

- 信号及信号设计
- 匹配滤波器
- 信号单元的相关函数
- 鸟声信号单元
- 巴克(Barker)序列
- m 序列信号单元

4.1 信号及信号设计



信号单元：指代表某个发送状态，并持续一段时间的一段完整信号

信号单元分类：

模拟信号（连续信号或波形信号），其物理量的变化是连续时间函数，取值状态数是无限制的

数字信号（序列信号），是按一定的顺序排列的一串符号(或状态)，取值状态数是有限的

信号设计：(1)使信号单元能够有效地从随机（白）噪声的干扰中检测出来或(2)从信号单元的集合中被分辨出

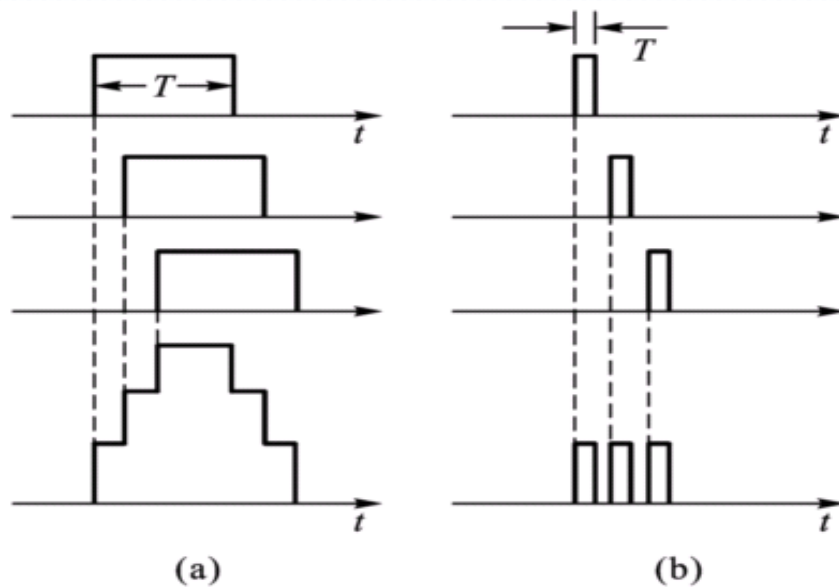
信号设计仅在传输有限个状态的系统中才有意义！

4.1.1 信号设计的基本概念

无论是波形信号，还是序列信号，在接收端都期望能输出足够大的信噪比，以使信号可靠地被检测出来

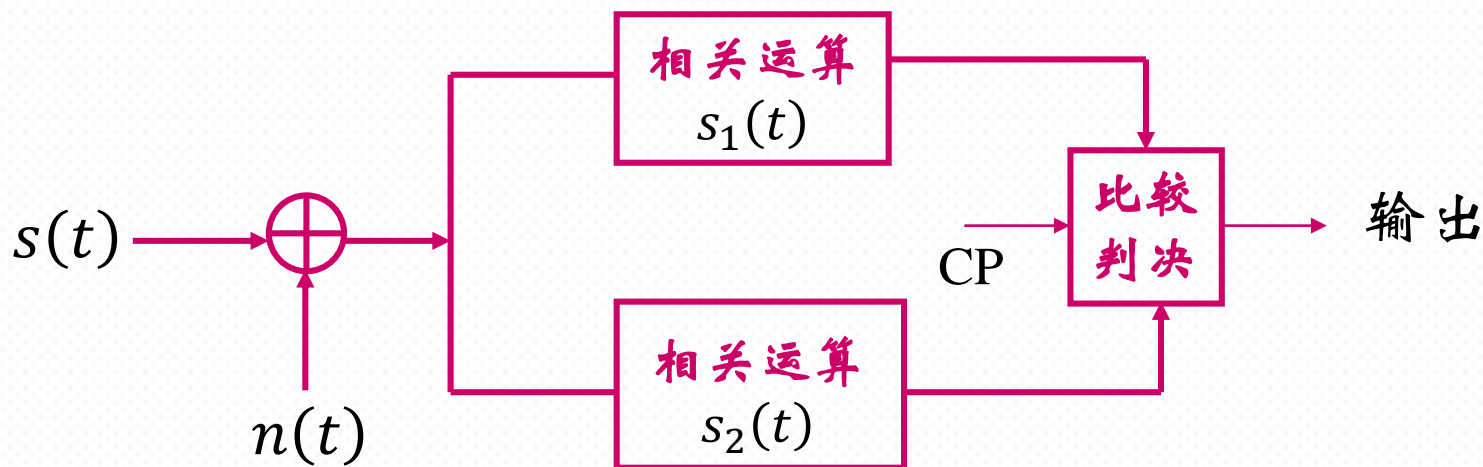
匹配滤波——最大输出信噪比 $2E/n_0$

信号设计实例——雷达系统



时间分辨率与
能量的矛盾

4.1.1 信号设计的基本概念



存在多个信号单元接收

信号设计的效果:

- (1) 平衡分辨率、传输效率与易检测度
- (2) 使多个信号单元易于被区分

4.1.2 信号设计的基本原则



在信道干扰为白噪声，接收端采用匹配滤波—相关接收的前提下，信号设计原则：

1. 输出端信号在判决时刻具有**最大信噪比**；
2. 信号单元具有**尖锐的自相关函数**——即具有脉冲压缩性能；
3. 信号单元之间的**互相关量很小**，且与自相关量有明显差别，即信号单元之间具有良好的可分辨性。

满足以上要求的信号，称为**优选信号单元**。如：**鸟声信号**、**巴克码**、**m序列**及**随机电报信号**。



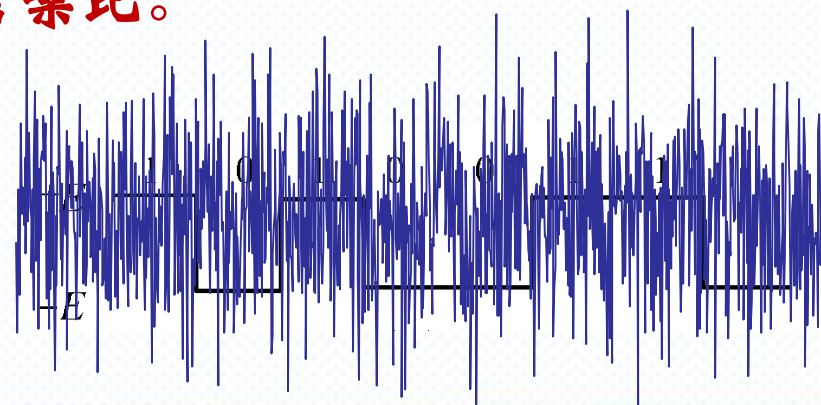
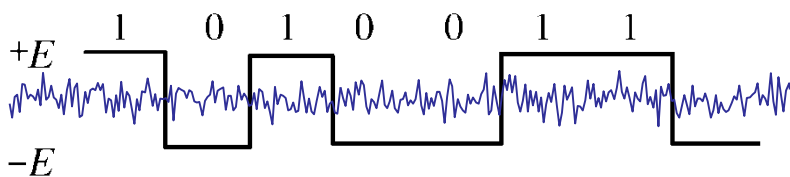
4.2 匹配滤波器

匹配滤波器(最佳线性滤波器)

1943年, 诺斯(D.O.North)提出

匹配滤波器是对确知信号的选择

匹配滤波器是在已知输入信号 $x(t)$ 的情况下, 设计的一种线性滤波器。该线性滤波器的传输函数与输入信号的频谱相匹配, 在加性高斯白噪声的干扰条件下, 滤波器的输出信号 $y(t)$ 在 t_0 时刻具有最大信噪比。



4.2.1 匹配滤波器的传输函数



- 时域输出信号 (忽略噪声)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 当 $t = t_0$ (判决点)

$$y(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega$$

- 输出噪声功率谱密度 $P_0(\omega) = \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2$
- 输出噪声平均功率

$$\overline{n_0^2(t_0)} = \overline{n_0^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 d\omega$$

4.2.1 匹配滤波器的传输函数



- t_0 时刻的输出信噪比

$$\rho_0 = \frac{|y(t_0)|^2}{n_0^2(t_0)} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

不同的 $H(\omega)$ 对应不同的输出信噪比

Schwartz不等式

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B(\omega) d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega$$

