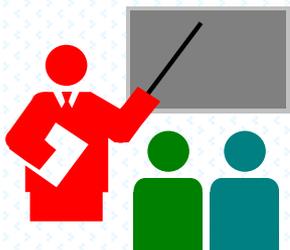


# 第二章

## 确定信号分析





## 确定信号分析

- 信号的正交展开及频谱分析
- 能量信号与功率信号
- 相关函数和功率谱密度函数
- 窄带系统及窄带信号分析
- 复数信号与时域希尔伯特 (*Hilbert*) 变换

## 2.1 信号的正交展开及频谱分析

### 2.1.1 信号的正交展开

### 2.1.2 信号的频谱分析

## 2.1.1 信号的正交展开

正交展开：若  $x(t)$  在区间  $(t_0, t_0 + T)$  内是分段连续的，则可以用该区间内的正交函数系（集） $\{u_k(t)\} = \{u_0(t), u_1(t), \dots\}$  中的各分量来表示该信号。

即

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(t)$$

正交函数系：指  $\{u_k(t)\}$  在  $(t_0, t_0 + T)$  上满足下式

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_k(t) u_l(t) dt = \begin{cases} C \neq 0, & \text{当 } k=l \\ 0, & \text{当 } k \neq l \end{cases}$$

上式中，当  $C=1$  时，称  $\{u_k(t)\}$  为标准正交函数系。

## 2.1.1 信号的正交展开

系数  $a_k$  的求解

由下式两边乘  $u_l(t)$  后求积分

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(t)$$

可得下式:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)u_l(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(t)u_l(t)dt = \begin{cases} a_k C, & \text{当 } k=l \\ 0, & \text{当 } k \neq l \end{cases}$$

$$\therefore a_k = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)u_k(t)dt$$

## 2.1.1 信号的正交展开

对标准正交函数系

$$a_k = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)u_k(t)dt$$

$x(t)$  展开式中, 若取有限项, 则会带来误差  $Q$ , 且恒有  $Q \geq 0$ 。

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{k=0}^N a_k u_k(t)$$

$$Q = \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t) - \hat{x}_N(t)]^2 dt$$

## 2.1.1 信号的正交展开

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ x(t) - \sum_{k=0}^N a_k u_k(t) \right]^2 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt - 2 \sum_{k=0}^N a_k^2 + \sum_{k=0}^N a_k^2 \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt - \sum_{k=0}^N a_k^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt \geq \sum_{k=0}^N a_k^2 \quad \text{----- 贝塞尔不等式}$$

## 2.1.1 信号的正交展开

贝塞尔不等式说明任何函数正交展开式中的系数的平方和总是收敛的。

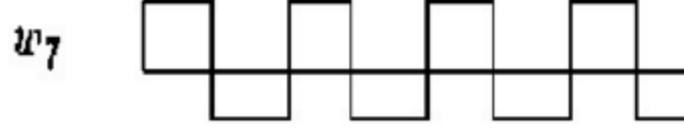
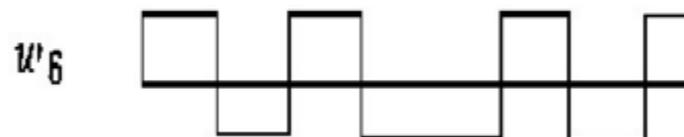
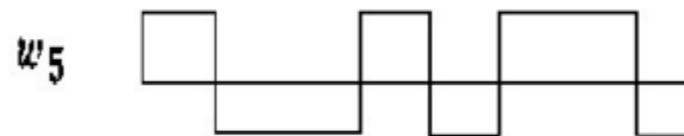
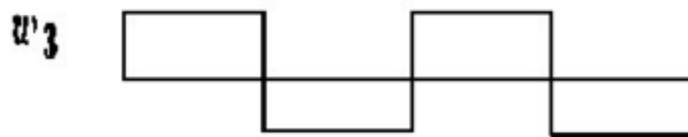
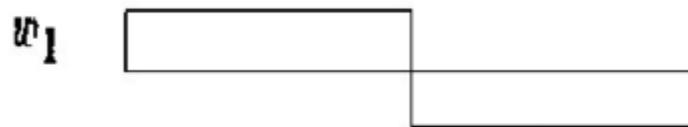
显然， $N$ 增大时， $\sum_{k=0}^N a_k^2$  是单调增大的，当 $N$ 足够大时，可使下式成立

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{-----Rayleigh-Parseval定理}$$

此时，称  $\{u_k(t)\}$  为完备正交函数系。

**完备的含义：**指用  $\{u_k(t)\}$  来展开  $x(t)$  时，不需要用不属于  $\{u_k(t)\}$  的函数来补充参加  $x(t)$  的精确展开，其本身是完备的。

**完备正交函数系的类型：**三角函数系、复指数函数系、Walsh函数系等



## Walsh函数系

## 2.1.2 信号的频谱分析

信号的频谱分析（傅里叶分析）是分析确定信号的基本方法。

对周期信号  $x(t)$ ，有傅里叶级数展开式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

----- 傅立叶级数复系数

对非周期信号  $x(t)$ ，有傅里叶积分式

$$X(\omega) = \mathfrak{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

----- 频谱密度函数

## 2.1.2 信号的频谱分析

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1} [X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{----- 原函数}$$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad \text{----傅里叶变换对}$$

引入冲激函数后，也可以得到周期函数的频谱密度函数为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathfrak{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (2-1)$$

## 2.1.2 信号的频谱分析

周期信号频谱密度函数的简便求法

第一步：求截断信号  $x_T(t)$  的频谱密度函数

$$X_T(\omega) = \mathfrak{F}[x_T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

