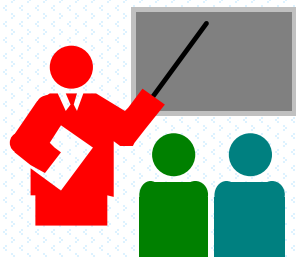


第三章

随机信号和噪声分析



随机信号和噪声分析

- 随机过程的基本概念
- 随机过程的统计描述
- 平稳随机过程
- 平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度的关系
- 两个随机过程之间的统计联系
- 正态随机过程
- 平稳随机过程通过线性系统
- 白噪声、散弹噪声和热噪声
- 白色随机过程通过窄带线性系统----窄带噪声
- 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

3.1 随机过程的基本概念

随机信号：具有随机特性（某个参数或几个参数不能
预知或不能完全预知）的信号。

确定信号是随机信号的一种特定形式。

随机信号种类：包含信息的信号、各种干扰（人为干扰、
天电干扰）、噪声（热噪声、散弹噪声）

随机信号和噪声分析方法：统计学随机过程理论

3.1 随机过程的基本概念



简单地说，随机过程是一种取值随机变化的时间函数，它不能用确切的时间函数来表示。

随机过程两层含意：

“随机”（指取值不确定，仅有取某个值的可能性）；

“过程”（为时间的函数）。

随机过程是随时间变化的随机变量的集合，在任意时刻考察随机过程的值是一个随机变量。

随机过程是一个由全部可能的实现（或样本函数）构成的集合，每个实现都是一个确定的时间函数，而随机性就体现在出现哪一个实现是不确定的。用 $X(t)$ 或 $\{x(t)\}$ 表示。

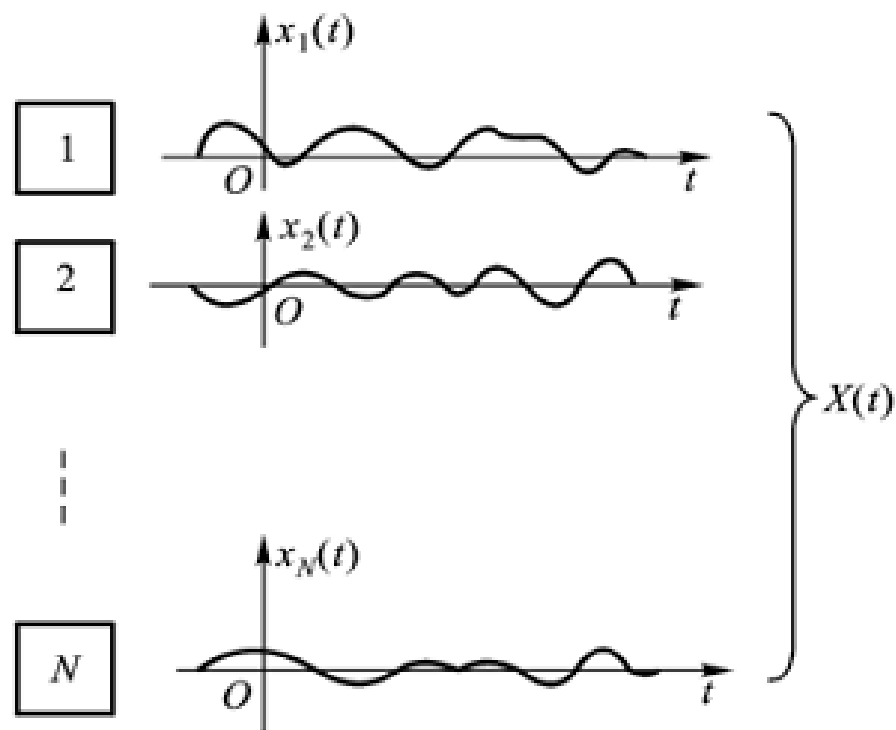
3.1 随机过程的基本概念



数学上可用随机实验和样本空间的概念定义随机过程：设进行某一随机实验 E ， $S = \{e\}$ 是它的样本空间。如果对每一个样本 $e (e \in S)$ 来说，总可以按某一规则确定一个时间函数 $X(e, t)$ 与之对应，那么，对所有的样本，就得到一簇时间函数，并称此簇时间函数为随机过程，其中每个时间函数称为该随机过程的样本函数。

典型随机过程---接收机噪声

3.1 随机过程的基本概念



典型随机过程---噪声

3.1 随机过程的基本概念

归纳起来，随机过程具有如下特性：

(1) 取值的随机性；

$X(t_1)$ 是一个随机变量（在 t_1 时刻观察随机过程的值）

(2) 样本的确定性。

随机过程的某一个样本函数 $x_i(t)$ 为时间的确定函数。

举例： $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$ 为随机过程。

其中， A 为常数， Θ 为 $[0, 2\pi]$ 内均匀分布的随机变量。

3.1 随机过程的基本概念



(1) 取值的随机性

$t_1 = 0$ 时,

$X(t_1) = A \cos \Theta$ 是一个随机变量;

(2) 样本的确定性

$\Theta_1 = 0$ 时,

$x_1(t) = A \cos \omega_0 t$ 为时间的确定函数。

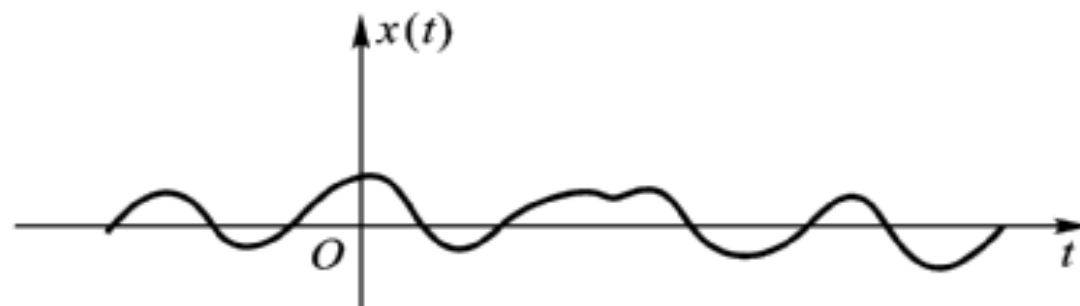
3.1 随机过程的基本概念

随机过程的实际定义：

随机过程包含有空间与时间双重概念。它一方面是各次实现的集合（并列的空间概念），另一方面又是时间的函数（时间的概念）。不过实践中，不可能得到空间上并列的各样本函数，而只能得到时间很长的一次实现。

因此，可从实践中容易获得的一次实现来定义随机过程，如图所示。

3.1 随机过程的基本概念



图中信号是随机过程的一次实现，它是随机取值的时间函数，在已经过去的时间上取值已经确定，随机性消失；在未来的时间点上，取值随机，是一个随机变量。

3.2 随机过程的统计描述

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数

3.2.2 随机过程的数字特征

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数

对随机变量 ξ

a. 概率分布函数 $F(x)$

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}$$

$F(x)$ 的性质:

(1) $F(x)$ 为非减函数

(2) $0 \leq F(x) \leq 1$

b. 概率密度函数 $f(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数

$f(x)$ 的性质:

(1) $f(x)$ 为非负函数;

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1;$$

$$(3) x_2 > x_1 \text{ 时, } F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx;$$

$$(4) \text{ 若 } f(x) \text{ 在 } x \text{ 处连续, 则 } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{。}$$

正态随机变量

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

标准正态随机变量 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数

对随机过程 $X(t)$

1. 一维概率分布函数

$t=t_1$ 时, $X(t_1)$ 为随机变量。

$$F_1(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

2. 一维概率密度函数

如果 $\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1)$ 存在, 则称 $f_1(x_1, t_1)$ 为随机

过程的一维概率密度函数

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数

一维概率分布函数及一维概率密度函数描述了随机过程在固定时刻上的统计特性。

举例：求随机过程 $X(t) = X \cos \omega_0 t$ 的一维概率密度函数。

(其中 X 为标准正态分布的随机变量)

解： $t = t_1$ 时, $X(t_1) = X \cos \omega_0 t_1$ 为服从正态分布随机变量, 其均值为零, 方差为 $(\cos \omega_0 t_1)^2$ 。

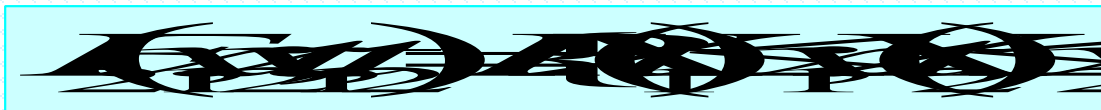
故有, 随机过程的一维概率密度函数为:

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{1}{|\cos \omega_0 t_1|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\cos \omega_0 t_1} \right)^2 \right]$$

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数



3. 二维概率分布函数



4. 二维概率密度函数

如果 $\frac{\partial F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 存在, 则称 $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$

为随机过程的二维概率密度函数。

二维概率分布函数及二维概率密度函数描述了随机过程在任意两个时刻上的统计特性。

3.2.1 随机过程的分布函数和概率密度函数



5. n 维概率分布函数

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

6. n 维概率密度函数

如果
$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

存在，则称 $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ 为随机过程的 n 维概率密度函数。

3.2.2 随机过程的数字特征

对随机变量

a. 均值 (数学期望、一阶原点矩)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = a$$

b. 方差 (二阶原点矩)

$$D[X] = E[(X - a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot f(x) dx = \sigma^2$$

c. 协方差 (对随机变量 X, Y)

$$\begin{aligned} COV[X, Y] &= E[(X - a_X)(Y - a_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_X) \cdot (y - a_Y) \cdot f(x) \cdot f(y) dx dy \end{aligned}$$