若 $A(\omega) = kB^*(\omega)$ 时，上式的等号成立。

令 $A(\omega) = H(\omega)$, $B(\omega) = S(\omega)e^{j\omega t_0}$

4.2.1 匹配滤波器的传输函数



- 最大输出信噪比 ρ_{0max}

$$\begin{aligned}\rho_{0max} &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega) e^{j\omega t_0}|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{\frac{n_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega}{n_0/2} = \frac{2E}{n_0}\end{aligned}$$

信号总能量

$$\text{其中 } E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt$$

- 匹配滤波器传递函数

$$H_M(\omega) = kS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

4.2.1 匹配滤波器的传输函数



结论:

1. 匹配滤波器的传输特性是输入信号的频谱复共轭乘以一个比例因子和一个延迟因子, 即滤波器的传输特性与信号的频谱是匹配的。

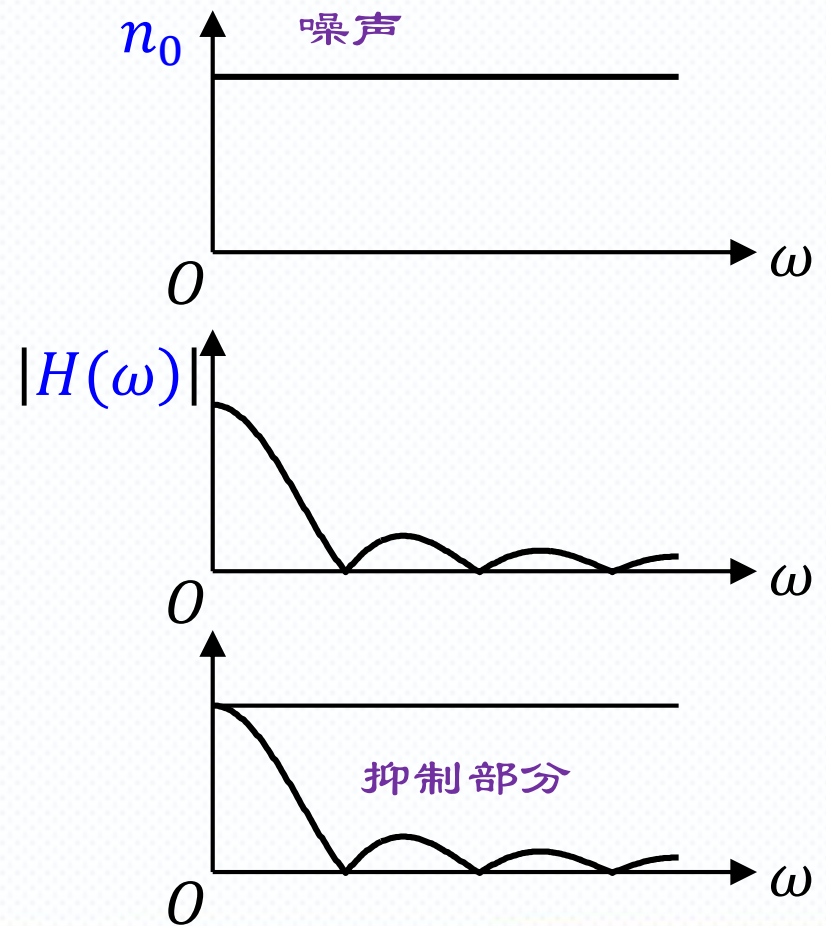
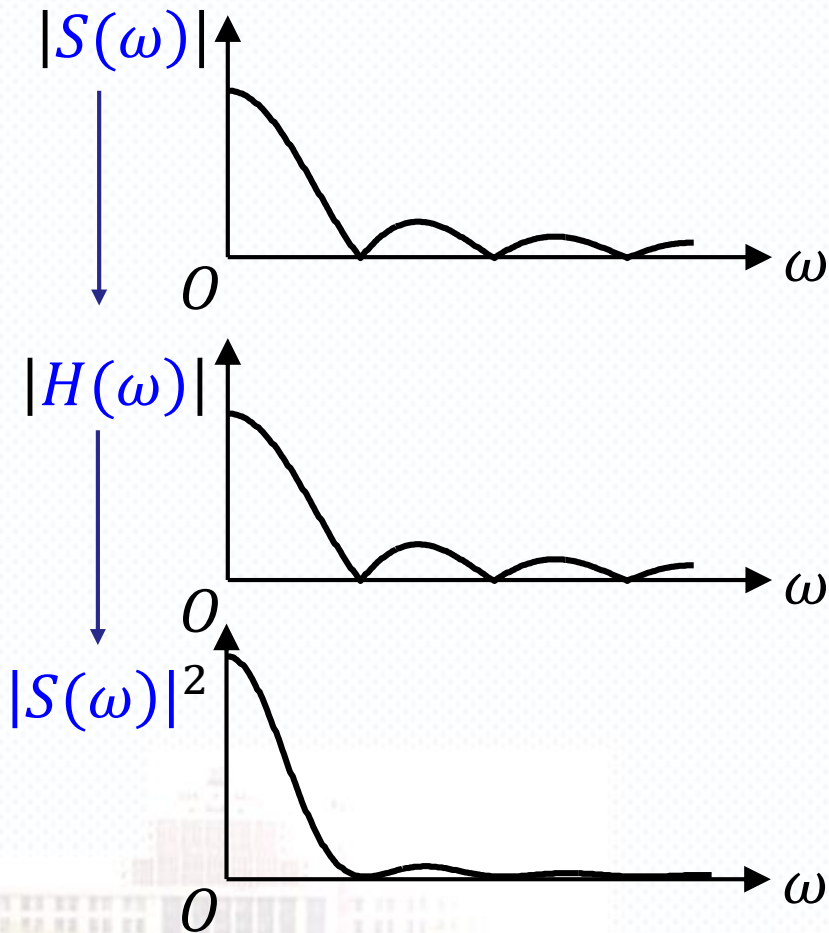
$$H_M(\omega) = kX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

2. 在 $t=t_0$ 时刻, 匹配滤波器输出信号的瞬时峰值功率与输出噪声的平均功率之比达到最大。

模匹配公式



- 模匹配: $|H_M(\omega)| = k|S(\omega)|$





- 相位匹配: $\arg[H_M(\omega)] = -\arg[S(\omega)] - \omega t_0$

- 输出信号相角

$\varphi(t) = \omega t + \text{信号初相} + \text{滤波器的相移}$

$$= \omega t + \arg[S(\omega)] + \arg[H_M(\omega)]$$

$$= \omega t + \arg[S(\omega)] - \arg[S(\omega)] - \omega t_0 = \omega(t - t_0)$$