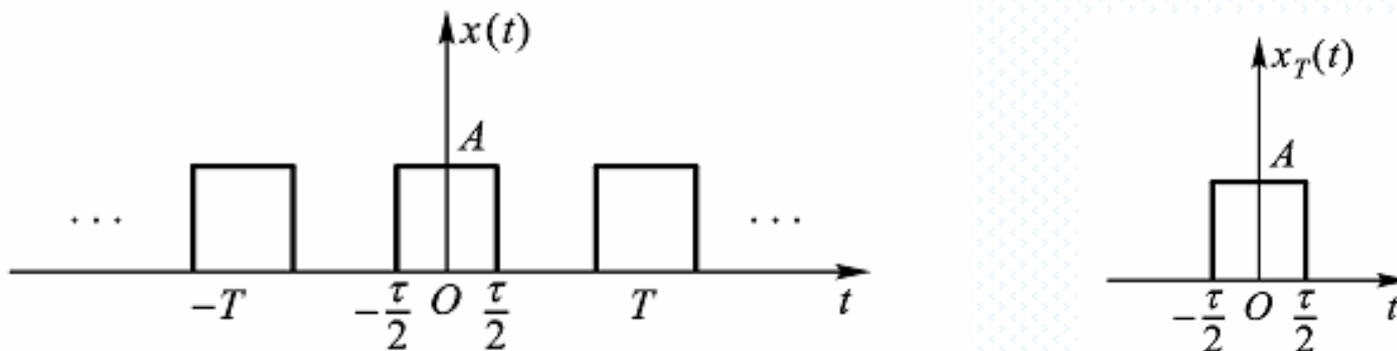
第二步：周期延拓  $X_T(\omega)$  得到频谱密度函数  $X(\omega)$ 。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\pi}{T} X_T(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (2-2)$$

比较式 (2-1) (2-2)，可得： $c_n = \frac{1}{T} X_T(n\omega_0)$

## 2.1.2 信号的频谱分析

例2.1 设周期矩形信号  $x(t)$  如图所示，试求其频谱密度函数  $X(\omega)$ 。



解：设  $x_T(t)$  为  $x(t)$  在一个周期内的截断信号，如图所示。

则有：
$$X_T(\omega) = \mathcal{F}[x_T(t)] = A\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

## 2.1.2 信号的频谱分析

则,由式(2-2)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\pi}{T} X_T(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

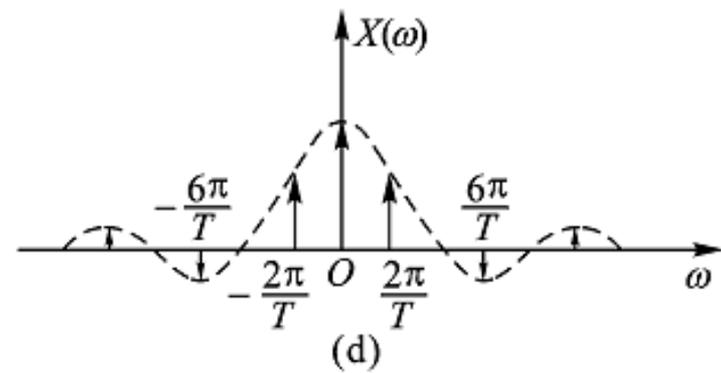
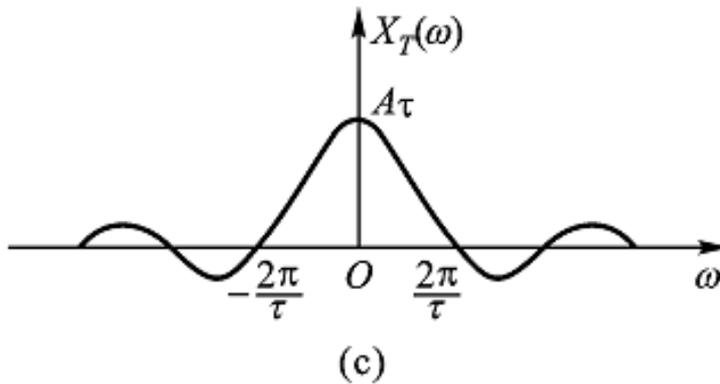
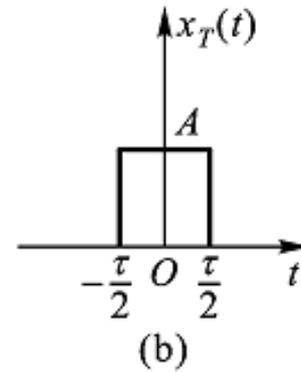
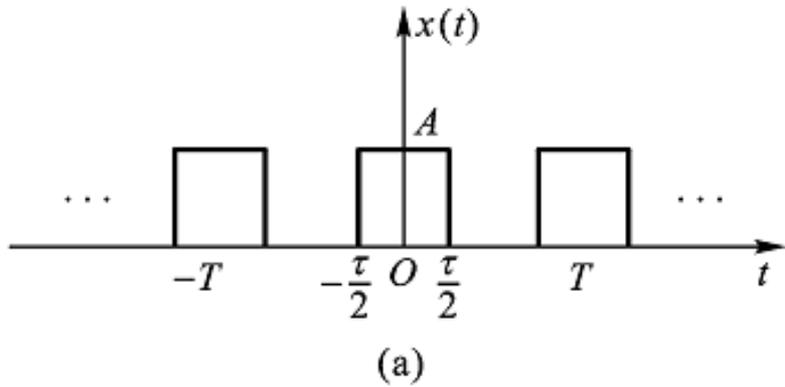
得:

$$X(\omega) = \frac{2\pi A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

最后有:

$$X(\omega) = \pi A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$

## 2.1.2 信号的频谱分析



## 2.2 能量信号和功率信号

2.2.1 能量信号及能量谱密度函数

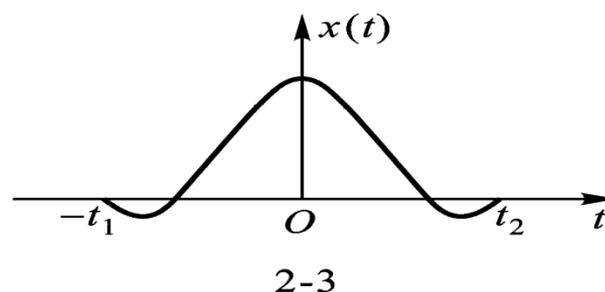
2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