3.2.2 随机过程的数字特征

对随机过程

1. 随机过程的数学期望（均值）

$t = t_1$ 时， $X(t_1)$ 为随机变量。

$$E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_1(x_1, t_1) dx_1 = a(t_1)$$

t 取任意值时，得到随机过程的数学期望。

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x, t) dx = a(t)$$

数学期望 $X(t)$ 在 t 时刻的随机变量的均值，它表示了随机过程在各个孤立时刻上的随机变量的概率分布中心，由一维概率密度函数所决定。

3.2.2 随机过程的数字特征

2. 随机过程的方差

$t = t_1$ 时, $X(t_1)$ 为随机变量。

$$D[X(t_1)] = E\{[X(t_1) - a(t_1)]^2\} = \sigma^2(t_1)$$

上式中, t 取任意值时, 得到随机过程的方差。

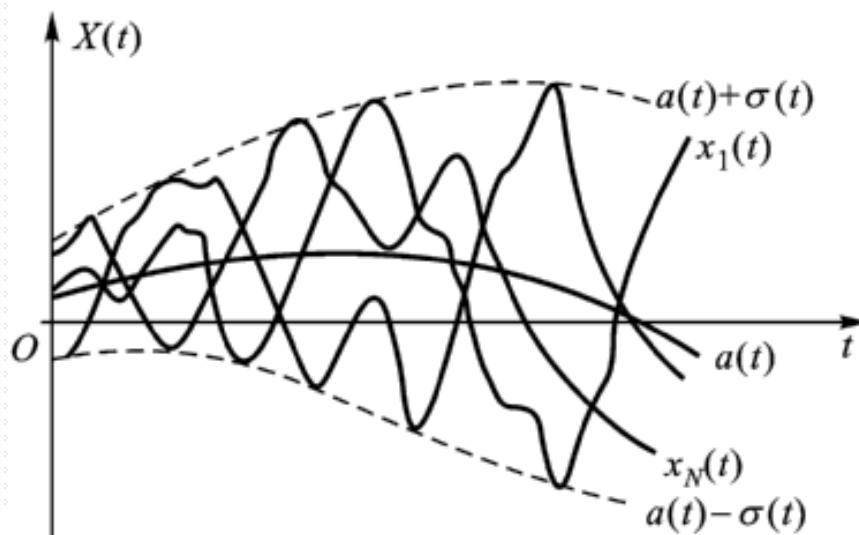
$$D[X(t)] = E\{[X(t) - a(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot f_1(x, t) dx = \sigma^2(t)$$

方差 表示了随机过程在各个孤立时刻上的随机变量对均值的偏离程度。由一维概率密度函数所决定。

3.2.2 随机过程的数字特征

进一步分析, $\sigma^2(t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)]$

当 $E[X(t)] = 0$ 时, 有 $\sigma^2(t) = E[X^2(t)]$ (平均功率)



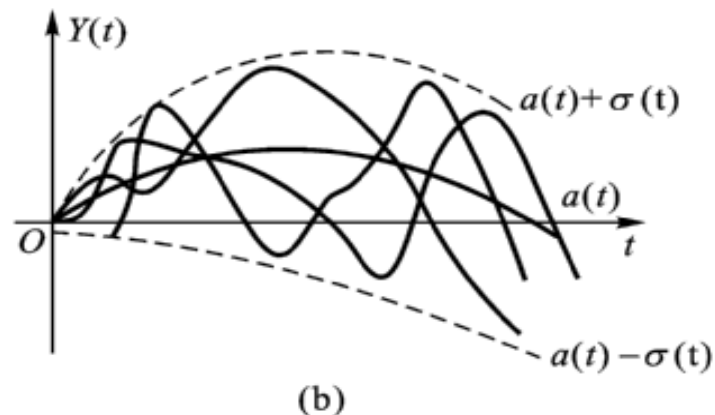
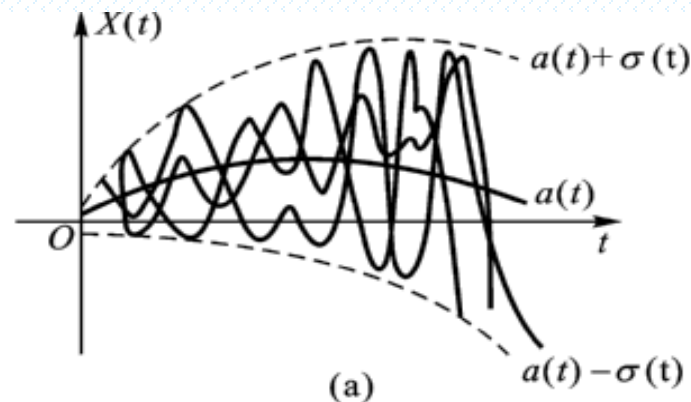
随机过程的均值和方差的含义

3.2.2 随机过程的数字特征

3. 随机过程的自相关函数

均值和方差，仅描述了随机过程在孤立时刻上的统计特性，它们不能反映出过程内部任意两个时刻之间的内在联系

$X(t)$ 变化快，表明过程内部任意两个时刻之间波及小，互相依赖弱，即自相关性弱。而 $Y(t)$ 变化慢，表明随机过程内部任意两个时刻之间波及大，互相依赖强，即自相关性强。



3.2.2 随机过程的数字特征

相关：指随机过程在某时刻的取值对下一时刻的取值的影响。影响越大，相关性越强，反之，相关性越弱。

随机过程的协方差函数

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a(t_1)][X(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

随机过程的自相关函数

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

3.2.2 随机过程的数字特征

$B(t_1, t_2)$ 与 $R(t_1, t_2)$ 的关系

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - E[X(t_1)] \cdot E[X(t_2)]$$

随机过程的协方差函数与自相关函数常记为以下形式：

$$B(t, t + \tau) \quad R(t, t + \tau)$$

其中， t 为考察的起始时刻， τ 为考察的时间间隔。

随机过程可以用均值、方差及自相关函数等数字特征来描述

3.2.2 随机过程的数字特征

例3.1 设随机过程为 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ ，试求随机过程的均值、方差及自相关函数。

式中, θ 是一个随机变量, 它在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 范围内服从均匀分布, 其概率密度函数为

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \theta \text{ 为其它值} \end{cases}$$

3.2.2 随机过程的数字特征

解：均值为

$$\begin{aligned} a(t) &= E[X(t)] = E[A \cos(\omega_0 t + \theta)] = E[A \cos \omega_0 t \cos \theta - A \sin \omega_0 t \sin \theta] \\ &= E[A \cos \omega_0 t \cos \theta] - E[A \sin \omega_0 t \sin \theta] \\ &= A \cos \omega_0 t \cdot E[\cos \theta] - A \sin \omega_0 t \cdot E[\sin \theta] \\ &= A \cos \omega_0 t \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{1}{2\pi} d\theta - A \sin \omega_0 t \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 \end{aligned}$$

方差为

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= E\{[X(t) - a(t)]^2\} = E[X^2(t)] = E[A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[1 + \cos 2(\omega_0 t + \theta)] = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} E[\cos 2(\omega_0 t + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2(\omega_0 t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

3.2.2 随机过程的数字特征



自相关函数为

$$\begin{aligned} R(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= E[A^2 \cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos \omega_0 \tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$

3.3 平稳随机过程

随机过程类型：
独立随机过程
马尔可夫 (Markov) 过程
独立增量过程
平稳随机过程等

其中平稳随机过程是应用广泛的一类随机过程。

3.3.1 平稳随机过程的定义及其含义



1. 定义

平稳随机过程是指过程的任意维概率密度函数与时间的起点无关的随机过程。即满足

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned}$$

2. 含义

平稳随机过程的统计特性不随时间的变化而改变。

实际中，判断随机过程是否平稳，通常不是去找过程的高维分布，而是通过产生的环境条件来判断。如环境条件不随时间的变化而改变，则该过程就认为是平稳的。一般地说，通信系统中遇到的随机信号和噪声都是平稳随机过程。

3.3.2 平稳随机过程的一维及二维概率密度函数



1. 一维概率密度函数

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, t_1 + \tau)$$

上式中，令 $\tau = -t_1$ ，有

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, 0) = f_1(x_1) = f_1(x)$$

平稳随机过程的一维概率密度函数与考察时刻无关。
即平稳随机过程在各个孤立时刻服从相同的概率分布。

2. 二维概率密度函数

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1 + \tau, t_2 + \tau)$$

上式中，令 $\tau = -t_1$ ，有

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; \tau)$$

式中， $\tau = t_2 - t_1$ ，为两个考察时刻之间的时间间隔。

平稳随机过程的二维概率密度函数与时间的起点无关，而仅与时间间隔有关，是 τ 的函数。

3.3.3 平稳随机过程的数字特征

1. 平稳随机过程的数学期望（均值）

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = a \quad (\text{常数})$$

2. 平稳随机过程的方差

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= E\{[X(t) - a]^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot f_1(x) dx = \sigma^2 \quad (\text{常数}) \end{aligned}$$

3.3.3 平稳随机过程的数字特征

3. 平稳随机过程的自相关函数

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \end{aligned}$$

式中， $\tau = t_2 - t_1$ 为考察随机过程的时间间隔。

由上式可知，平稳随机过程的自相关函数仅与时间间隔有关，是 τ 的函数，而与考察时间起点无关。

3.3.4 平稳随机过程自相关函数的性质



平稳随机过程自相关函数主要性质 (一)

(1) $R(\tau)$ 是 τ 的偶函数, 即

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

(2) 自相关函数具有递减特性。且当 $\tau=0$ 时, $R(\tau)$ 有最大值。

$$|R(\tau)| \leq R(0)$$

证明: 由于 $E\{[X(t) \pm X(t+\tau)]^2\} \geq 0$, 令 $t=0$, 有

$$E\{[X(0) \pm X(\tau)]^2\} = E[X^2(0)] \pm 2E[X(0)X(\tau)] + E[X^2(\tau)] \geq 0$$

对平稳随机过程来说, $E[X^2(\tau)] = E[X^2(0)] = R(0)$

故, 有 $R(0) \pm 2R(\tau) + R(0) \geq 0 \longrightarrow R(0) \geq |R(\tau)|$

3.3.4 平稳随机过程自相关函数的性质



平稳随机过程自相关函数主要性质 (二)

(3) $R(0) = E[X^2(t)] = P$, 即 $R(0)$ 为平稳随机过程的平均功率。

(4) $R(\infty) = E^2[X(t)] = a^2$, 即 $R(\infty)$ 为平稳随机过程的直流功率。

证明: 由于 $R(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$

$\tau \rightarrow \infty$, $X(t)$ 与 $X(t+\tau)$ 之间的相关性消失, 即它们互相独立。

所以 $R(\infty) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t)] \cdot E[X(t+\tau)] = E^2[X(t)]$