- $t - t_0$ 时刻信号中的各频率分量相位相同, 同相叠加。因而输出信号的瞬时值达到了最大

匹配滤波器的冲激响应



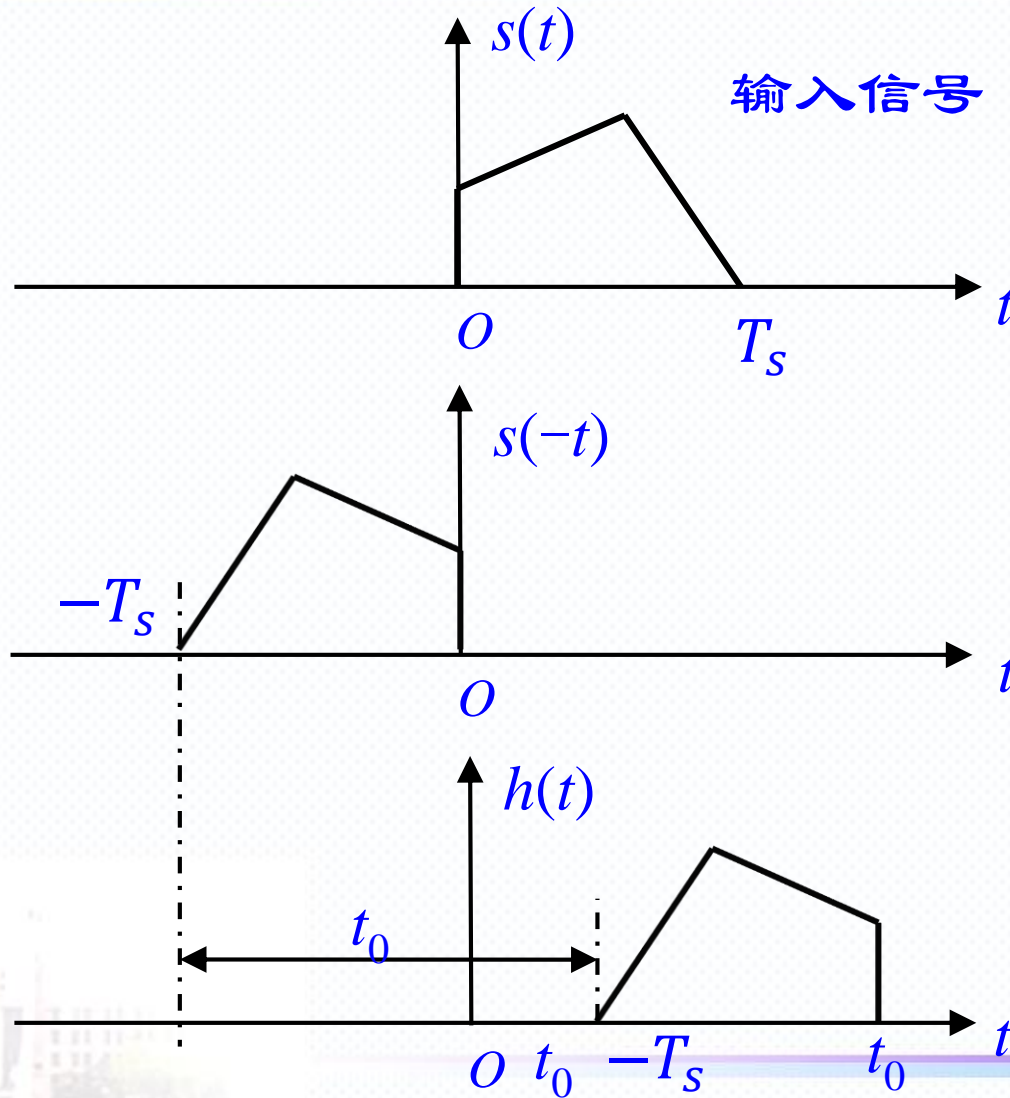
匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_M(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} kS^*(\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k \int_{-\infty}^{\infty} s(t') e^{-j\omega t'} dt' \right]^* e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0+t')} d\omega \right] s(t') dt' \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \delta[t' - (t_0 - t)] s(t') dt' \end{aligned}$$

根据冲激函数性质

$$h(t) = ks(t_0 - t)$$

匹配滤波器的冲激响应



匹配滤波器输出响应



输出响应 $y(t)$

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t')h(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t')ks(t_0-t')dt'$$

令 $\tau = t - t'$,

$$y(t) = k \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)ks(\tau + t_0 - t)d\tau = kR(t_0 - t) = \mathbf{kR(t - t_0)}$$

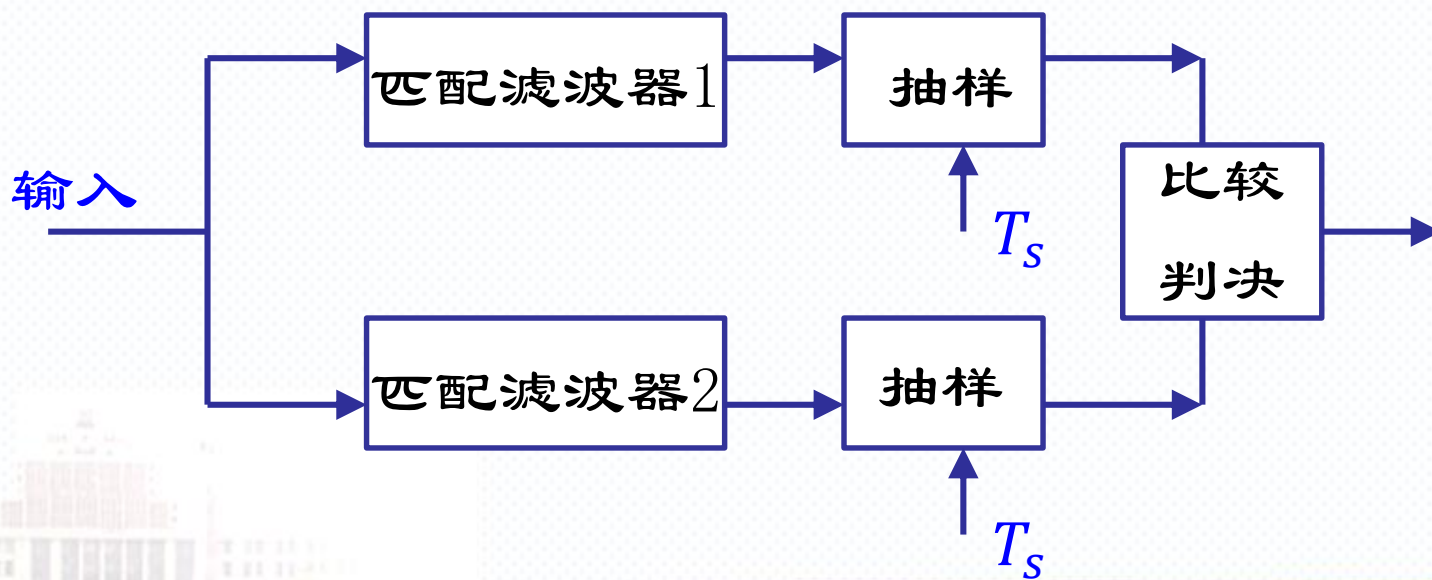
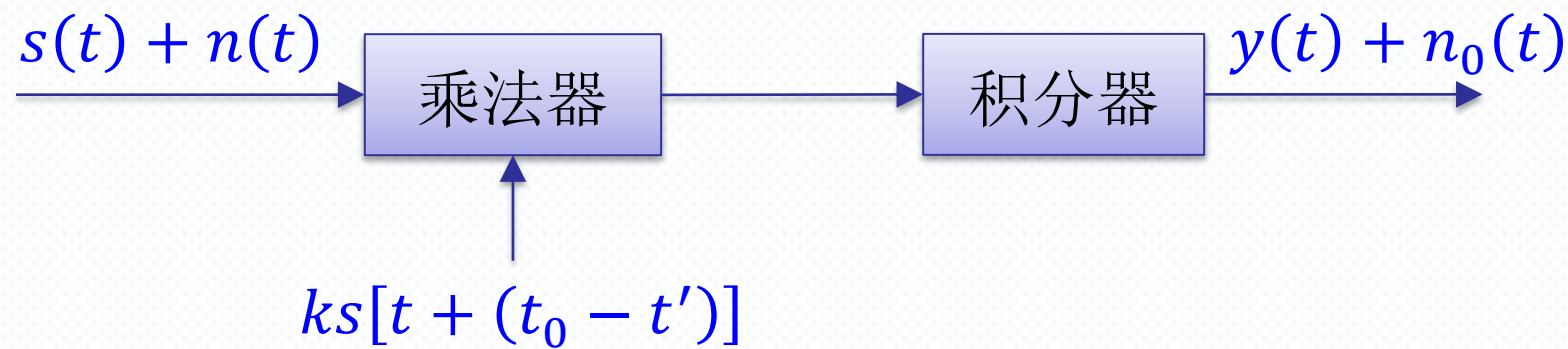
在 $t = t_0$ 时刻取最大值

$$\max[y(t)] = y(t = t_0) = kR(0) = k \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = kE$$