## 2.2.1 能量信号及能量谱密度函数

### 能量信号

定义：满足  $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$ ，则称  $x(t)$  为能量信号。

一般在时域内有始有终的非周期信号为能量信号



能量信号的平均功率为零，即 
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{T} = 0$$

对能量信号，可用其频谱密度函数及能量谱密度函数来描述。

## 2.2.1 能量信号及能量谱密度函数

### 频谱密度函数

$$X(\omega) = \mathfrak{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

### 能量谱密度函数

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega t)} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega \end{aligned}$$

能量谱密度函数

## 2.2.1 能量信号及能量谱密度函数

上式重新写为：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$$

-----能量信号的帕斯瓦尔 (Parseval) 定理

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} G(f) df$$

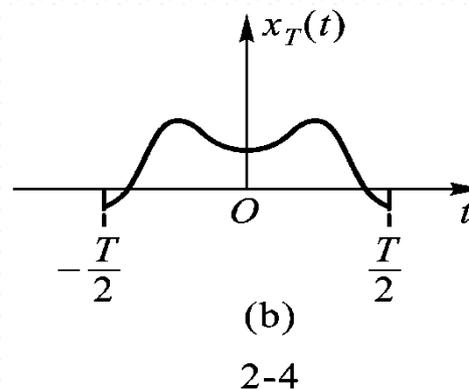
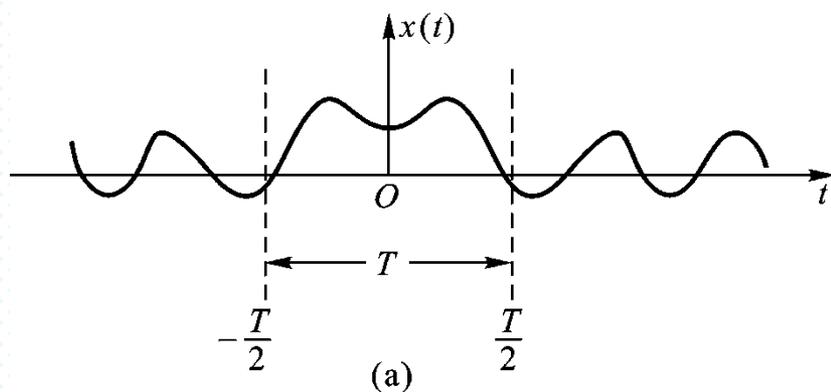
能量谱密度函数表示了单位频带上的信号能量，表明了信号的能量沿频率轴的分布情况。

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

### 功率信号

定义：总能量无限，但平均功率有限的信号称为功率信号。

$$\text{满足 } E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \infty$$



功率信号平均功率为：

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt$$

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

周期信号是典型的功率信号。

周期信号的平均功率为：

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \int_{-\frac{nT_0}{2}}^{\frac{nT_0}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt$$

对功率信号可用其**功率谱密度函数**来描述。

### ● 功率谱密度函数

对功率信号的截断信号，应用能量信号的帕斯瓦尔定理，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega$$

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega \end{aligned}$$

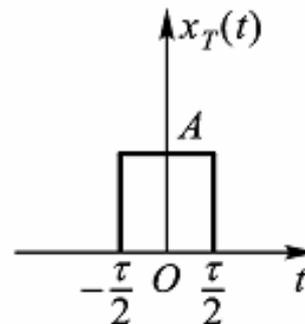
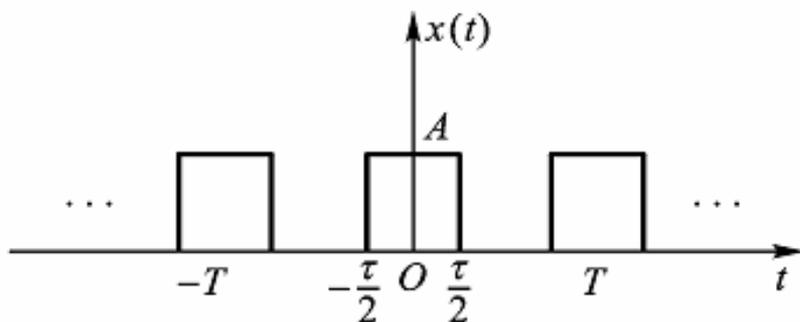
称  $P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$  为功率信号的功率谱密度函数。

功率谱密度函数表示了单位频带上的信号功率，表明了信号的功率沿频率轴的分布情况。

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} P(f) df$$

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

### 周期信号功率谱密度函数



$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}(\cdot)$$

$$\text{rect}(\cdot) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它 } t \end{cases} \quad \text{---- 矩形窗函数}$$

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

由频域卷积定理，有：

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \{X(\omega) * \mathfrak{F}[\text{rect}(\cdot)]\}$$

其中：  $\mathfrak{F}[\text{rect}(\cdot)] = T \text{Sa}(\omega T/2)$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{----- 周期信号频谱密度函数}$$