(5) $R(0) - R(\infty) = \sigma^2$, 即 $R(0) - R(\infty)$ 为平稳随机过程的方差。

由方差表示式, 有: $\sigma^2(t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = R(0) - R(\infty)$

3.3.4 平稳随机过程自相关函数的性质



狭义平稳随机过程（窄平稳随机过程）：

随机过程满足任意维概率密度函数与时间的起点无关。

广义平稳随机过程（宽平稳随机过程）：

随机过程的数学期望及方差与时间无关，自相关函数仅与时间间隔有关。

狭义平稳随机过程一定是广义平稳随机过程，但反之不一定成立。（正态随机过程例外）

3.3.5 平稳随机过程的各态历经性（遍历性）

集合平均（统计平均）：对随机过程所有的样本函数求统计平均。

时间平均：对随机过程的一个样本函数求平均。

1. 随机过程的时间平均

时间均值，记为 $\overline{X(t)}$ 或 \bar{a} ，定义为

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) dt = \bar{a}$$

时间方差，记为 $\overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2}$ 或 $\overline{\sigma^2}$ ，定义为

$$\overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x(t) - \bar{a}]^2 dt = \overline{\sigma^2}$$

3.3.5 平稳随机过程的各态历经性 (遍历性)

时间自相关函数, 记为 $\overline{X(t)X(t+\tau)}$ 或 $\overline{R(t,t+\tau)}$, 定义为

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{R(t,t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt = \overline{R(\tau)}$$

2. 平稳随机过程各态历经性

对一般平稳随机过程, 其数字特征往往可以用过程的一个样本函数的时间平均来代替, 即满足以下关系:

$$\begin{cases} E[X(t)] = \overline{X(t)} \\ D[X(t)] = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2} \\ E[X(t)X(t+\tau)] = \overline{X(t)X(t+\tau)} \end{cases}$$

3.3.5 平稳随机过程各态历经性（遍历性）

“各态历经性”（或“遍历性”）的含义：

对随机过程中的任意一实现（样本函数）来说，它好像经历了随机过程中所有可能的状态一样。

“各态历经性”将求随机过程数字特征时的集合平均（统计平均）简化为一个样本函数的时间平均了。

例如，对各态历经过程来说，由于

$$R(0) = \overline{R(0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

故样本函数的平均功率即为随机过程的平均功率。

3.3.5 平稳随机过程的各态历经性（遍历性）

注意：具有各态历经性的随机过程一定是平稳随机过程，
但平稳随机过程不一定都具有各态历经性。

满足各态历经性条件：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(\tau) d\tau = 0$$

一般来说，通信系统中遇到的随机信号或噪声均能满足该条件，因此以后将它们都视为各态历经平稳随机过程。

3.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系 ----维纳—欣钦定理



维纳—欣钦(Wiener-Khintchine)定理

平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度是一对傅里叶变换，即它们之间有以下关系：

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

式中， $P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|X_T(\omega)|^2 \right]}{T}$ ，为随机过程的功率谱密度函数。

3.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系

----维纳—欣钦定理



例3.2 已知平稳随机过程的自相关函数为 $R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$,

试求该随机过程的功率谱密度及平均功率。

解：由维纳—欣钦定理，随机过程功率谱密度为

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}] \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}] d\tau \\ &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] \end{aligned}$$

平均功率为 $P = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = R(0) = \frac{A^2}{2}$

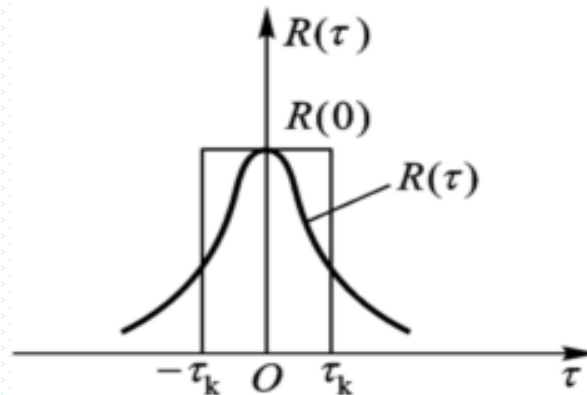
3.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系 ----维纳—欣钦定理



为定量描述平稳随机过程的相关性与频带之间的关系，常使用自相关时间和等效带宽的概念。它们的含义如下：

1. 自相关时间 τ_k

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau}{2R(0)}$$



由于 $P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$, 故

$$P(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau$$

因而
$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau}{2R(0)} = \frac{P(0)}{2R(0)}$$

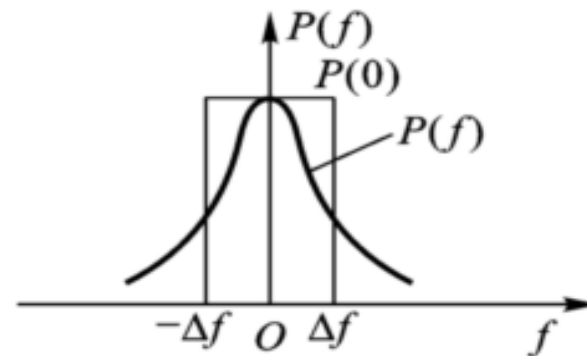
τ_k 的含义：以 $R(0)$ 为高作一矩形，并使矩形面积与曲线下的面积相等时，对应的矩形宽度值的一半。

3.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系 ----维纳—欣钦定理



2. 等效带宽 Δf

$$\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(f) df}{2P(0)}$$



由于 $R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$, 故

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df$$

因而
$$\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(f) df}{2P(0)} = \frac{R(0)}{2P(0)}$$

Δf 的含义: 以 $P(0)$ 为高作一矩形, 并使矩形面积与曲线下的面积相等时, 对应的矩形宽度值的一半。

3.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系 ----维纳—欣钦定理



3.自相关时间与等效带宽之间的关系

$$\tau_k \cdot \Delta f = \frac{P(0)}{2R(0)} \cdot \frac{R(0)}{2P(0)} = \frac{1}{4}$$

这说明在相同的情况下，自相关时间越小，过程占有频带越宽；相反，自相关时间越大，过程占有频带越窄。

3.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系 ----维纳—欣钦定理



极端情况1：非自相关过程。

$$\tau_k = 0 \quad \Delta f \rightarrow \infty$$

即自相关性最弱，占有带宽最大（无穷宽），包含有自零至无穷大的所有频谱分量，这如同白光中包含所有可见光谱一样，所以，非自相关过程又称为白色随机过程。

自相关函数为 $R(\tau) = A\delta(\tau)$

功率谱密度为 $P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = A$

极端情况2：直流信号。

$\tau_k = \infty$ 自相关函数为 $R(\tau) = A$

$\Delta f = 0$ 功率谱密度为 $P(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$

3.5 两个随机过程之间的统计联系

实际中，常需要研究两个或多个随机过程同时出现的情况。例如，在信号接收时，接收到的信号往往是有用信号与噪声的混合信号，即

$$S(t) = x(t) + n(t)$$

这里，有用信号 $x(t)$ 与噪声 $n(t)$ 都是随机过程。因此有必要研究多个随机过程之间的联合统计特性。

3.5.1 联合分布函数和联合概率密度函数

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合分布函数

$$\begin{aligned} F_{n+m} & \left(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m \right) \\ & = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n; Y(t'_1) \leq y_1, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\} \end{aligned}$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合概率密度函数

如果
$$\frac{\partial F_{n+m} \left(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m \right)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n \partial y_1 \cdots \partial y_m} = f_{n+m} \left(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m \right)$$

则称 $f_{n+m} \left(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m \right)$ 为 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联合概率密度函数。

3.5.1 联合分布函数和联合概率密度函数

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 统计独立

$$\begin{aligned} f_{n+m} \left(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m \right) \\ = f_n \left(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n \right) \cdot f_m \left(y_1, \dots, y_m; t'_1, \dots, t'_m \right) \end{aligned}$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳

若随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 任意 $n+m$ 维联合概率密度函数与时间的起点无关，则称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相联系的。

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合各态历经性

若随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的各时间平均值等于各自的统计平均值，则称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 具有联合各态历经性。

3.5.2 互相关函数

随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_2(x, y, t_1, t_2) dx dy\end{aligned}$$

如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都是平稳随机过程，且是平稳相联系的，则

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_2 - t_1) = R_{XY}(\tau)$$

如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是统计独立的，则有

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)] \cdot E[Y(t_2)]$$

3.5.2 互相关函数

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数

$$\begin{aligned} B_{XY}(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a_X(t_1)][Y(t_2) - a_Y(t_2)]\} \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[Y(t_2)] \end{aligned}$$

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关

$$B_{XY}(t_1, t_2) = 0$$

由 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 统计独立的条件，可知如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 统计独立，则它们一定是互不相关的。

互不相关与统计独立的关系：两个随机过程如果统计独立，则它们一定互不相关。但互不相关的两个随机过程，不一定统计独立。（正态随机过程例外）

3.5.2 互相关函数

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 互相关函数的性质

$$R_{XY}(\tau) \neq R_{XY}(-\tau)$$

(对平稳相联系的随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 来说)

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

互谱密度函数
$$P_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

3.5.2 互相关函数

例：考虑有用信号与噪声之和

$$S(t) = x(t) + n(t)$$

$x(t)$ 和 $n(t)$ 均为平稳随机过程，且平稳相联系。

$S(t)$ 自相关函数为

$$R_S(\tau) = R_x(\tau) + R_n(\tau) + R_{xn}(\tau) + R_{nx}(\tau)$$

通常认为 $x(t)$ 和 $n(t)$ 之间是统计独立的，且 $E[n(t)] = 0$

故有 $R_{xn}(\tau) = R_{nx}(\tau) = 0$

于是 $R_S(\tau) = R_x(\tau) + R_n(\tau)$

$$P_S(\omega) = P_x(\omega) + P_n(\omega)$$

3.6 正态随机过程

正态随机过程又称为高斯 (Gaussian) 随机过程，是一种常见而又重要的随机过程

典型的正态随机过程：通信系统中的噪声

定义：如果随机过程任意维概率密度函数都服从正态分布，则称此随机过程为正态随机过程。其 n 维概率密度函数为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\exp\left[\frac{-1}{2|\Lambda|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\Lambda|_{ij} \left(\frac{x_i - a_i}{\sigma_i}\right) \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j}\right)\right]}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n |\Lambda|}^{\frac{1}{2}}}$$