- 输出噪声

$$n_0(t) = kR_{sn}(t - t_0)$$

相关接收机



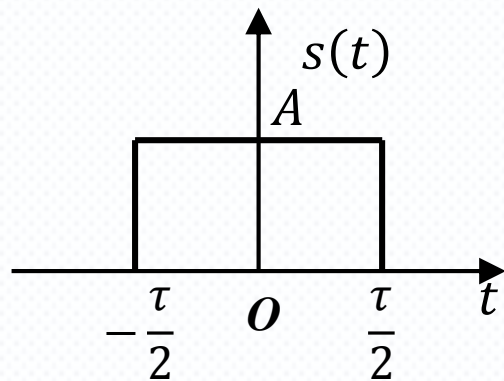
例题



- 例题4.1 设信号 $s(t)$ 为单个矩形脉冲，宽度为 τ ，高度为 A ，如图所示，试求其匹配滤波器的传递函数及输出响应。

- 解：根据图示，信号 $s(t)$ 表示为

$$s(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



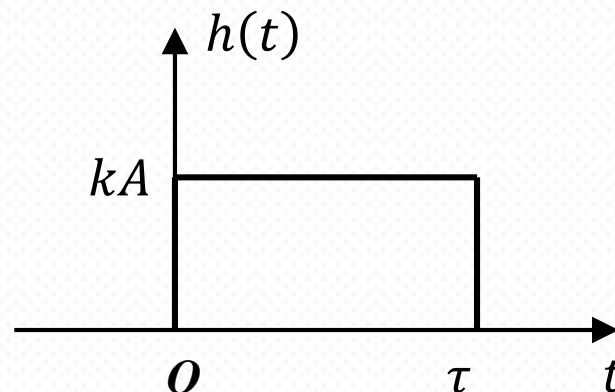
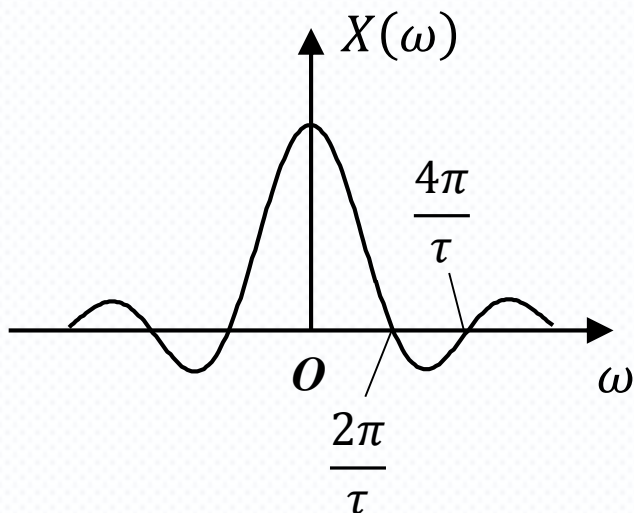
$s(t)$ 的频谱密度函数为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

匹配滤波器传递函数为

$$H_M(\omega) = kA\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega t_0}$$

例题



冲激响应为 (选择 $t_0 = \tau/2$)

$$h(t) = ks(t_0 - t) = \begin{cases} kA, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$x(t)$ 的自相关函数为

$$R(t) = \begin{cases} A^2(t + \tau) & -\tau \leq t \leq 0 \\ A^2(\tau - t) & 0 \leq t \leq \tau \end{cases}$$

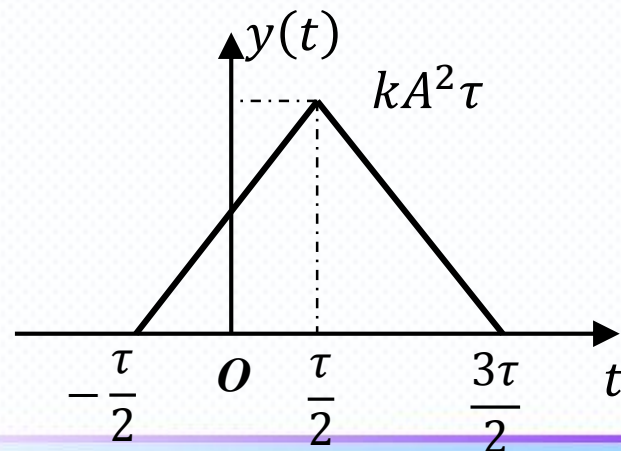
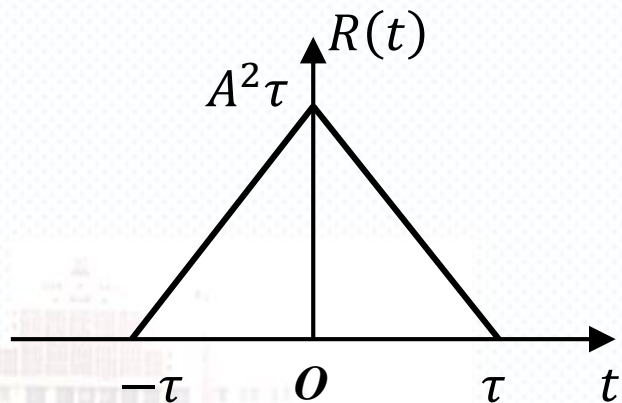
例题



输出响应

$$y(t) = kR(t - t_0) = kR\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$
$$= \begin{cases} kA^2\left(\frac{\tau}{2} + t\right) & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ kA^2\left(\frac{3\tau}{2} - t\right) & \frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{3\tau}{2} \end{cases}$$

当 $t = t_0 = \tau/2$ 时，输出信号 $y(t) = kA^2\tau$

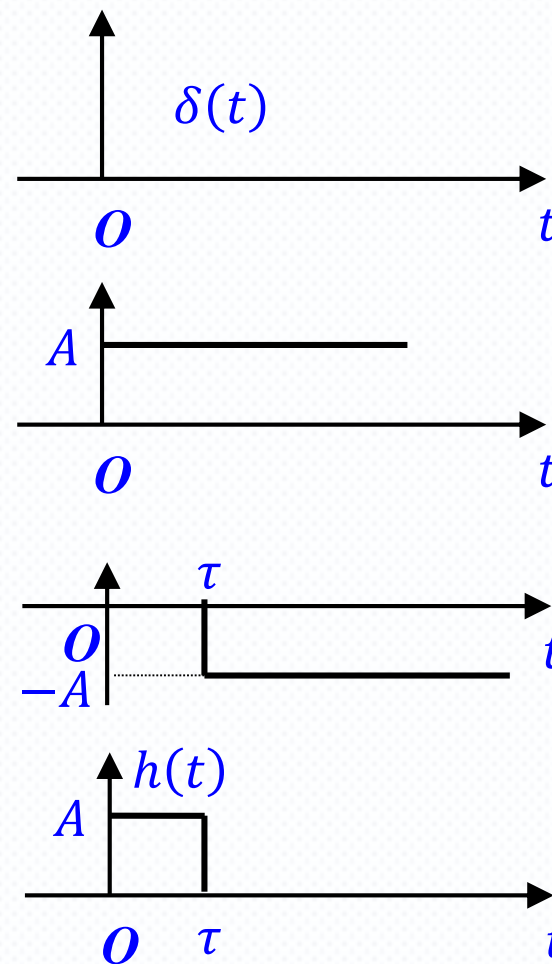
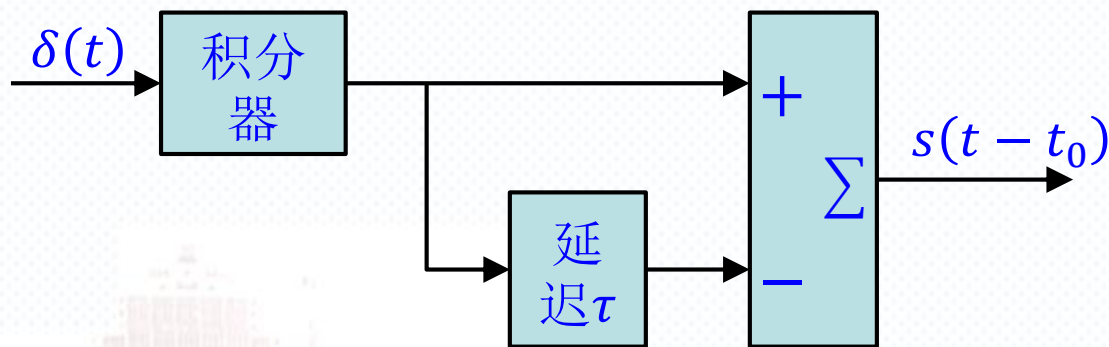


例题

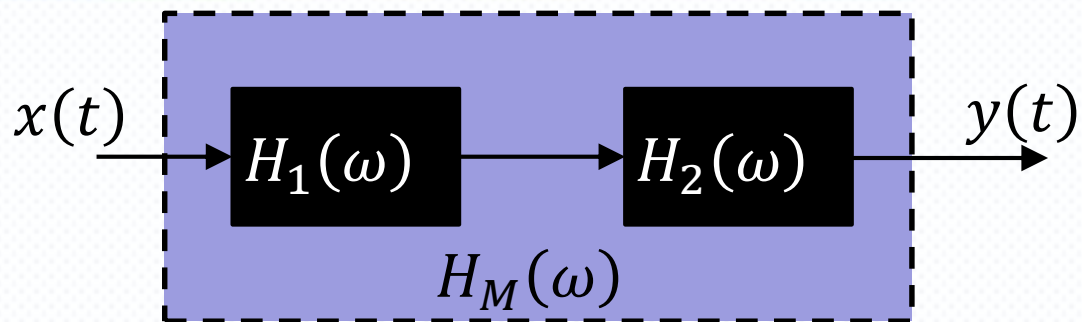


• 矩形脉冲的匹配滤波器

$$\begin{aligned} H_M(\omega) &= A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} e^{-j\omega\tau/2} \\ &= A \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} e^{-j\omega\tau/2} \\ &= \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) \end{aligned}$$