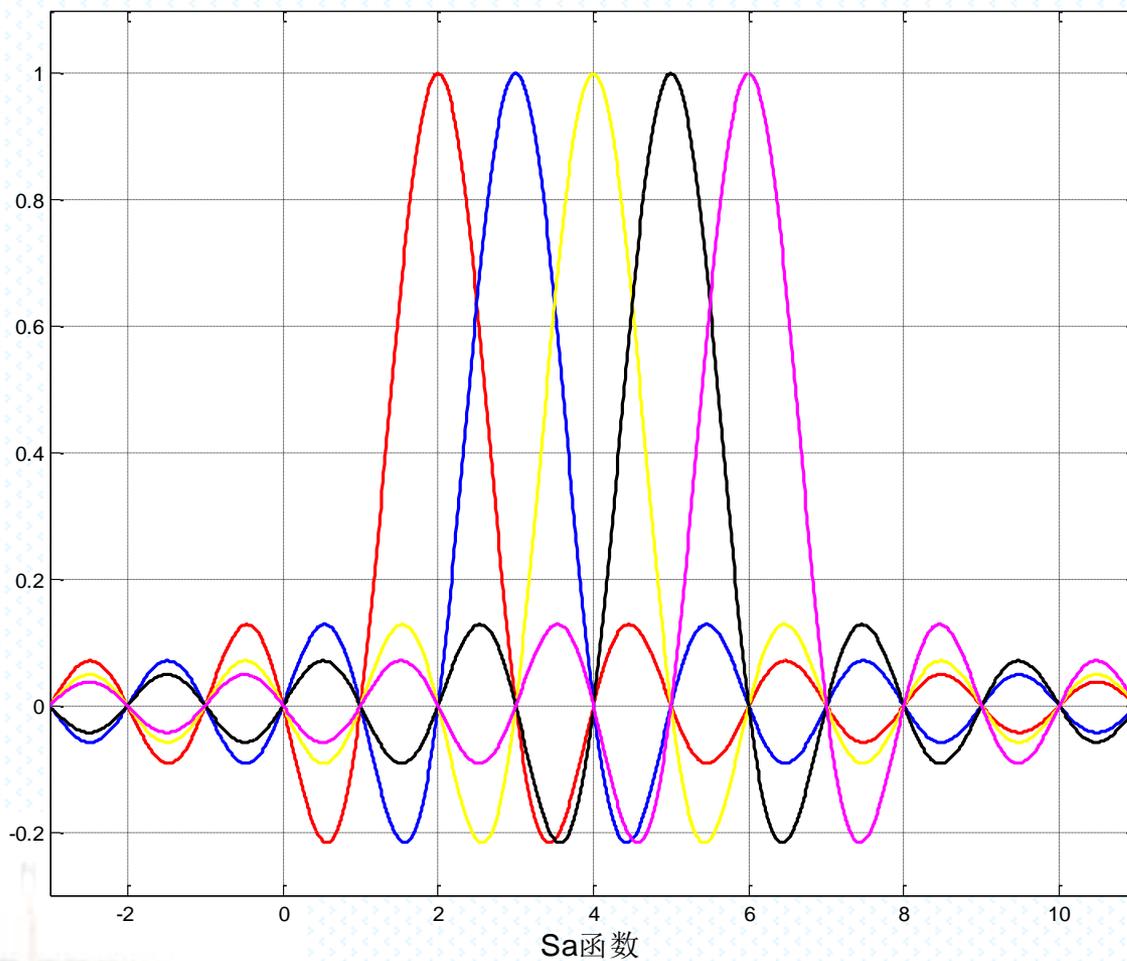
$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{----- 周期信号傅里叶级数复系数}$$

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

故:

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0) * T \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \text{Sa}\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |X_T(\omega)|^2 &= X_T(\omega) \cdot X_T^*(\omega) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} T^2 C_n C_m^* \text{Sa}\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right] \text{Sa}\left[\frac{(\omega - m\omega_0)T}{2}\right] \end{aligned}$$



## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

由于

$$\text{Sa}\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right] \text{Sa}\left[\frac{(\omega - m\omega_0)T}{2}\right] = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right] & , n = m \end{cases}$$

得:

$$|X_T(\omega)|^2 = T^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right]$$

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{Sa}^2\left[\frac{(\omega - n\omega_0)T}{2}\right]$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\pi} \text{Sa}^2(Kx) = \delta(x)$$

## 2.2.2 功率信号及功率谱密度函数

最后，得周期信号功率谱密度函数为：

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

周期信号功率为：

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \end{aligned}$$

-----功率信号的帕斯瓦尔 (Parseval) 定理

## 2.3 相关函数和功率谱密度函数

2.3.1 能量信号的相关函数

2.3.2 能量信号的相关定理

2.3.3 功率信号的相关函数

## 2.3.1 能量信号的相关函数

### 相关的含义

描述两个波形（或一个波形）在间隔一定时间上的相似性，常用相关函数来描述。

### 能量信号的相关函数

设信号  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  为能量信号，定义下式为它们的互相关函数。

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt$$

当  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$  时，则定义下式为  $x(t)$  的自相关函数。

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

## 2.3.1 能量信号的相关函数

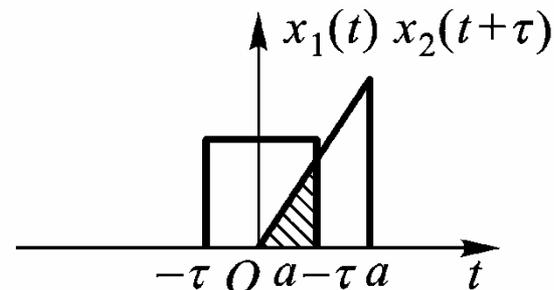
例2.2 求图示两信号的互相关函数。



解: 
$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt$$

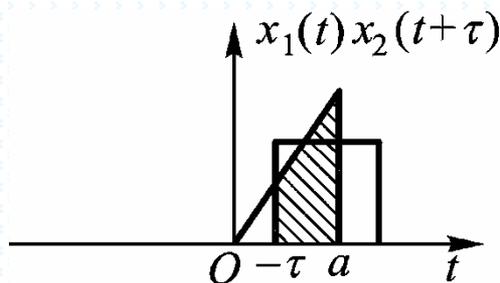
$$\tau > 0$$

$$R_{12}(\tau) = \int_0^{a-\tau} \frac{Q}{a} t \cdot 1 dt = \frac{Q}{2a} (a - \tau)^2 \quad 0 \leq \tau \leq a$$

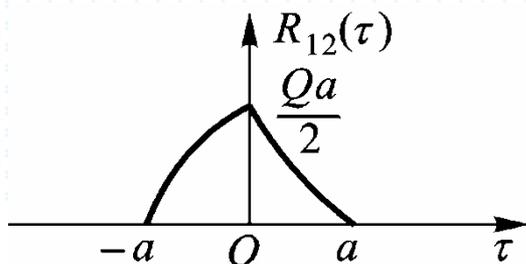


## 2.3.1 能量信号的相关函数

$\tau < 0$



$$R_{12}(\tau) = \int_{-\tau}^a \frac{Q}{a} t \cdot 1 dt = \frac{Q}{2a} (a^2 - \tau^2) \quad -a \leq \tau \leq 0$$

