西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：线性代数B卷　课时：32　考试时间：2023年 11月19日

一、单选题（6小题，每题3分，共计18分）

1. D，2. A；3. C；4. C　5.D　6.A

二、填空题（6小题，每题3分，共计18分）

1. 0或-6；　2. $\frac{3}{5}$；　3. -60；　4. $\frac{n(n-1)}{2}$　5. $10^{25}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$　6. 无解

三、解：$|A|\neq 0$，矩阵A可逆

$A^{-1}BA=6A+BA$

$A^{-1}B=6E+B$

$B=6A+AB$

$(E-A)B=6A$（4分）

$E-A=\mathrm{diag}(\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{6}{7})$，显然矩阵E-A可逆

$(E-A)^{-1}=\mathrm{diag}(\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{7}{6})$（3分）

$B=6(E-A)^{-1}A=\mathrm{diag}(3,2,1)$（2分）

四、解：$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & -7\\3 & 1 & 2 & -7\\4 & 1 & -3 & 6\\1 & -2 & 5 & -5\end{bmatrix}$经初等行变换可得$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2}\\0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$（5分）

取x_4为自由未知数，可得

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_4\\x_2=\frac{7}{2}x_4\\x_3=\frac{5}{2}x_4\end{cases}$$ 即有通解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\1\end{bmatrix}$（c为任意常数）（4分）

五、解：经计算$|A|=1$行列式不为零，因此A可逆，并且有$A^*=|A|A^{-1}$（3分）

$(-2A)^*=|-2A|(-2A)^{-1}$

所以$(-2A)^*=(-2)^3|A|(-\frac{1}{2})A^{-1}=4A^{-1}$（4分）

$|B|=|(-2A)^*|=|4A^{-1}|=4^3\frac{1}{|A|}=64$（3分）

六、解：(1) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4 & 3\\1 & 3 & 9 & 9\\1 & 4 & 16 & p\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3 & 2\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & p-19\end{bmatrix}$，因此当$p=19$时，该向量组线性相关.（5分）

(2)取$p=19$，$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4 & 3\\1 & 3 & 9 & 9\\1 & 4 & 16 & 19\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\0 & 1 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，因此$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\4\\9\\16\end{bmatrix}$为该向量组的一个最大无关组，且$\begin{bmatrix}1\\3\\9\\19\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\4\\9\\16\end{bmatrix}$.（5分）

七、（1）要使二次型对应的矩阵为$A=\begin{bmatrix}6 & -2 & -2t\\-2 & 5 & 0\\-2t & 0 & 7\end{bmatrix}$正定，则$A$的各阶顺序主子式应大于0。现已有$|6|>0$，$\begin{vmatrix}6 & -2\\-2 & 5\end{vmatrix}=26>0$，还需$\begin{vmatrix}6 & -2 & -2t\\-2 & 5 & 0\\-2t & 0 & 7\end{vmatrix}=-20t^2+182>0$，即$-\sqrt{\frac{91}{10}}<t<\sqrt{\frac{91}{10}}$.（4分）

(2) 当$t=1$时，$A=\begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\-2 & 5 & 0\\-2 & 0 & 7\end{bmatrix}$，$\therefore \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}6-\lambda & -2 & -2\\-2 & 5-\lambda & 0\\-2 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$，得$\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9$.（3分）

对应的特征向量$\xi_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\xi_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix},\xi_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$.令$P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\2 & 2 & -1\\1 & -2 & -2\end{bmatrix}$，则在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下可得标准型$f(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$.（3分）

八、$\det(A)=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\1 & a & 1\\1 & 1 & a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$

(1) 当$a\neq -2$且$a\neq 1$时，方程有唯一解.

(2) 验证$a=1$时有解，验证当$a=-2$时，方程组无解.

(3) 当$a=1$时，方程组有无穷多解，通解为$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}c_2+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}c_3$，其中$c_2$，$c_3$任意实数。

九、$(A+E)(A-3E)=A^2-2A-3E=\mathbf{0}$

所以 $R(A+E)+R(A-3E)\leqslant n$（3分）

$A+E+A-3E=-2E$

所以 $R(A+E)+R(A-3E)\geqslant R(-2E)=n$

所以 $R(A+E)+R(A-3E)=n$（3分）