非白噪声时的匹配滤波器



• Step 1 噪声白化

$$|H_1(\omega)|^2 P_1(\omega) = \frac{n_0}{2}$$

$P_1(\omega)$ —— 噪声功率谱密度（不为 $n_0/2$ ）

一级传递函数 $|H_1(\omega)|^2 = \frac{n_0/2}{P_1(\omega)}$

信号频谱变为 $H_1(\omega)X(\omega)$

非白噪声时的匹配滤波器



- **Step 2** 对一级输出匹配滤波

$$H_2(\omega) = k[H_1(\omega)X(\omega)]^* e^{-j\omega t_0}$$

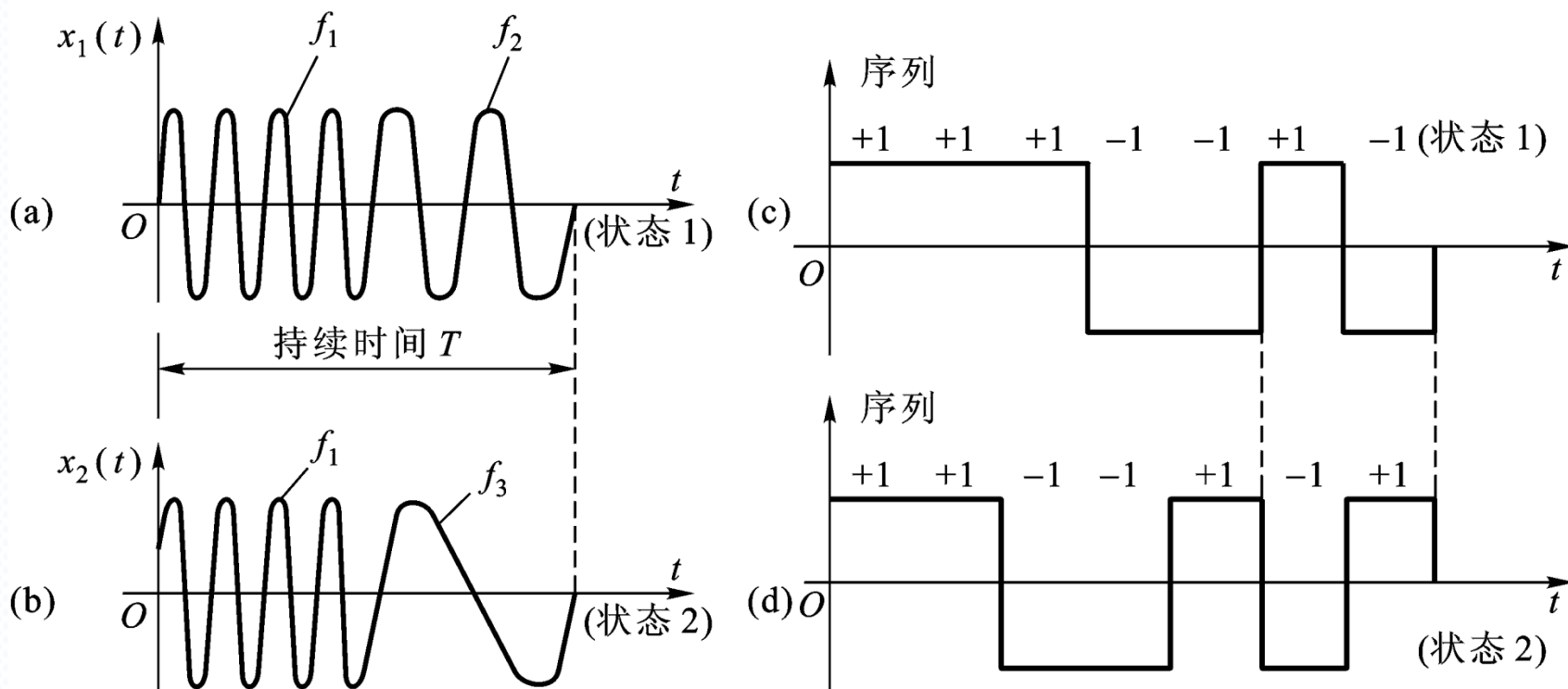
系统总传递函数

$$\begin{aligned} H_M(\omega) &= H_1(\omega)H_2(\omega) = H_1(\omega)k[H_1(\omega)X(\omega)]^* e^{-j\omega t_0} \\ &= k|H_1(\omega)|^2 X^*(\omega) e^{-j\omega t_0} = \frac{kn_0 X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{2P_1(\omega)} \end{aligned}$$

滤波器输出的最大信噪比为

$$\rho_{0max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{P_1(\omega)} d\omega$$

4.3 信号单元的相关函数



4-8

信号单元波形图

4.3.2 波形信号单元的相关函数



设信号单元是**能量信号**，则自相关函数定义为：

$$\beta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

互相关函数为：

$$\beta_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)x_j(t+\tau)dt$$

对**周期信号**，自相关函数为：

$$\beta(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

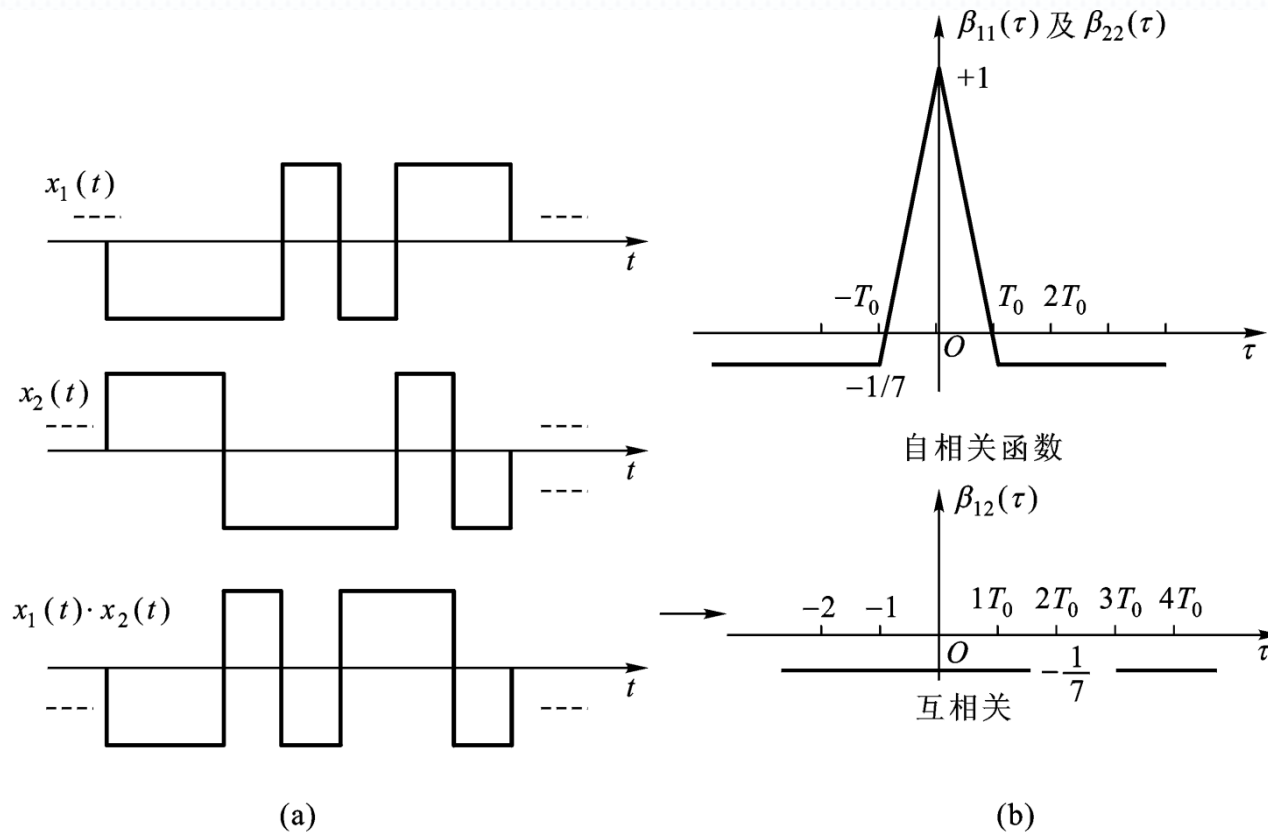
互相关函数为：

$$\beta_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)x_j(t+\tau)dt$$

4.3.2 波形信号单元的相关函数



例：设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是周期信号单元，其自相关函数和互相关函数波形如图所示。