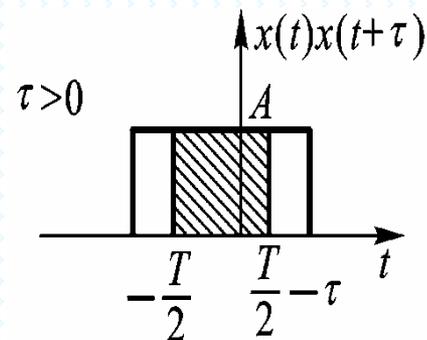
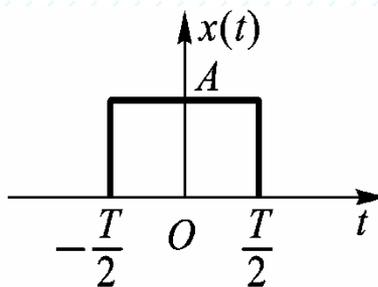


## 2.3.1 能量信号的相关函数

例2.3 求图示信号自相关函数。

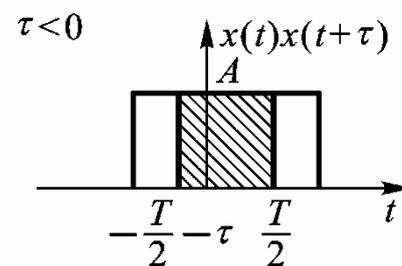
解：

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它}t \end{cases}$$

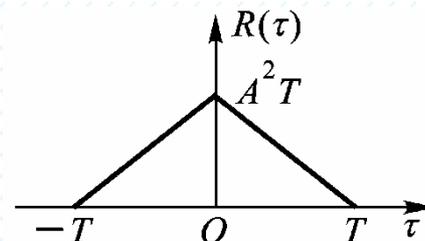


$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$$

$$0 \leq \tau \leq T \quad R(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} A^2 dt = A^2(T - \tau)$$



$$-T \leq \tau \leq 0 \quad R(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2(T + \tau)$$



## 2.3.1 能量信号的相关函数

相关函数积分与卷积积分的区别 (一)

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(\tau - t) dt$$

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt$$

(1) 卷积积分是无序的，相关积分是有序的。

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = x_2(\tau) * x_1(\tau)$$

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$

(2) 对同一时间位移值，卷积积分和相关积分中位移函数的移动方向是相反的。

## 2.3.1 能量信号的相关函数

### 相关函数积分与卷积积分的区别 (二)

(3) 卷积是求解信号通过线性系统输出的方法，相关是信号检测和提取的方法。

(4) 若系统的冲激响应  $h(t) = x(-t)$ ，则系统的输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) d\tau = R(-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = R(t) \end{aligned}$$

即，冲激响应为输入信号镜像函数的线性系统输出为输入信号的自相关函数。

## 2.3.1 能量信号的相关函数

### 自相关函数的性质

(1) 自相关函数是偶函数，即

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

$$(2) \quad E = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt \Big|_{\tau=0} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

(3)  $\tau = 0$  时，自相关函数值最大，即

$$R(0) \geq |R(\tau)|$$

## 2.3.2 能量信号的相关定理

定理内容：能量信号在时域内相关，对应频域内为一个信号频谱的共轭与另一信号的频谱相乘。即

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow X_1^*(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

证明：

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[R_{12}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{j\omega t} dt \cdot x_2(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} d(t+\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{j\omega t} dt \cdot X_2(\omega) = X_1(-\omega) \cdot X_2(\omega) \\ &= X_1^*(\omega) \cdot X_2(\omega)\end{aligned}$$

## 2.3.2 能量信号的相关定理

若有  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$

则有以下关系：

$$\mathfrak{F}[R(\tau)] = X^*(\omega) \cdot X(\omega) = |X(\omega)|^2 = G(\omega)$$

即  $R(\tau) \leftrightarrow |X(\omega)|^2 = G(\omega)$  ← 能量谱密度函数

能量信号的自相关函数和能量谱密度函数  
是一对傅里叶变换。

## 2.3.3 功率信号的相关函数

### 功率信号的互相关函数

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

### 功率信号的自相关函数

当  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$

### 周期信号的自相关函数

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$

## 2.3.3 功率信号的相关函数

自相关函数与功率谱密度的关系为： $R(\tau) \leftrightarrow P(\omega)$

其中： $P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$  为功率谱密度函数。

证明：

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T^*(\omega) \cdot X_T(\omega) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{j\omega t} dt \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t') e^{-j\omega t'} dt' \end{aligned}$$

令  $t' = t + \tau$

## 2.3.3 功率信号的相关函数

证明 (续) :

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{j\omega t} dt \cdot \int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t} x(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t+\tau) dt \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathfrak{F}[R(\tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

## 2.3.3 功率信号的相关函数

**例2.4** 试求周期信号  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$  的功率谱。

**解：方法1** 利用信号的傅里叶级数展开式求功率谱。

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{式 (2.4)}$$

由于

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2} \left[ e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right] \\ &= \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

-----周期信号傅里叶级数展开式

故有： $C_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}$ ， $C_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\theta}$

## 2.3.3 功率信号的相关函数

利用式 (2.4), 有

$$\begin{aligned} P(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 2\pi \left(\frac{A}{2}\right)^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

## 2.3.3 功率信号的相关函数

**方法2** 利用相关函数求功率谱。周期信号的周期  $T_0 = 2\pi/\omega_0$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} [\cos \omega_0 \tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta)] dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau dt + \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$