式中， $a_i = E[X(t_i)]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为 $X(t)$ 在 t_i 时刻的均值；

3.6.1 正态随机过程的定义

$\sigma_i^2 = E\{[X(t_i) - a_i]^2\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为 $X(t)$ 在 t_i 时刻的方差；

$|\Lambda|$ 为归一化协方差矩阵行列式，即

$$|\Lambda| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

其中， ρ_{ij} 为归一化协方差系数；为

$$\rho_{ij} = \frac{E\{[X(t_i) - a_i][X(t_j) - a_j]\}}{\sigma_i \sigma_j}$$

$|\Lambda|_{ij}$ 为行列式 $|\Lambda|$ 中元素 ρ_{ij} 的代数余子式。

3.6.2 正态随机过程的性质

1. 正态随机过程如果是广义平稳的，则也是狭义平稳的

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\exp\left[\frac{-1}{2|\Lambda|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\Lambda|_{ij} \left(\frac{x_i - a_i}{\sigma_i}\right) \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j}\right)\right]}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n |\Lambda|}^{\frac{1}{2}}}$$

2. 正态随机过程的线性变换仍是正态随机过程

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t X(t)g(t)dt \longrightarrow \sum_{k=1}^N X(t_k)g(t_k)\Delta t_k \xrightarrow{\text{中心极限定理}}$$

$Y(t)$ 为正态随机过程

3.6.2 正态随机过程的性质

3. 如果两个正态随机过程不相关，则它们也统计独立

以 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 二维联合概率密度函数为例

$$f_2(x, y; t_1, t_2) = \frac{\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho_{XY}(x-a_X)(y-a_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho_{XY}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(不相关) $B_{XY}(t_1, t_2) = E\left\{\left[Y(t_2) - a_Y(t_2)\right]\left[X(t_1) - a_X(t_1)\right]\right\} = 0$

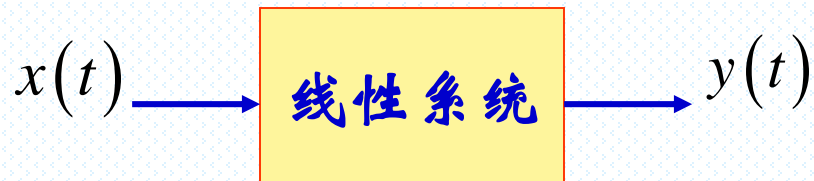
归一化协方差系数

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{E\left\{\left[X(t_1) - a_X(t_1)\right]\left[Y(t_2) - a_Y(t_2)\right]\right\}}{\sigma_X\sigma_Y} = 0$$

3.6.2 正态随机过程的性质

$$\begin{aligned} f_2(x, y; t_1, t_2) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-a_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \\ &= f_1(x, t) \cdot f_1(y, t) \end{aligned}$$

3.7 平稳随机过程通过线性系统



对确定信号

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

对随机过程

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau$$

内容：当输入随机过程平稳时，考察输出随机过程的平稳性及数字特征

3.7 平稳随机过程通过线性系统

1. 输出随机过程数学期望

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)] d\tau$$

由于 $X(t)$ 是平稳的，所以 $E[X(t-\tau)] = a$ ，故

$$E[Y(t)] = a \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = a \cdot H(0)$$

2. 输出随机过程的自相关函数

$$R_Y(t, t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] \quad \left(Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau \right)$$

$$R_Y(t, t+\tau) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) X(t-\gamma) d\gamma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) X(t+\tau-\sigma) d\sigma\right]$$

3.7 平稳随机过程通过线性系统

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) X(t-\gamma) d\gamma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) X(t+\tau-\sigma) d\sigma \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) h(\sigma) E \left[X(t-\gamma) X(t+\tau-\sigma) \right] d\gamma d\sigma \end{aligned}$$

式中, $E \left[X(t-\gamma) X(t+\tau-\sigma) \right] = R_X(\tau + \gamma - \sigma)$

为输入平稳随机过程的自相关函数。于是有

$$R_Y(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) h(\sigma) R_X(\tau + \gamma - \sigma) d\gamma d\sigma = R_Y(\tau)$$

上式表明, 输出随机过程自相关函数仅为时间间隔的函数, 而与时间起点无关。因此, 输出随机过程是平稳随机过程, 至少是广义平稳的。

3.7 平稳随机过程通过线性系统

3. 输出随机过程的功率谱密度

由维纳—欣钦定理

$$P_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$P_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) h(\sigma) R_X(\tau + \gamma - \sigma) d\gamma d\sigma d\tau$$

令 $\mu = \tau + \gamma - \sigma$

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\mu - \gamma + \sigma)} R_X(\mu) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\mu) e^{-j\omega\mu} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) e^{j\omega\gamma} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\sigma \end{aligned}$$

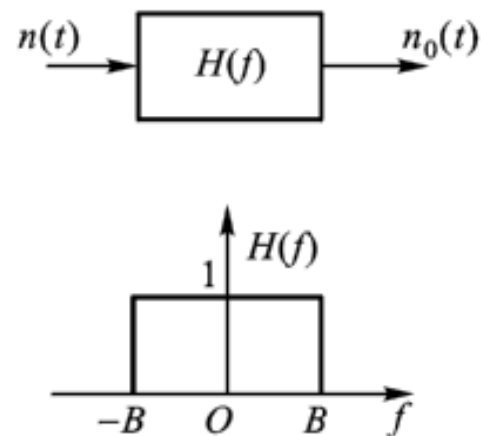
$$P_Y(\omega) = P_X(\omega) \cdot H^*(\omega) \cdot H(\omega) = P_X(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

3.7 平稳随机过程通过线性系统

例3.3 设功率谱密度为 $n_0/2$ (常数) 的白色随机过程 (白噪声) 通过带宽为 B 的理想低通滤波器, 如图所示。试求输出随机过程的功率谱密度、自相关函数及噪声功率。

解: 理想低通滤波器的传输特性为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq B \\ 0, & |f| > B \end{cases}$$



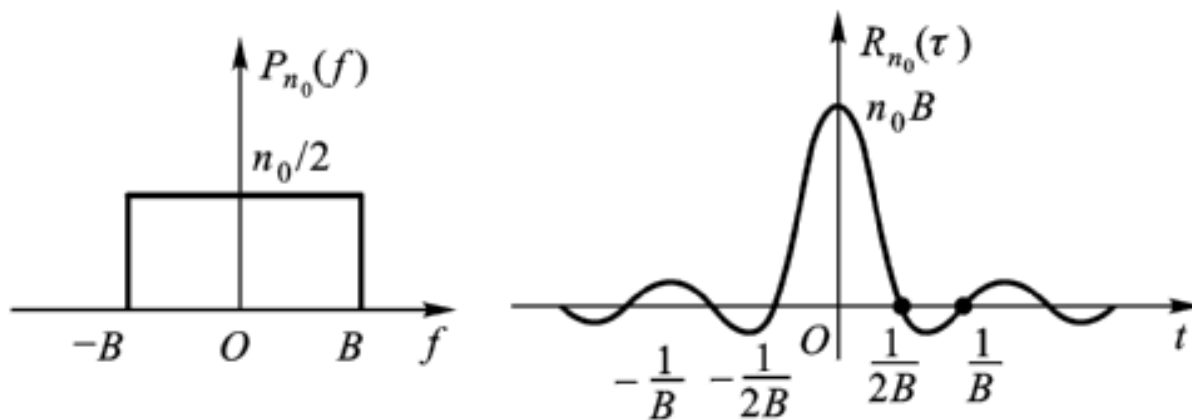
故, 输出随机过程的功率谱密度为

$$P_{n_0}(f) = P(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{n_0}{2}, \quad |f| \leq B$$

3.7 平稳随机过程通过线性系统

输出随机过程的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_{n_0}(\tau) &= \mathfrak{F}^{-1} [P_{n_0}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_0}(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df \\
 &= n_0 B \text{Sa}(2\pi B\tau)
 \end{aligned}$$



3.7 平稳随机过程通过线性系统

输出噪声的功率为

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_0}(f) df = R_{n_0}(0) = n_0 B$$

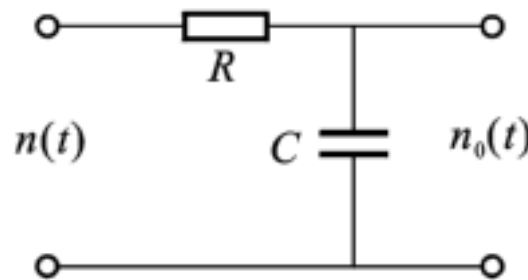
输出随机过程的等效带宽为： $\Delta f = \frac{R(0)}{2P(0)} = B$

自相关时间为： $\tau_k = \frac{1}{4B}$

3.7 平稳随机过程通过线性系统

例3.4 设均值为零，功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯（正态）白噪声通过如图所示的RC低通滤波器，试求输出随机过程的一维概率密度函数。

解：由性质可知，高斯白噪声通过线性系统后输出过程仍然是高斯分布的随机过程。



RC低通滤波器的传输特性为

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

输出随机过程的均值为 $E[n_0(t)] = E[n(t)] \cdot H(0) = 0$

3.7 平稳随机过程通过线性系统

输出随机过程的功率谱密度

$$P_{n_0}(f) = P(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}$$

输出随机过程的自相关函数

$$R_{n_0}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}[P_{n_0}(f)] = \frac{n_0}{4RC} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)$$