4-9

4.3.3 序列信号单元的相关函数



序列元素（码元）：

序列信号单元是由符号按一定的顺序排列构成的，组成序列信号单元的符号称为序列元素（码元）。

可以属于 $\{0, 1\}$ ，如： $\{x_i\}=\{0101001100\}$ ；

或可以属于 $\{+1, -1\}$ ，如： $\{x_j\}=\{+1+1+1-1+1-1-1\}$ 。

序列长度：信号单元中所包含的码元的个数，用 L 表示。

如 $\{x_i\}$ 的长度为 $L=10$ ，而 $\{x_j\}$ 的长度 $L=7$ 。

周期序列：若由一段序列按次序重复循环出现构成一个无限长的序列，称为周期序列，其周期为重复循环的序列的长度。

4.3.3 序列信号单元的相关函数



- ✓ 非周期序列信号单元的相关函数的运算中，假定序列单元以外（即信号单元的前后）各位上都空无所有。
- ✓ 对周期序列信号单元，则考虑序列单元是周期重复出现的。

对元素属于 $\{+1, -1\}$ 、长度为 L 的非周期序列

自相关函数
$$\beta_{ii}(l) = \sum_{k=1}^{L-l} x_{ik} \cdot x_{ik+l}$$

式中， l 为相对移位的码元个数，且 $l < L$ ； x_{ik} 为序列 $\{x_i\}$ 中第 k 个码元。

互相关函数
$$\beta_{ij}(l) = \sum_{k=1}^{L-l} x_{ik} \cdot x_{jk+l}$$

4.3.3 序列信号单元的相关函数



对元素属于 $\{+1, -1\}$ 、周期为 L 的周期序列

自相关函数
$$\beta_{ii}(l) = \sum_{k=1}^L x_{ik} \cdot x_{ik+l}$$

自相关函数的归一化值定义为：

$$\rho_{ii}(l) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_{ik} \cdot x_{ik+l}$$

它是无量纲的，只反映相关函数的相对值。在 $l=0$ 取最大值，即

$$\rho_{ii}(0) = 1$$

4.3.3 序列信号单元的相关函数



考虑到在多种发送状态时，系统一般工作在同步状态，即 $l=0$ ，这时序列 $\{x_i\}$ 、 $\{x_j\}$ 的互相关值为：

$$\beta_{ij}(0) = \sum_{k=1}^L x_{ik} \cdot x_{jk}$$

归一化值的互相关系数为：

$$\rho_{ij}(0) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L x_{ik} \cdot x_{jk}$$

4.3.3 序列信号单元的相关函数



对元素属于 $(0, 1)$ 二元域序列，计算序列相关函数的方法：

方法一

把 $(0, 1)$ 元素变换为 $(+1, -1)$ 元素，然后再按元素属于 $(+1, -1)$ 的序列信号的相关函数的计算方法进行计算。

方法二

在 $(0, 1)$ 域上直接计算相关值。对应于 $(+1, -1)$ 域上相关函数的计算，在 $(0, 1)$ 域内可以把 $(+1, -1)$ 域中的乘号变为模2(mod2)加号，将求和号变为对应元素的同号的个数(A)减去异号的个数(D)。

4.3.3 序列信号单元的相关函数



$$\begin{aligned} (+1) \quad (+1) &= (+1) \\ (+1) \quad (-1) &= (-1) \\ (-1) \quad (-1) &= (+1) \\ (-1) \quad (+1) &= (-1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \\ 1 \oplus 0 &= 1 \end{aligned}$$

乘法

模2加

自 (互) 相关函数 $\beta_{ii}(l) = A - D$

自 (互) 相关系数 $\rho_{ii}(l) = \frac{A - D}{A + D}$

4.3.3 序列信号单元的相关函数



例4.2 设两个非周期序列分别为 $\{x_i\} = \{111100010011010\}$, $\{x_j\} = \{111000100110101\}$, 试计算同步状态时它们的互相关值。

解:

$\{x_i\}$	111100010011010	$L=15$
\oplus		
$\{x_j\}$	111000100110101	$L=15$

模2加结果: 000100110101111

$$A=7, D=8$$

互自相关函数 $\beta_{ij}(0) = A - D = 7 - 8 = -1$

互相关系数 $\rho_{ij}(0) = \frac{A - D}{A + D} = \frac{-1}{7 + 8} = -\frac{1}{15}$

4.4 鸟声信号单元



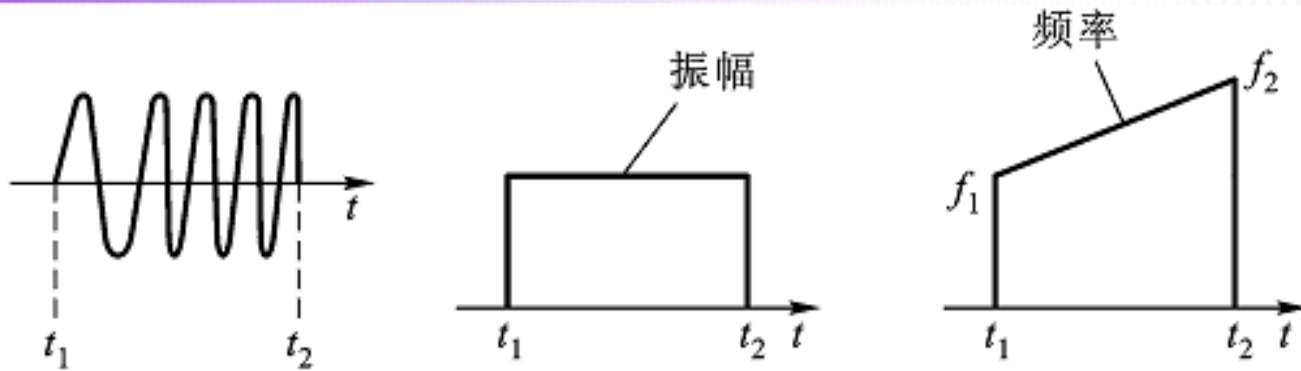
鸟声信号是在第二次世界大战后期，为了解决雷达和水声技术中既要有大的信号能量又要求高分辨率的矛盾而设计出来的较为理想的信号单元。是非周期的波形信号单元。

4.4.1 鸟声信号的时域表示

鸟声信号是在一定持续时间内的线性调频信号单元。

它的瞬时频率的变化和鸟声相似，故称之为鸟声信号。

4.4.1 鸟声信号的时域表示



$$x(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

式中， ω_0 为信号的中心角频率，它是常数。 μ 为角频率的扫描速率，单位为 rad/s^2 。

4.4.1 鸟声信号的时域表示



瞬时相位为：
$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2$$

瞬时角频率为：
$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \mu t$$

角频率从 $\omega_0 - \frac{1}{2} \mu T$ 到 $\omega_0 + \frac{1}{2} \mu T$ 变化

变化范围为： $W = \mu T$

扫频宽度为： $B = \mu T / 2\pi$ 赫兹

4.4.2 鸟声信号的频谱



鸟声信号单元复数信号形式:

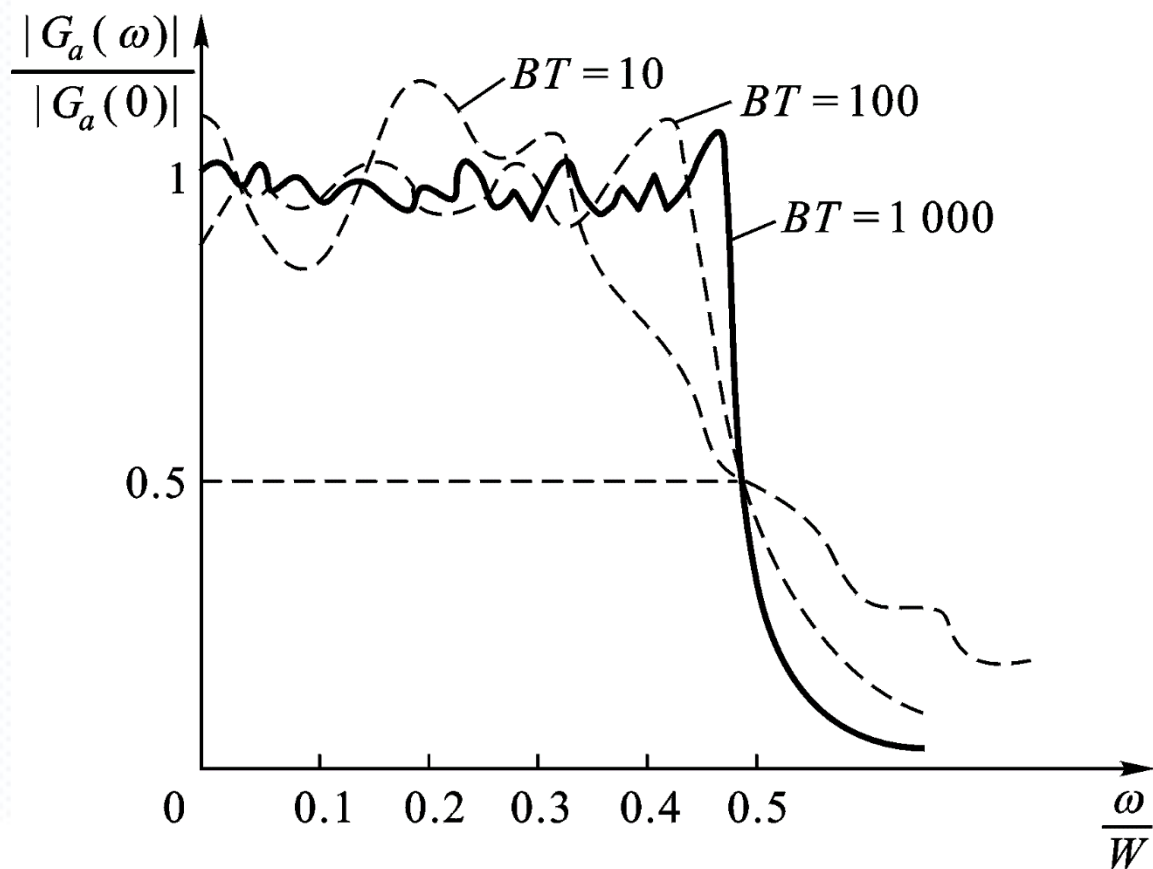
$$\xi(t) = Ae^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\mu t^2/2} = a(t)e^{j\omega_0 t}$$

式中, $a(t) = Ae^{j\mu t^2/2}$ 为复包络信号。

如果满足 $\mu T < \omega_0$, 则鸟声信号为窄带信号。这样只要得到复包络的频谱后, 移频便可得到鸟声信号的频谱。

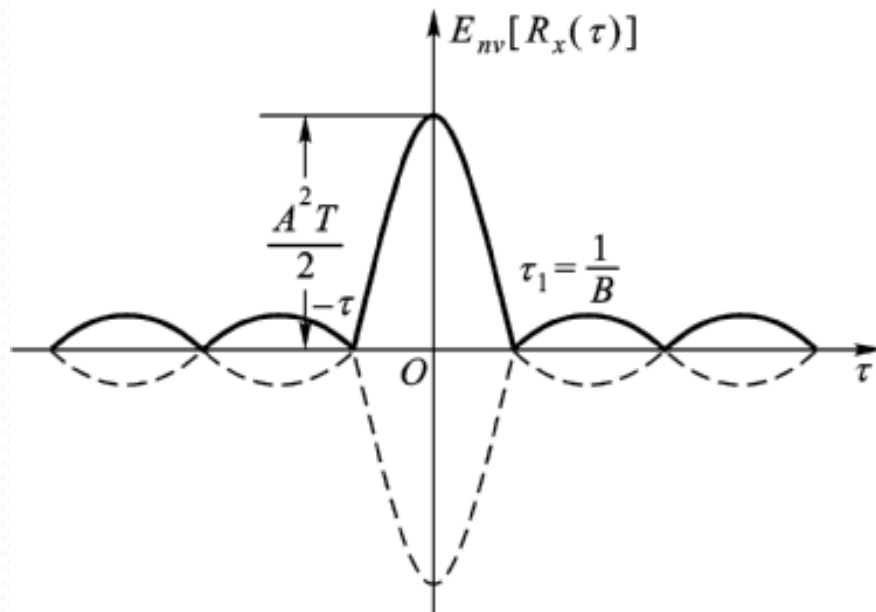
$$G_\xi(\omega) = G_a(\omega - \omega_0)$$

4.4.2 鸟声信号的频谱



4-11

4.4.3 鸟声信号单元的自相关函数



$$2\tau_1 = \frac{4\pi}{\mu T}$$

这样，鸟声信号单元的脉冲压缩比为

$$r_c = \frac{T}{\tau_1} = T / \frac{2\pi}{\mu T} = \frac{\mu T^2}{2\pi} = \frac{WT}{2\pi} = BT$$

其中 $B = \mu T / 2\pi$ 为扫频宽度

4.5 巴克(Barker)序列

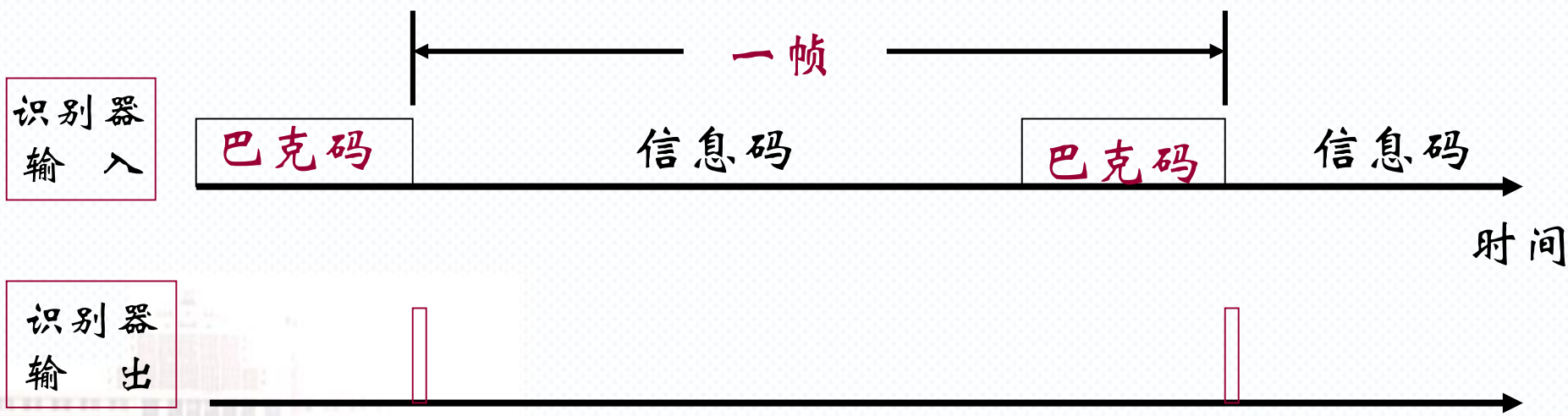


1952年，英国人巴克(R.H.Barker)为解决数字通信系统中的同步问题，首次提出了一种可靠的识别序列——巴克码。

巴克序列(巴克码)：有限长的非周期序列信号单元。

元素取值：(+1, -1)

巴克序列：良好的自相关性以及与其它普通序列良好的互可分辨性。优选信号单元之一，应用十分广泛。



4.5.1 巴克序列及其自相关函数



对巴克序列，首先定义它的自相关函数及其取值，然后按所要求的条件去寻找符合条件的序列。

巴克序列自相关函数定义为

$$\beta(l) = \sum_{k=1}^{L-l} x_k x_{k+l} = \begin{cases} L & l=0 \\ 0, \pm 1 & 0 < l \leq L \\ 0 & l > L \end{cases}$$