## 2.3.3 功率信号的相关函数

即

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

故有：

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

可见，两种方法得到的结果是相同的。



## 2.4 窄带系统及窄带信号分析

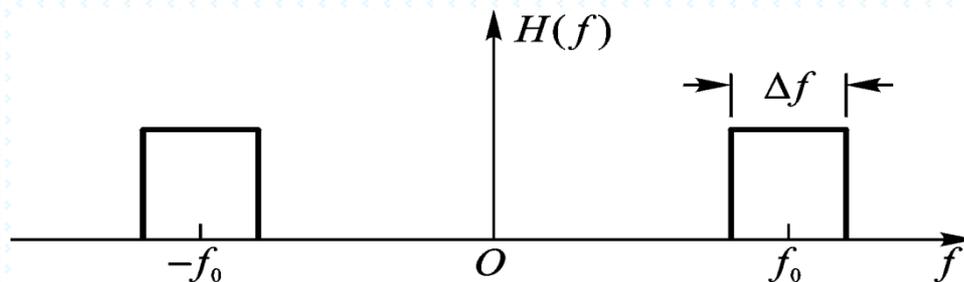
2.4.1 一般方法---傅里叶反变换法

2.4.2 解析法----等效低通网络函数法

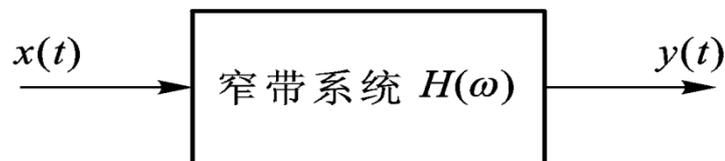


## 2.4 窄带系统及窄带信号分析

窄带系统：带宽远小于中心频率的系统，即满足  $\Delta f \ll f_0$



(a)



(b)

2-7

## 2.4 窄带系统及窄带信号分析

窄带系统的输出为：

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{-----时域方法}$$

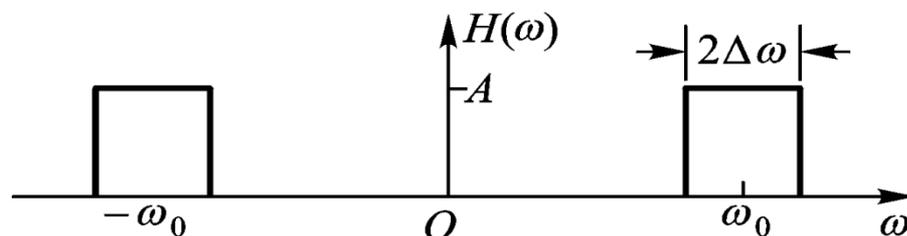
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{-----频域方法} \end{aligned}$$

窄带系统输出信号的频谱密度函数具有窄带性质，故输出信号为窄带信号。

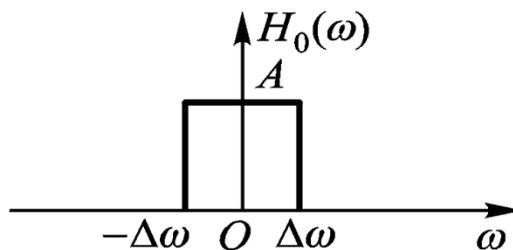
传输函数  $H(\omega)$    $h(t)$  冲激响应

## 2.4.1 一般方法---傅里叶反变换法

例2.5 已知窄带系统的传输函数如图所示，试求系统的冲激响应。



(a)



(b)

2-8

## 2.4.1 一般方法---傅里叶反变换法

解：

$$H(\omega) = \begin{cases} A & \omega_0 - \Delta\omega \leq |\omega| \leq \omega_0 + \Delta\omega \\ 0 & \text{其他 } \omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathfrak{F}^{-1} [H(\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} A e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{2A\Delta\omega}{\pi} \text{Sa}(\Delta\omega t) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

## 2.4.2 解析法----等效低通网络函数法

例2.6 试用解析法，求解例2.5中的窄带系统的冲激响应。

解： 
$$H_0(\omega) = \begin{cases} A, & -\Delta\omega \leq \omega \leq \Delta\omega \\ 0, & \text{其他}\omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[H_0(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} A e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{A\Delta\omega}{\pi} \text{Sa}(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

故有： 
$$h(t) = \frac{2A\Delta\omega}{\pi} \text{Sa}(\Delta\omega t) \cdot \cos \omega_0 t$$
 与例2.5结果相同。

定义：信号的能量或功率的主要部分集中的正频率范围

1. 绝对带宽
2. 3dB带宽（半功率带宽）
3. 零点带宽
4. 等效矩形带宽

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df / 2G(0)$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)df / 2P(0)$$

5. 能量或功率百分比带宽

$$2 \int_0^B G(f)df / E = 0.9 \quad (0.95, 0.99)$$

## 2.5 复数信号与时域希尔伯特 (*Hilbert*) 变换

### 2.5.1 复数信号的定义

### 2.5.2 复数信号的实部与虚部及希尔伯特变换



## 2.5 复数信号与时域希尔伯特变换

为什么引入复信号？

有时直接分析实时间信号会遇到不少困难，如

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

采用复数信号的处理方法，即把实时间信号变成复数信号来分析，从而达到分析实时间信号的目的，会使问题简化。

如： $x(t) = \cos \omega_0 t$

复数信号为： $\xi(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$  ← 旋转矢量

$$x(t) = \operatorname{Re}[\xi(t)] = \operatorname{Re}[e^{j\omega_0 t}] = \cos \omega_0 t$$

## 2.5.1 复数信号的定义

时域希尔伯特变换

对实信号  $x(t)$ ，定义复数信号为：

$$\xi(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$x(t) = \text{Re}[\xi(t)]$$

$x(t)$  与  $\hat{x}(t)$  之间满足时域希尔伯特变换 (Hilbert) 关系。

$\xi(t)$  的频谱呈现单边谱特性

$$G_{\xi}(\omega) = \begin{cases} G_x(\omega)U(\omega) & , \quad \omega > 0 \\ 0 & , \quad \omega < 0 \end{cases}$$

$$\xi(t) \leftrightarrow G_{\xi}(\omega)$$

## 2.5.1 复数信号的定义

### 频域希尔伯特变换

对满足因果关系的物理可实现网络，有

$$H(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

$$h(t) = \begin{cases} h(t)U(t) & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$R(\omega)$  与  $I(\omega)$  满足频域希尔伯特变换关系。

