\\12&-4&0&0\\6&0&-4&0\\18&-9&0&-1\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&0&0&0\\-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{3}{8}&0&-\frac{1}{4}&0\\\frac{9}{4}&\frac{9}{4}&0&-1\end{bmatrix}$，因此 $\boldsymbol{X}=8\boldsymbol{D}^{-1}==\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\-6&-2&0&0\\-3&0&-2&0\\18&18&0&-8\end{bmatrix}$. (4 分)

五、对原行列式进行拆分，可得

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&1+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&1+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\dots&a_n^2\end{vmatrix}\quad (3\text{ 分})$$

第一部分按照最后一行展开可得，

$$D_n=D_{n-1}+a_n\begin{vmatrix}1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&1+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\dots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+a_n\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\dots&a_n\end{vmatrix}=D_{n-1}+a_n^2\ (4\text{ 分})$$

因此按照数学归纳法，$D_1=1+a_1^2$, $D_2=1+a_1^2+a_2^2,\cdots$ $D_n=1+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$. (3 分)

六、解：(1) $\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&1\\1&-3&2&-6&1\\1&5&a+4&10&b+1\\3&1&11&a&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&1\\0&-2&-1&-4&0\\0&0&a-2&0&b\\0&0&0&a-2&0\end{bmatrix}$，因此

当$a=2,b\neq 0$时，$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组A线性表示. (4 分)

(2) 当$a\neq 2,b$为任意数时，$\boldsymbol{\beta}$能由向量组A线性表示且表示法唯一。

$\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&1\\0&-2&-1&-4&0\\0&0&a-2&0&b\\0&0&0&a-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1-\frac{7b}{2(a-2)}\\0&1&0&0&-\frac{b}{2(a-2)}\\0&0&1&0&\frac{b}{(a-2)}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，(3 分)

因此$\begin{bmatrix}1\\1\\b+1\\3\end{bmatrix}=\left(1-\frac{7b}{2(a-2)}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\3\end{bmatrix}-\frac{b}{2(a-2)}\begin{bmatrix}-1\\-3\\5\\1\end{bmatrix}+\frac{b}{(a-2)}\begin{bmatrix}3\\2\\a+4\\11\end{bmatrix}$. (2 分)

七、（1）要使二次型对应的矩阵为$A=\begin{bmatrix}2&2&-2t\\2&5&-4\\-2t&-4&5\end{bmatrix}$正定，则$A$的各阶顺序主子式应大于 0。(2 分)

现已有$|2|>0,\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=6>0$，还需$\begin{vmatrix}2&2&-2t\\2&5&-4\\-2t&-4&5\end{vmatrix}=-20t^2+32t-2>0$，

即$\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\sqrt{6}<t<\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\sqrt{6}$. (2 分)

(2) 当 $t=1$ 时，$A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$，$\therefore\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$. (2 分)

对 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解 $(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求特征值，$\begin{bmatrix}1&2&-2&0\\2&4&-4&0\\-2&-4&4&0\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&2&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，取 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\4\\5\end{bmatrix}$. (2 分)

对 $\lambda_3=10$，解 $(A-10I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求特征值，$\begin{bmatrix}-8&2&-2&0\\2&-5&-4&0\\-2&-4&-5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac12&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

取 $\xi_3=\begin{bmatrix}-\frac13\\-\frac23\\\frac23\end{bmatrix}$。令 $P=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&-\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac23\end{bmatrix}$，则在正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 下可得标准型 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$. (2 分)

八、(1) 设 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]A$，

则过度矩阵 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}-3&0&2\\-2&1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}$. (5 分)

(2) $\boldsymbol{y}=A^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-3&0&2\\-2&1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$. (5 分)

九、(1) 由题知，$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，所以一定可以相似对角化，即存在可以矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，R($\boldsymbol{A}$)= R($\boldsymbol{\Lambda}$)

$\boldsymbol{A}=aa^T=\begin{bmatrix}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1a_n&a_2a_n&\dots&a_n^2\end{bmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\dots&a_n\end{bmatrix}\to$

$K\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}$，可见 R($\boldsymbol{\Lambda}$)=1，即 $\boldsymbol{\Lambda}$ 只有一个非零对角元，因此 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n-1 重特征值. (2 分)

(2) 由 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^n a_i^2$，可知 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 $\lambda_n=\sum_{i=1}^n a_i^2$.

$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时，$\boldsymbol{A}x=0$ 同解方程为 $\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}x=0$，可得对应的基础解系为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}-\frac{a_2}{a_1}\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\dots,\alpha_{n-1}=\begin{bmatrix}-\frac{a_n}{a_1}\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，即为线性无关的特征向量，

$\lambda_n=\sum_{i=1}^n a_i^2$ 时，$\boldsymbol{A}x=\lambda_n x$，根据题有 $\boldsymbol{A}=aa^T$，有 $\lambda_n=a^Ta$，即 $aa^Tx=a^Tax$，可验证当 $x=a$ 时 $\boldsymbol{A}x=\lambda_n x$ 成立，$\alpha_n=a$ 为特征值 λ_n 对应的特征向量，$[\alpha_1，\alpha_2，\dots，\alpha_n]$ 即为 n 个线性无关的特征向量. (3 分)