输出随机过程的方差（或功率）

$$\sigma_0^2 = R_{n_0}(0) = \frac{n_0}{4RC}$$

故，输出随机过程的一维概率密度函数为

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

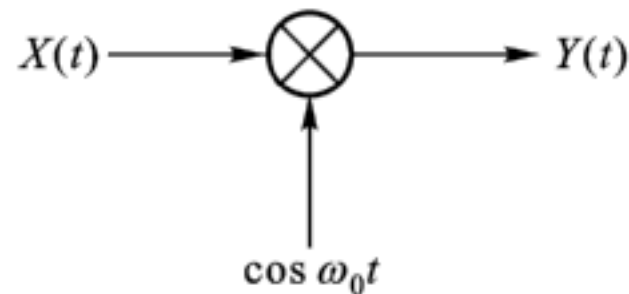
3.7 平稳随机过程通过线性系统

例3.5 设平稳随机过程通过如图所示的乘法器，若已知随机过程的功率谱，试求乘法器输出响应的功率谱。

解：乘法运算是非线性变换过程，
因此，

$$P_Y(\omega) \neq P_X(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

为得到输出功率谱，可先求输出响应自相关函数，再进行傅立叶变换。



$$\begin{aligned} R_Y(t, t + \tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] \\ &= E[X(t)X(t + \tau)\cos\omega_0t\cos\omega_0(t + \tau)] \\ &= \frac{1}{2}E[X(t)X(t + \tau)][\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0t + \omega_0\tau)] \\ &= \frac{1}{2}R_X(\tau)[\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0t + \omega_0\tau)] \end{aligned}$$

3.7 平稳随机过程通过线性系统

式中, $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$ 为输入随机过程自相关函数。

由上式可见, 输出随机过程自相关函数与时间有关, 因此不是平稳随机过程。

对非平稳随机过程求功率谱时, 应先将其自相关函数求时间平均, 再进行傅立叶变换。

对 $R_Y(t, t+\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) [\cos \omega_0 \tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)]$ 求时间平均,

结果为 $R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$

输出随机过程功率谱为

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} [P_X(\omega - \omega_0) + P_X(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

3.8 白噪声、散弹噪声和热噪声

噪声 { 乘性噪声 (与信号本身密切相关, 它可以通过合理地设计信号及系统特性等措施来消除)

加性噪声 (独立于信号而存在, 它始终干扰着有用信号的传输。)

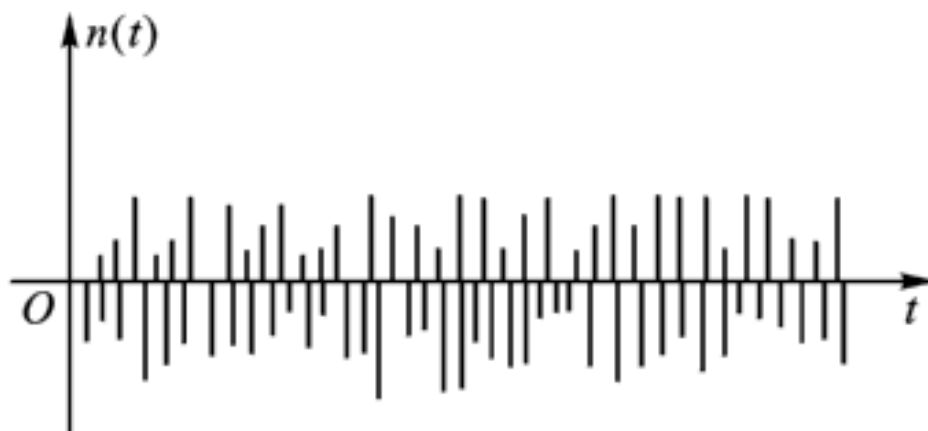
加性噪声 { 外部噪声 (由信道引入, 包括人为噪声、工业干扰和天电噪声。)

内部噪声 (由通信设备内部产生, 它对信号的影响最为严重, 是研究的重点。)

内部噪声通常认为是白噪声, 是一种平稳随机过程。理想的白噪声服从高斯分布, 一般称为加性高斯白噪声 (AWGN)。

3.8 白噪声、散弹噪声和热噪声

理想白噪声可认为是由大量宽度为无穷窄的脉冲随机叠加而成的，如图所示。



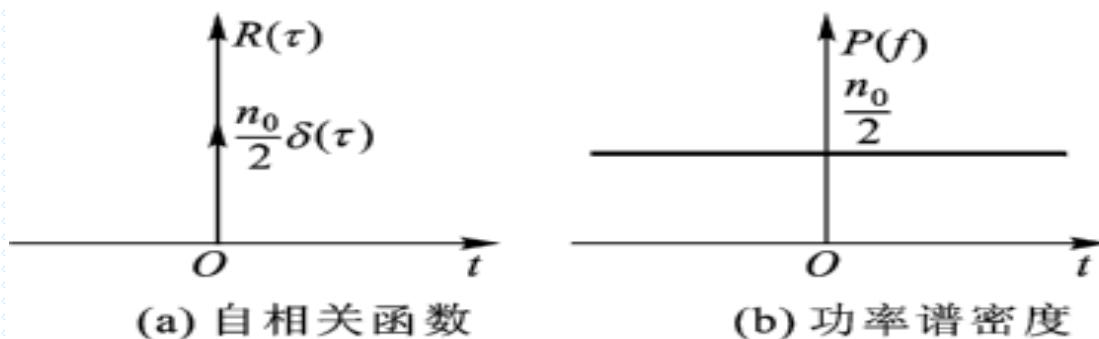
如前所述，白噪声是一个非自相关的随机过程，它包含有自零至无穷大的所有频谱分量，这类似于光学中包括有全部可见光谱的白光。

白噪声功率谱密度是一个常数，为 $P(\omega) = \frac{n_0}{2}$

3.8 白噪声、散弹噪声和热噪声

由维纳—欣钦定理，可得白噪声自相关函数为

$$R(\tau) = \mathfrak{F}^{-1} [P(\omega)] = \frac{n_0}{2} \delta(\tau)$$



理想白噪声并不存在!

工程实践中遇到的噪声是带限的，带限噪声或带内功率谱分布不均匀的噪声称为有色噪声。

但当带限噪声功率谱均匀分布的频带范围远远大于系统的工作带宽时，就可以认为该噪声具有白噪声特性。

3.8 白噪声、散弹噪声和热噪声

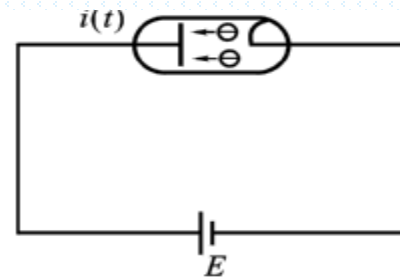
通信系统中典型的白噪声：散弹噪声、热噪声

散弹噪声：由通信设备中有源器件内部的载流子或电子发射的不均匀性引起的一种起伏过程。

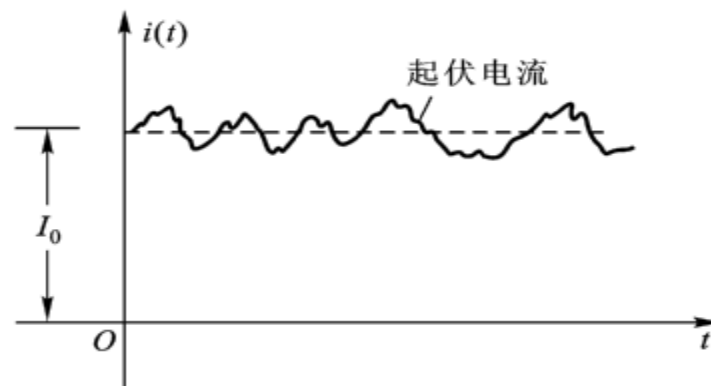
散弹噪声功率谱密度

$$P_i(\omega) = I_0 q$$

$$0 < f < 2.2 \times 10^9 \text{ Hz}$$



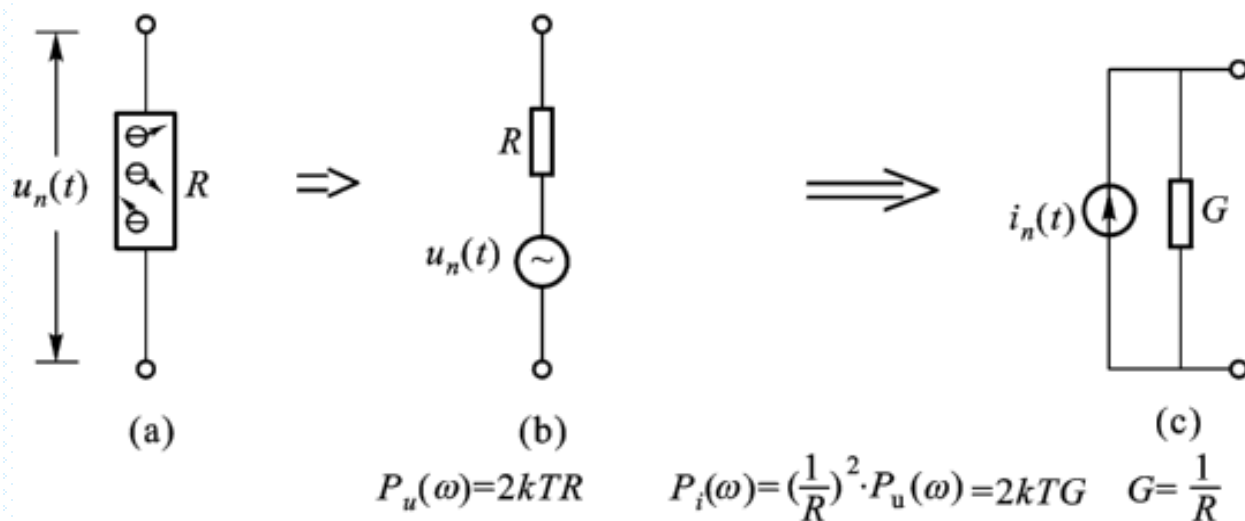
(a) 真空管中电子发射示意图



(b) 真空管中起伏电流变化示意图

3.8 白噪声、散弹噪声和热噪声

热噪声（电阻热噪声）：由通信设备中电阻类器件（如天线）内部的电子热运动（布朗运动）引起的一种起伏过程。

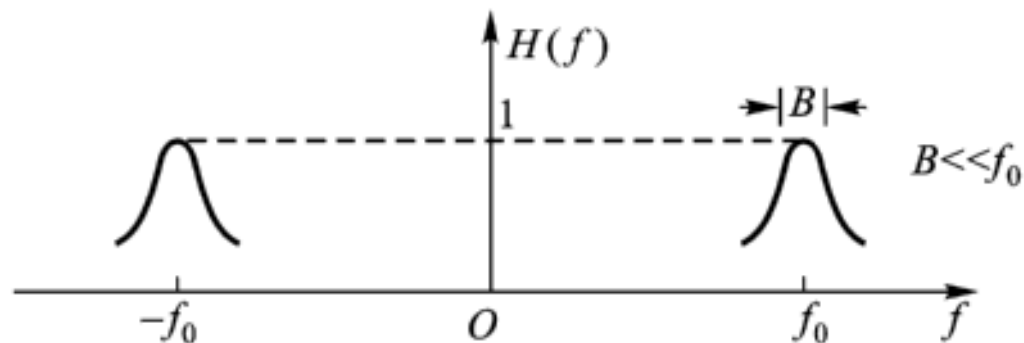


热噪声的电压功率谱密度为 $P_u(\omega) = 2kTR$ $0 < f < 10^{13}$ Hz

式中， $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/k 为波尔兹曼常数； T 为环境的绝对温度。