$\xi(t)$  的频谱应由  $x(t)$  的频谱密度函数唯一确定

## 2.5.1 复数信号的定义

由于：

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* \\&= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]\end{aligned}$$

且：

$$x(t) = \operatorname{Re} [\xi(t)] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

故有：

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

## 2.5.1 复数信号的定义

即: 
$$G_{\xi}(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

或 
$$G_{\xi}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)$$

复信号的频谱等于实时间信号单边谱的2倍



## 2.5.2 复数信号实部与虚部及希尔伯特变换

由复信号单边谱特性可以导出复数信号的实部和虚部的关系——希尔伯特变换对。

$$\xi(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \xrightarrow{\text{傅氏变换}} G_{\xi}(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega)$$

为同时满足上式及复信号单边谱特性，下列关系应成立：

$$\left[ G_{\xi}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega) \quad \text{--- 单边谱特性} \right]$$

$$\begin{cases} \hat{X}(\omega) = -jX(\omega) = X(\omega)/j, & \omega > 0 \\ \hat{X}(\omega) = jX(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

## 2.5.2 复数信号实部与虚部及希尔伯特变换

则可得到

$$\hat{X}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega)$$

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega > 0 \\ -1 & , \quad \omega < 0 \end{cases}$$

$\hat{X}(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 的关系是唯一确定的。

由上看出， $\hat{x}(t)$ 相当于  $x(t)$  通过一个网络（希尔伯特滤波器）后得到，网络的传输函数为

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

## 2.5.2 复数信号实部与虚部及希尔伯特变换

相应地：
$$h(t) = \mathfrak{I}^{-1}[H(\omega)] = \mathfrak{I}^{-1}[-j \operatorname{sgn}(\omega)]$$

由于 
$$\mathfrak{I}^{-1}[\operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{j}{\pi t}$$

故 
$$h(t) = -j \cdot \frac{j}{\pi t} = \frac{1}{\pi t}$$

$$\hat{x}(t) = x(t) * \left( \frac{1}{\pi t} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad \text{--- 希尔伯特变换}$$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad \text{--- 希尔伯特反变换}$$

希尔伯特变换对

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{H}} \hat{x}(t)$$

## 2.5.2 复数信号实部与虚部及希尔伯特变换

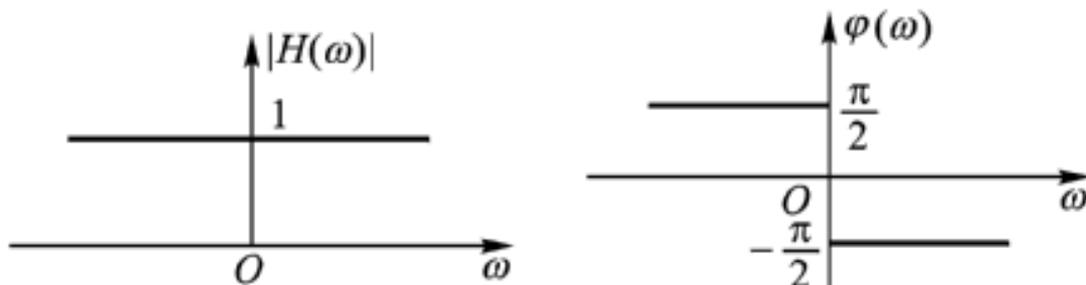
### 希尔伯特滤波器的传输特性

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

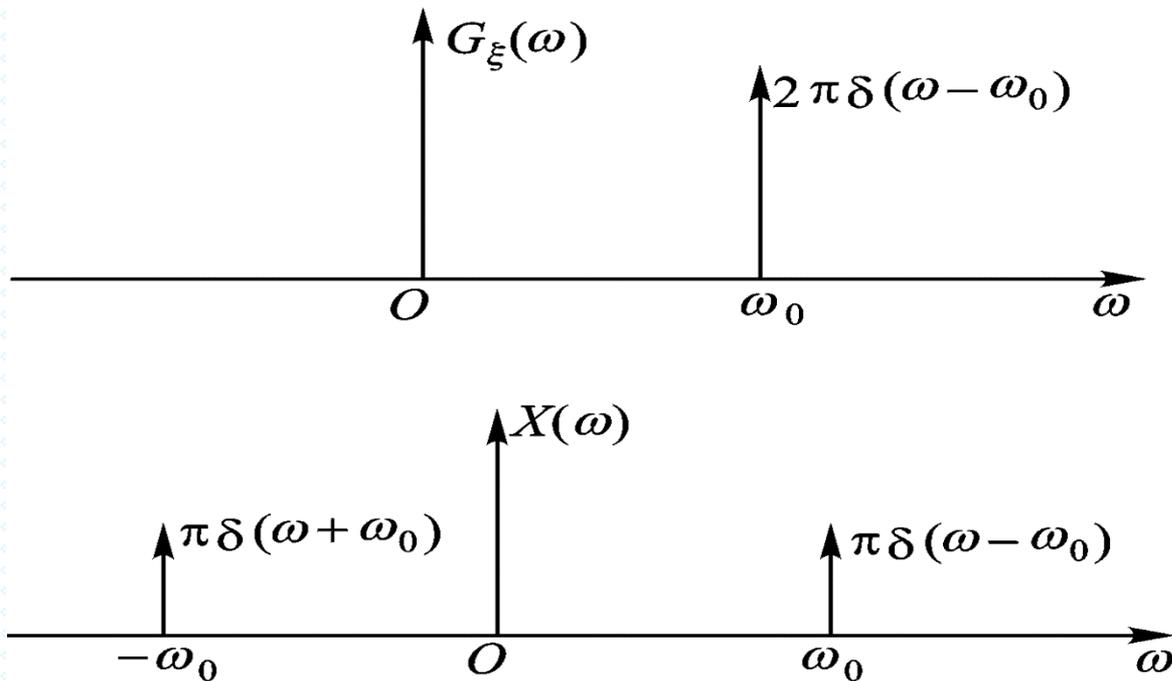
幅频特性：全通网络（幅频特性为1）

相频特性：正频率范围内相移  $-\frac{\pi}{2}$ ，负频率范围内相移  $\frac{\pi}{2}$ 。

故希尔伯特滤波器也称为  $-\frac{\pi}{2}$  相移网络，传输特性如下图。



## 2.5.3 实时间信号的复指数表示和解析信号表示



复数信号频谱

实信号频谱

2-10

## 2.5.3 实时间信号的复指数表示和解析信号表示

实信号复数化的两种表示方法：复指数形式、解析信号形式

以调幅---调相信号为例  $x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$

复指数形式  $\xi(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j\omega_0 t} = a(t)e^{j\omega_0 t}$