3.9 白色随机过程通过窄带线性系统----窄带噪声

窄带线性系统传输特性

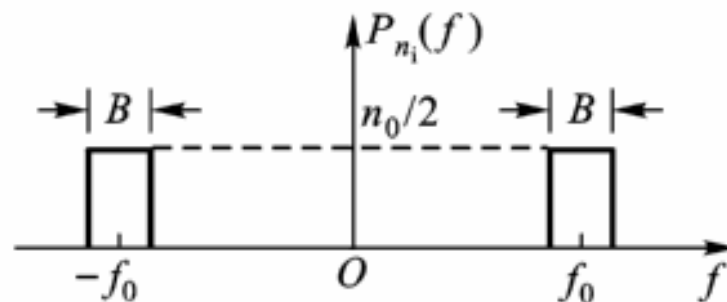


窄带噪声功率谱密度 $P_{n_i}(\omega) = P(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2$

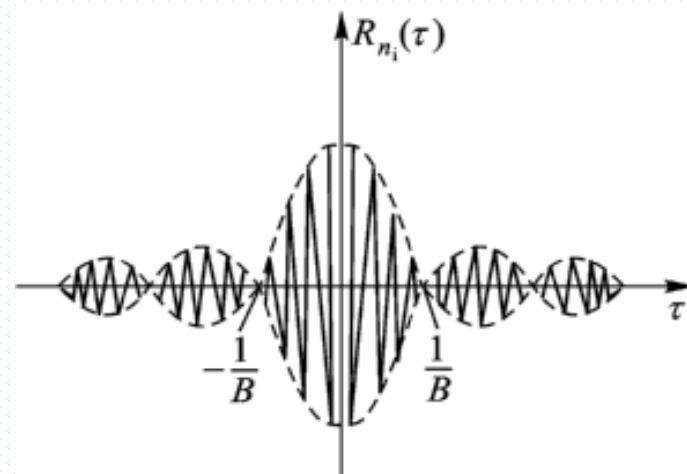
3.9 白色随机过程通过窄带线性系统----窄带噪声

窄带噪声自相关函数

$$\begin{aligned}
 R_{n_i}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_i}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega
 \end{aligned}$$



例：理想窄带系统输出功率谱密度及自相关函数。



功率谱密度

$$P_{n_i}(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & f_0 - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

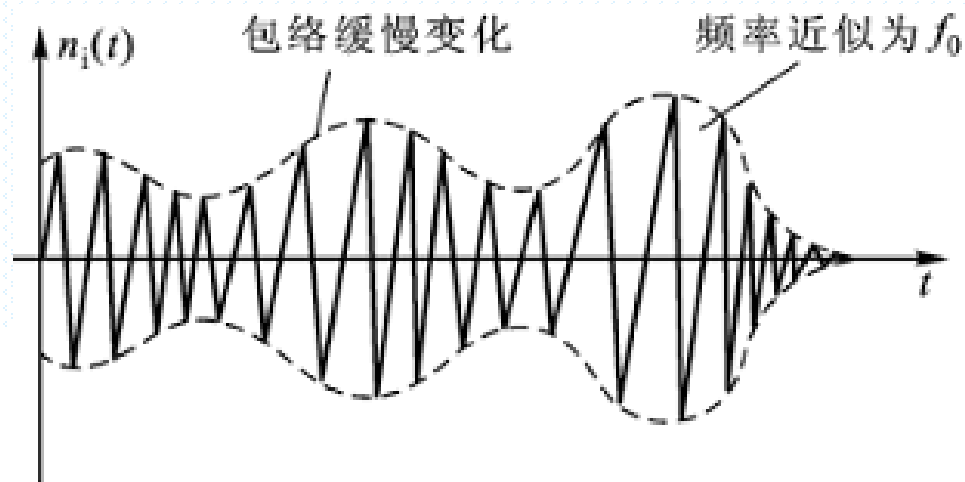
自相关函数

$$R_{n_i}(\tau) = 2 \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = n_0 B \text{Sa}(\pi B\tau) \cos \omega_0 t$$

3.9.1 窄带噪声的波形特征

窄带噪声波形的“准正弦波”特性

白噪声具有无穷的带宽，而窄带线性系统仅在中心频率附近允许白噪声通过。因此，白噪声通过窄带线性系统时，实际上是窄带线性系统对输入白噪声的选频过程。其结果是输出噪声中仅有中心频率附近的频率分量，因此窄带噪声波形是一个频率近似为 f_0 ，包络和相位缓慢变化的正弦波。



3.9.1 窄带噪声的波形特征

窄带噪声时域表示式 (1)

$$n_i(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (\text{包络和相位形式})$$

式中, $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 分别为窄带噪声的包络和相位, 它们都是随机过程。

显然, 由于噪声的窄带特性, 包络和相位的变化一定比载波的变化要缓慢得多。

窄带噪声时域表示式 (2)

$$\begin{aligned} n_i(t) &= R(t) \cos \theta(t) \cos \omega_0 t - R(t) \sin \theta(t) \sin \omega_0 t \\ &= n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

3.9.1 窄带噪声的波形特征

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t \quad (\text{同相、正交分量形式})$$

式中, $n_c(t) = R(t) \cos \theta(t)$ --- 同相分量

$$n_s(t) = R(t) \sin \theta(t) \quad \text{--- 正交分量}$$

同相分量和正交分量在性质上都是具有低通特性的随机过程。

由上可知：窄带噪声的统计特性可以由包络和相位或同相分量和正交分量的统计特性确定。

反之，当已知了窄带噪声的统计特性时，其包络和相位或同相分量和正交分量的统计特性也可以确定下来。

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

一、同相分量和正交分量的统计特性

同相、正交分量形式： $n_i(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t$

分析前提：假设输入白噪声是均值为零的平稳高斯随机过程，由3.7节知，窄带噪声也是均值为零的平稳高斯过程。

1. 均值 $E[n_i(t)] = E[n_c(t)]\cos\omega_0 t - E[n_s(t)]\sin\omega_0 t$

由窄带噪声的均值为零及平稳特性，对任意的时间，都有上式成立，因此得

$$\left. \begin{aligned} E[n_c(t)] &= 0 \\ E[n_s(t)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$



同相分量和正交分量是
均值为零的随机过程

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

由于 $n_i(t)$ 是高斯随机过程，因此，在任意时刻， $n_i(t)$ 都是高斯随机变量。

令 $t_1 = 0$ 及 $t_2 = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ ，得

$$\left. \begin{aligned} n_i(t_1) &= n_c(t_1) \\ n_i(t_2) &= n_s(t_2) \end{aligned} \right\}$$



在 t_1 及 t_2 时刻，同相分量和正交分量是服从高斯分布的随机变量。

2. 自相关函数

$$n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

$$R_{n_i}(t, t + \tau) = E \{ n_i(t) n_i(t + \tau) \}$$

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

$$\begin{aligned}
 R_{n_i}(t, t + \tau) &= E\{n_i(t)n_i(t + \tau)\} \\
 &= E\left\{\left[n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t\right]\left[n_c(t + \tau)\cos\omega_0(t + \tau) - n_s(t + \tau)\sin\omega_0(t + \tau)\right]\right\} \\
 &= E\left[n_c(t)n_c(t + \tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t + \tau)\right] \\
 &\quad - E\left[n_c(t)n_s(t + \tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t + \tau)\right] \\
 &\quad - E\left[n_s(t)n_c(t + \tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t + \tau)\right] \\
 &\quad + E\left[n_s(t)n_s(t + \tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t + \tau)\right] \\
 &= R_{n_c}(t, t + \tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t + \tau) \\
 &\quad - R_{n_c n_s}(t, t + \tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t + \tau) \\
 &\quad - R_{n_s n_c}(t, t + \tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t + \tau) \\
 &\quad + R_{n_s}(t, t + \tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t + \tau)
 \end{aligned}$$

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

由窄带噪声的平稳特性，有

$$R_{n_i}(t, t + \tau) = R_{n_i}(\tau)$$

故

$$R_{n_c}(t, t + \tau) = E[n_c(t)n_c(t + \tau)] = R_{n_c}(\tau)$$

$$R_{n_c n_s}(t, t + \tau) = E[n_c(t)n_s(t + \tau)] = R_{n_c n_s}(\tau)$$

$$R_{n_s n_c}(t, t + \tau) = E[n_s(t)n_c(t + \tau)] = R_{n_s n_c}(\tau)$$

$$R_{n_s}(t, t + \tau) = E[n_s(t)n_s(t + \tau)] = R_{n_s}(\tau)$$

同相分量和正交分量都是平稳随机过程

结论：同相分量和正交分量都是均值为零服从高斯分布的平稳随机过程

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

重写自相关函数式

$$\begin{aligned} R_{n_i}(t, t+\tau) &= E\{n_i(t)n_i(t+\tau)\} \\ &= R_{n_c}(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) - R_{n_c n_s}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) \\ &\quad - R_{n_s n_c}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + R_{n_s}(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) \end{aligned}$$

上式在 $t_1 = 0$ 及 $t_2 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ 时，可写为以下形式

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_c}(\tau)\cos\omega_0\tau - R_{n_c n_s}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_s}(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{n_s n_c}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

当 $\tau = 0$ 时，可得 $R_{n_i}(0) = R_{n_c}(0) = R_{n_s}(0)$

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

结论：窄带噪声和它的同相分量及正交分量具有相同的方差或功率

$$\sigma_{n_i}^2 = \sigma_{n_c}^2 = \sigma_{n_s}^2 = \sigma^2$$

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{n_c n_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_{n_s}(\tau) = R_{n_c}(\tau)$$

$$R_{n_i}(\tau) = R_{n_s}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{n_s n_c}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$-R_{n_c n_s}(\tau) = R_{n_s n_c}(\tau)$$

由互相关函数的性质，有

$$R_{n_s n_c}(\tau) = R_{n_c n_s}(-\tau) \longrightarrow R_{n_c n_s}(\tau) = -R_{n_c n_s}(-\tau)$$

同理可得

$$R_{n_s n_c}(\tau) = -R_{n_s n_c}(-\tau)$$

由上可知， $R_{n_c n_s}(\tau)$ 和 $R_{n_s n_c}(\tau)$ 是奇函数，因此有

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

$$R_{n_s n_c}(0) = R_{n_c n_s}(0) = 0$$

上式表明，同相分量及正交分量在同一时刻是互不相关的随机过程。

由正态（高斯）随机过程的性质可知，它们也是统计独立的随机过程。

由于同相分量和正交分量的均值均为零，它们也是彼此正交的随机过程。

结论：窄带噪声的同相分量及正交分量是均值为零，统计独立的平稳高斯随机过程，其方差或功率相同，且等于窄带噪声的方差或功率。

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

二、包络和相位的统计特性

同相和正交分量一维概率密度函数

$$f_{n_c}(n_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_c}} \exp\left(-\frac{n_c^2}{2\sigma_{n_c}^2}\right)$$

$$f_{n_s}(n_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_s}} \exp\left(-\frac{n_s^2}{2\sigma_{n_s}^2}\right)$$

它们的二维联合概率密度函数为

$$f_{n_c n_s}(n_c, n_s) = f_{n_c}(n_c) \cdot f_{n_s}(n_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_c^2 + n_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

式中, $\sigma^2 = \sigma_{n_c}^2 = \sigma_{n_s}^2$ 为窄带噪声的方差 (功率)

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

利用概率论中的雅可比行列式，可以由导出包络和相位的二维联合概率密度函数为

$$f_{R\theta}(R, \theta) = f_{n_c n_s}(n_c, n_s) \left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(R, \theta)} \right|$$

$\left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(R, \theta)} \right|$ 为雅可比 (Jacobi) 行列式，且

$$\left| \frac{\partial(n_c, n_s)}{\partial(R, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial n_c}{\partial R} & \frac{\partial n_s}{\partial R} \\ \frac{\partial n_c}{\partial \theta} & \frac{\partial n_s}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -R \sin \theta & R \cos \theta \end{vmatrix} = R$$

$$(n_c(t) = R(t) \cos \theta(t) \quad n_s(t) = R(t) \sin \theta(t))$$

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

代入雅可比 (Jacobi) 行列式, 得

$$\begin{aligned} f_{R\theta}(R, \theta) &= \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

利用概率论中求边际分布的方法, 可分别得到包络和相位的一维概率密度函数

$$\begin{aligned} f_R(R) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R\theta}(R, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) d\theta \\ &= \frac{R}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right), \quad 0 \leq R < \infty \end{aligned}$$

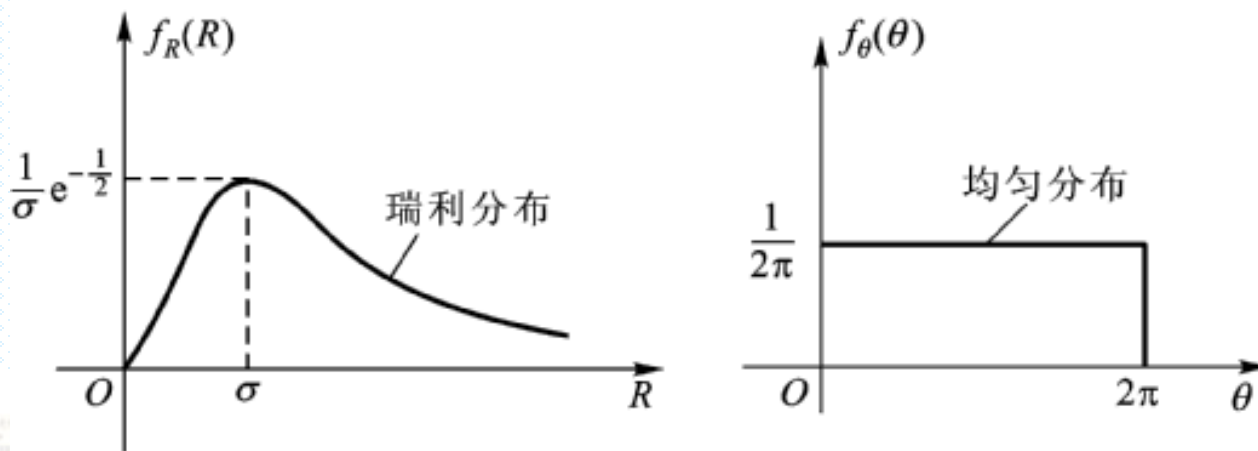
上式表明, 窄带噪声的包络服从瑞利 (Rayleigh) 分布。

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

$$f_{\theta}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{R\theta}(R, \theta) dR = \int_0^{\infty} \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) dR$$

$$= \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

上式表明，窄带噪声的相位服从均匀分布。



包络和相位分布特性

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

由于,
$$f_{R\theta}(R, \theta) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) = f_R(R) \cdot f_\theta(\theta)$$

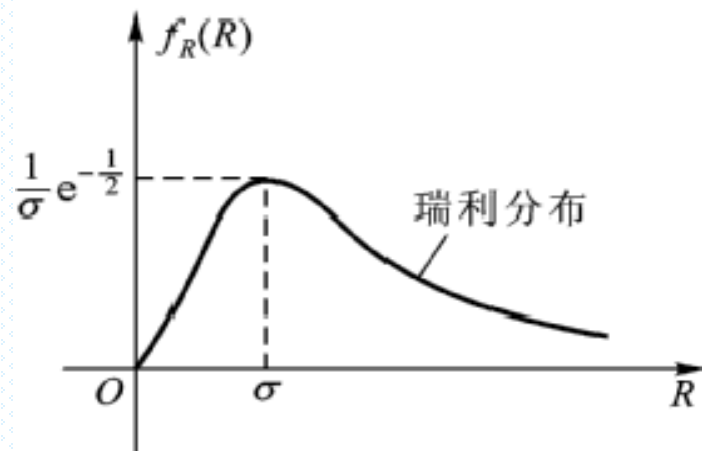
因此, 包络和相位是统计独立的 (一维分布)

服从瑞利分布的窄带噪声的包络特点:

(1) $R = \sigma$ 时, $f_R(R)$ 出现最大值。

(2) 包络的期望值为 $E[R(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$;

(3) 包络的中位值为 $R_1 = 1.177\sigma$ 。



中位值: 累积分布概率为50%时的包络值, 即满足下式的值:

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

(4) 包络的均方值为 $E[R^2(t)] = 2\sigma^2$;

(5) 包络的方差为 $D[R(t)] = E\left\{[R - E(R)]^2\right\} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$ 。

关键参数： σ^2 (方差) = 窄带噪声的功率

3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

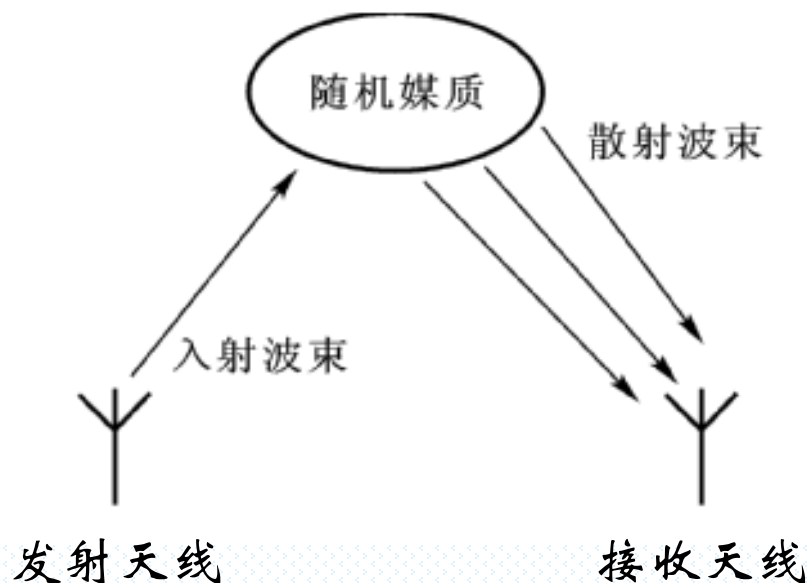
瑞利随机信道：对流层散射信道、电离层反射信道及移动多径信道等。

设发射信号是等幅正弦波，为

$$s_i(t) = A \cos \omega_0 t$$

接收端得到的信号为

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \sum_{i=1}^N a_i(t) \cos [\omega_0 t + \theta_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^N a_i(t) \cos \theta_i(t) \cos \omega_0 t - \sum_{i=1}^N a_i(t) \sin \theta_i(t) \sin \omega_0 t \\ &= X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$