$$x(t) = \text{Re}[\xi(t)] = \text{Re}[a(t) \cdot e^{j\omega_0 t}]$$

式中， $a(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$  是复信号的复数包络线。

解析信号的形式

$$\xi(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

或

$$G_\xi(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)$$

## 2.5.3 实时间信号的复指数表示和解析信号表示

“复指数形式”与“解析信号形式”的统一

皮杜相 (Bedrosian) 条件 (B条件)

$$G_a(\omega) = \begin{cases} G_a(\omega) & , \quad |\omega| < \omega_0 \\ 0 & , \quad |\omega| \geq \omega_0 \end{cases}$$

复数包络线具有  
低通型频谱特性

当满足 B 条件时, 则由  $\xi(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \cdot e^{j\omega_0 t} = a(t)e^{j\omega_0 t}$

可得:  $G_\xi(\omega) = G_a(\omega - \omega_0)$  必定只在正频域存在。

在 B 条件下, 复数信号的复指数形式必为解析信号。

## 2.5.3 实时间信号的复指数表示和解析信号表示

在已知  $G_\xi(\omega)$  时，如何得到实信号的频谱  $X(\omega)$  ?

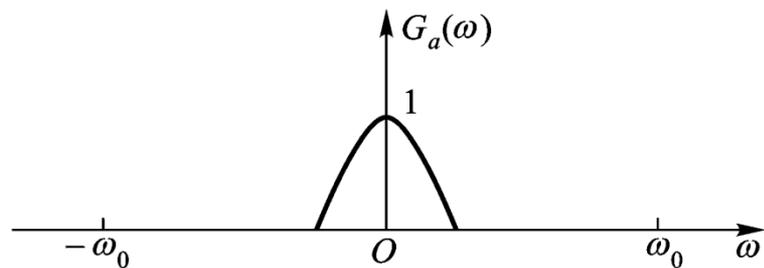
在满足B条件时

$$\begin{aligned}x(t) &= A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \\ &= \text{Re}[a(t)e^{j\omega_0 t}] = \text{Re}[\xi(t)] = \frac{1}{2}[\xi(t) + \xi^*(t)]\end{aligned}$$

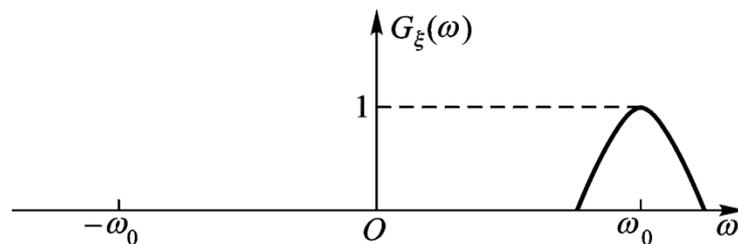
由于  $\xi(t) \longleftrightarrow G_\xi(\omega)$       且  $G_\xi(\omega) = G_a(\omega - \omega_0)$   
 $\xi^*(t) \longleftrightarrow G_\xi^*(-\omega)$

故  $X(\omega) = \frac{1}{2}[G_\xi(\omega) + G_\xi^*(-\omega)] = \frac{1}{2}[G_a(\omega - \omega_0) + G_a^*(-\omega - \omega_0)]$

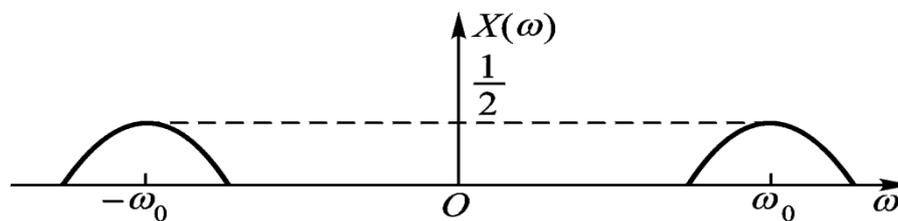
## 2.5.3 实时间信号的复指数表示和解析信号表示



(a)



(b)



(c)

2-11

利用复数包络线的频谱计算实信号频谱的方法

## 2.5.4 窄带实时间信号自相关函数的复数化求解

能量信号自相关函数  $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$

定义复数化信号自相关函数为： $R_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^*(t)\xi(t+\tau)dt$

由于  $\xi(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$        $\xi^*(t) = x(t) - j\hat{x}(t)$

故有

$$\begin{aligned} R_{\xi}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - j\hat{x}(t)][x(t+\tau) + j\hat{x}(t+\tau)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)x(t+\tau) + \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)] dt \\ &\quad + j \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)\hat{x}(t+\tau) - \hat{x}(t)x(t+\tau)] dt \end{aligned}$$

## 2.5.4窄带实时间信号自相关函数的复数化求解

由能量信号的相关定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \leftrightarrow |X(\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)dt \leftrightarrow |\hat{X}(\omega)|^2$$

由于  $\hat{X}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega)$

故  $| \hat{X}(\omega) |^2 = | -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega) |^2 = | X(\omega) |^2$

因而有  $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \operatorname{Re} [ R_{\xi}(\tau) ]$

## 第二章基本要求

- 掌握信号正交展开方法及傅氏分析；
- 理解能量信号、功率信号、能量谱和功率谱概念；
- 自相关函数和互相关函数的计算方法；
- 掌握能量谱、功率谱与自相关函数的关系
- 理解复数信号及 *Hilbert* 变换的概念。

本章习题：2-4、2-6、2-11、  
2-14(c)(e)、2-18、2-22