3.9.2 同相和正交分量以及包络和相位统计特性

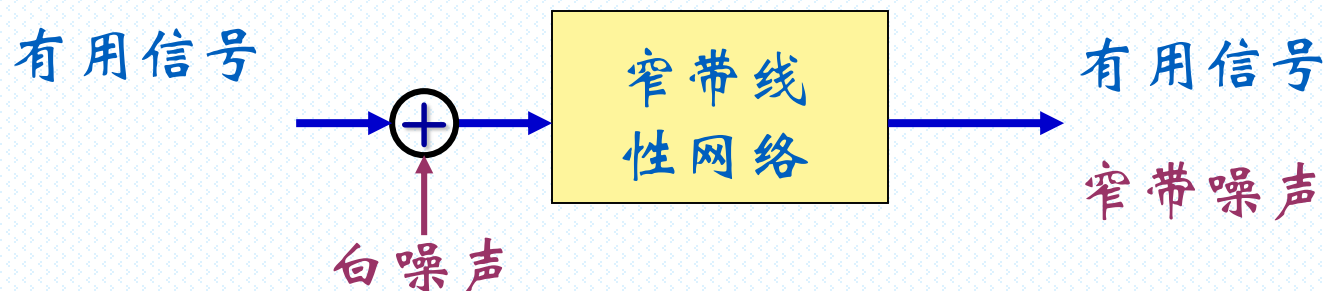
式中， $X(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \cos \theta_i(t)$ ， $Y(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \sin \theta_i(t)$ 。

当 N 很大时，它们是服从高斯分布的随机过程。

接收信号为 $s_o(t) = X(t) \cos \omega_0 t - Y(t) \sin \omega_0 t$
 $= R(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)]$ --- 衰落信号

式中， $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 分别为接收信号的包络和相位。

3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性



以有用信号是正弦波为例，合成信号形式为

$$\begin{aligned}
 s(t) &= A \cos(\omega_0 t + \theta_0) + n_i(t) \\
 &= A \cos(\omega_0 t + \theta_0) + [n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t]
 \end{aligned}$$

不失一般性，可选择正弦波初始相位为零，这时上式可写为

$$s(t) = [A + n_c(t)] \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$$

3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

令 $z_c(t) = A + n_c(t)$, $z_s(t) = n_s(t)$, 则上式为

$$s(t) = z_c(t) \cos \omega_0 t - z_s(t) \sin \omega_0 t = Q(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]$$

式中, $Q(t) = \sqrt{z_c^2(t) + z_s^2(t)}$ --- 合成信号包络

$\varphi(t) = \arctan \frac{z_s(t)}{z_c(t)}$ --- 合成信号相位

由上节的结果可看出, $z_c(t)$ 和 $z_s(t)$ 是统计独立的平稳高斯随机过程。

且有: $E[z_c(t)] = A$ $E[z_s(t)] = 0$ --- 均值

$D[z_c(t)] = D[z_s(t)] = D[n_i(t)] = \sigma^2$ --- 方差

3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

因此, $z_c(t)$ 和 $z_s(t)$ 二维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{z_c z_s}(z_c, z_s) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(z_c - A)^2 + z_s^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{z_c^2 - 2Az_c + A^2 + z_s^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

利用上节相同的分析方法, 可以得到包络和相位的二维联合概率密度函数为

$$f_{Q\varphi}(Q, \varphi) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{Q^2 - 2AQ \cos \varphi + A^2}{2\sigma^2}\right]$$

3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

上式对相位求边际积分，得到包络的概率密度函数为

$$\begin{aligned}
 f_Q(Q) &= \int_0^{2\pi} f_{Q\varphi}(Q, \varphi) d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{Q^2 - 2AQ\cos\varphi + A^2}{2\sigma^2}\right] d\varphi \\
 &= \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{Q^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{AQ\cos\varphi}{\sigma^2}\right) d\varphi
 \end{aligned}$$

应用第一类零阶修正贝塞尔 (Bessel) 函数式

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x\cos\theta) d\theta$$

上式可写为

$$f_Q(Q) = \frac{Q}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{Q^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{AQ}{\sigma^2}\right), \quad Q \geq 0$$

--- 广义瑞利分布或
莱斯 (Rice) 分布

3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

如果 $A = 0$ ，则上式变为包络服从瑞利分布。---上节结论

对第一类零阶修正贝塞尔函数来说， $x \gg 1$ ， $I_0(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$

因此，如果 A 值很大，满足 $\frac{AQ}{\sigma^2} \gg 1$ 时，有近似式

$$f_Q(Q) = \frac{Q}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{Q^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{AQ}{\sigma^2}\right)$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{\frac{Q}{A}} \exp\left[-\frac{(Q-A)^2}{2\sigma^2}\right], \quad Q \geq 0$$

若将 $Q \approx A$ 代入上式，则有

$$f_Q(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(Q-A)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{--- 正态分布}$$

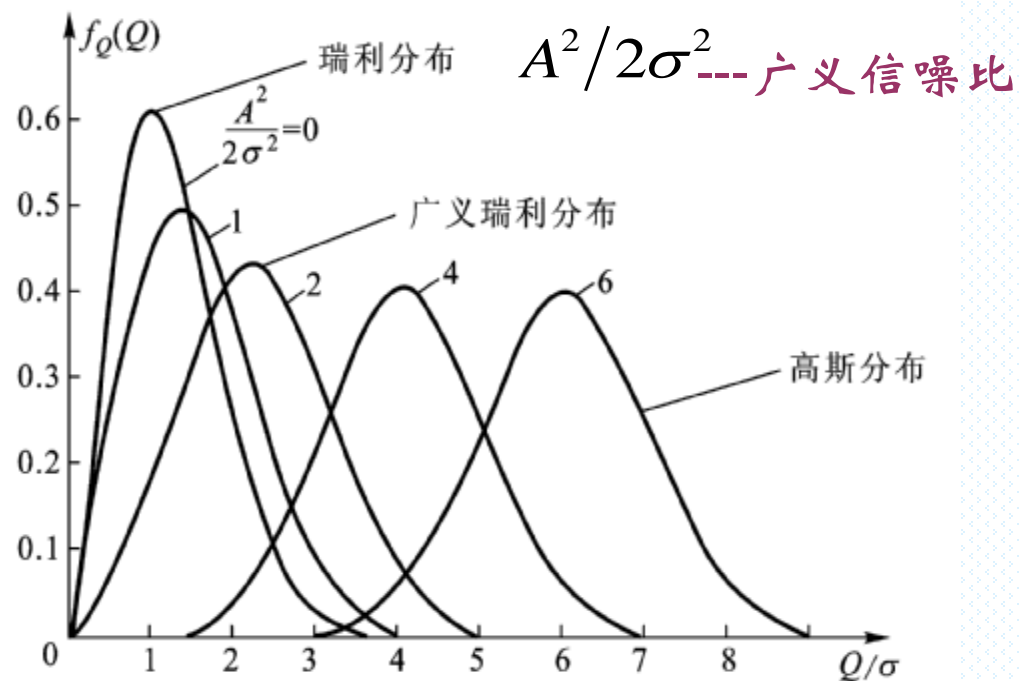
3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

合成信号的包络分布与信道中的信噪比有关。

当信噪比很小（ A 值很小，噪声起主要作用）时，包络服从瑞利分布。

当信噪比很大（ A 值很大，信号起主要作用）时，包络近似服从正态分布。

当信噪比不大不小时，包络服从广义瑞利分布。



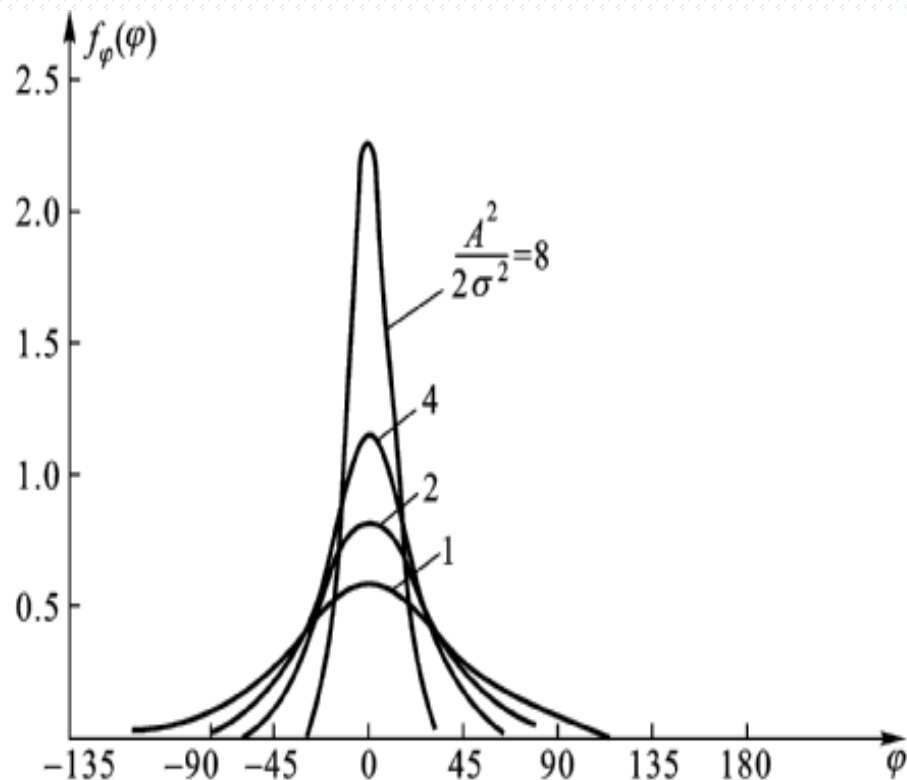
合成波形包络分布

3.10 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

相位的概率密度函数是对包络求边际积分的结果，这个积分非常复杂，这里不讨论。

相位分布也与信噪比有关，当信噪比很小（ A 值很小，噪声起主要作用）时，随机相位接近均匀分布。

当信噪比很大（ A 值很大，信号起主要作用）时，随机相位主要集中在信号的相位附近。



本章小结

- 理解随机过程的基本概念
- 掌握随机过程数字特征（均值、方差及相关函数）
- 理解平稳随机过程的定义、含义
- 掌握平稳随机过程的自相关函数性质、与功率谱密度的关系
- 理解两个随机过程之间的统计联系（不相关、独立）
- 掌握正态随机过程定义、性质
- 平稳随机过程通过线性系统
- 白噪声、散弹噪声和热噪声
- 掌握白色随机过程通过窄带线性系统——窄带噪声（结论）
- 正弦波加窄带高斯噪声的统计特性

本章习题：

3-6、3-7、3-9、3-12、3-14、3-18