4.5.1 巴克序列及其自相关函数

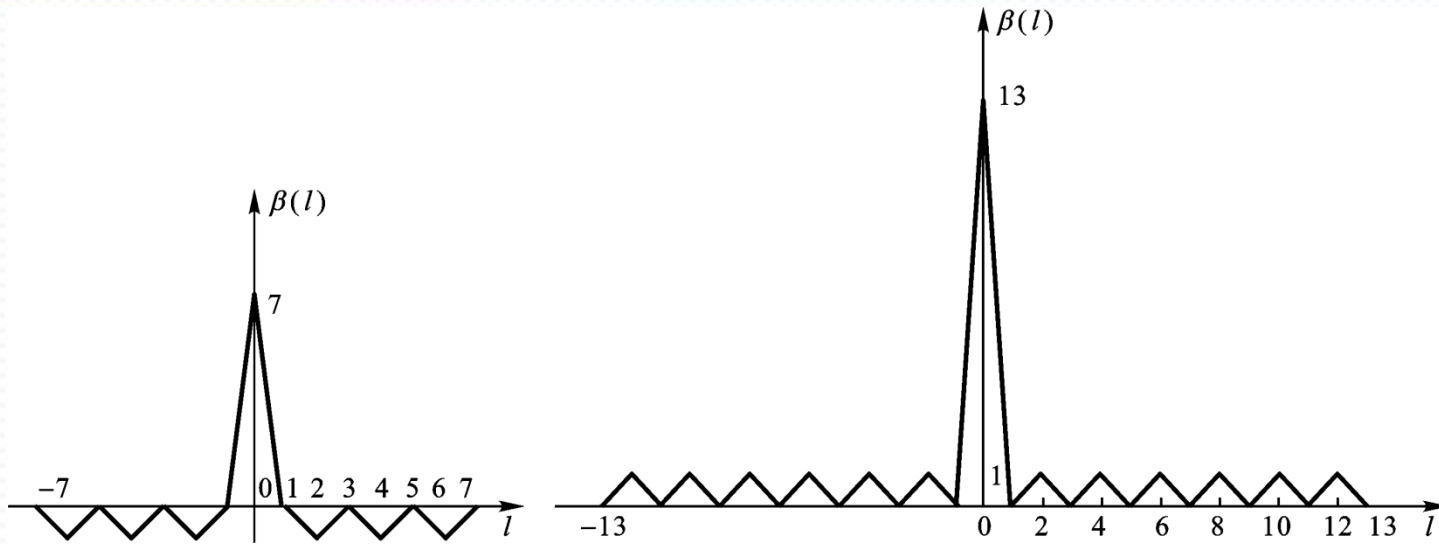


表4.1 (表中“+”代表+1, “-”代表-1)

L	序列	L	序列
1	+	5	+++ - +
2	++, +-	7	+++ - - + -
3	++ -	11	+++ - - - + - - + -
4	+++ -, ++ - +	13	++++ - - ++ - + - +

用试探法找到的码长为1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13的8种基本的巴克序列, (但1952年, 巴克在相关函数值为0, -1的条件下, 只找到了码长为3, 7, 11的三种。)

4.5.1 巴克序列及其自相关函数



(a) B-7 码自相关函数

(b) B-13 码自相关函数

4-14

$L=7$ 及 $L=13$ 时的巴克码(B-7及B-13)自相关函数波形

从图中看出巴克码自相关函数主瓣宽为一个码的宽度(平均宽度)。因而巴克码具有良好的脉冲压缩特性。

4.5.2 巴克序列的演变



演变的目的：得到8种基本的巴克序列以外长度更长的序列。

逆序列：将巴克序列首尾顺序逆转，构成逆序列。

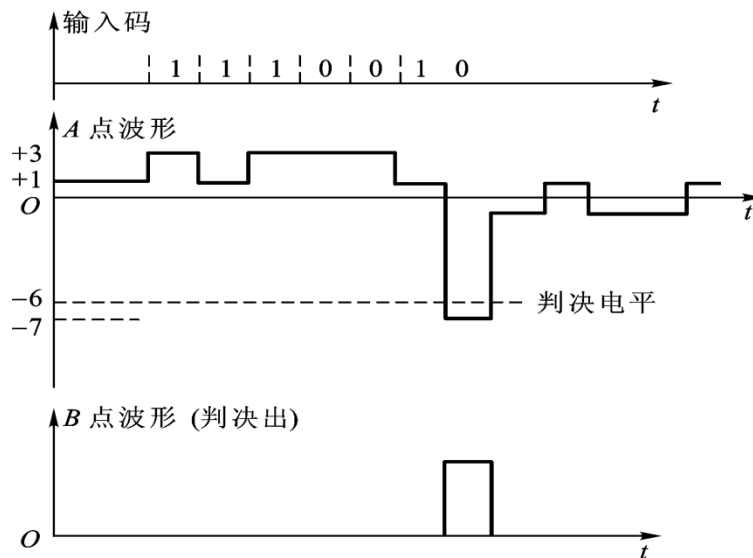
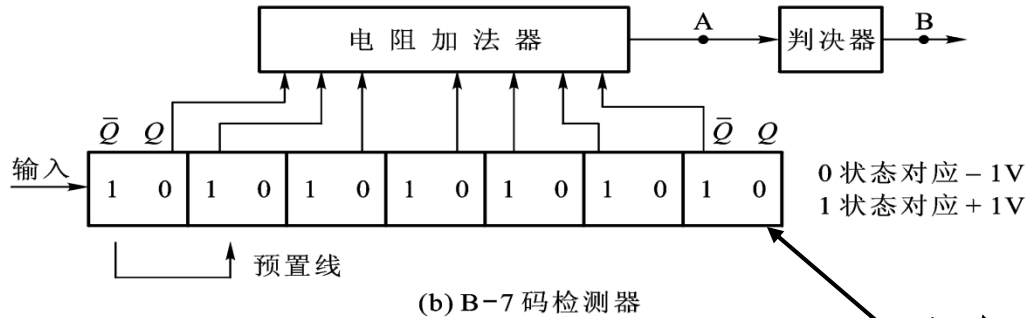
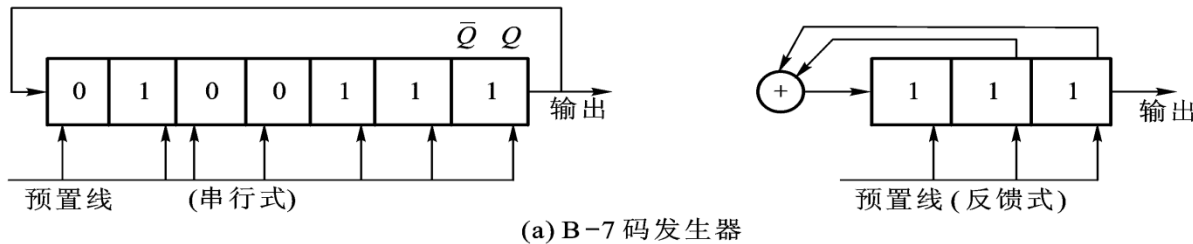
反序列：将基本巴克序列乘以-1所构成的反符号序列。

演变的方法：对逆序列、反序列进行组合；复数法演变等。

例1：对 $L=3$ 的巴克码 (+ + -)，串排两次，再串一反符号序列 (- - +)，得到 $L=9$ 的序列。它的自相关函数值如表所示。（组合演变，新序列为：+ + - + + - - - +）

$\beta(l)$	9	0	-3	0	1	0	-3	0	1
l	0	1	2	3	4	5	6	7	8

4.5.3 巴克序列的检测问题



移位寄存器

巴克序列前后是全“0”的序列时，检测器的输出特性

4.5.3 巴克序列的检测问题



漏同步：由于误码，使得巴克序列出现错误，这时检测器将不输出同步信号。

假同步：在随机出现的1, 0码流中可能会以某种概率出现与巴克码相同码型。这时检测器将输出错误同步信号。

以B-7码 ($L=7$) 为例，**假同步概率为 $1/128$** 。

调节判决电平，可以调节检测时错判的概率。巴克码作为同步码时，调节判决电平可以调节漏同步。

实际系统中，还可采取一定措施降低假同步概率。

4.6 m 序列信号单元



1955~1956年 由D.A.Huffman等人提出，是一种优选周期序列信号单元。

m 序列：循环周期最长的线性反馈移位寄存器序列。

m 序列可以用线性反馈移位寄存器产生，它的生成是有规律的，但它具有随机二进制序列信号的性质， m 序列是一种伪随机序列（PN:Pseudo-Noise）。

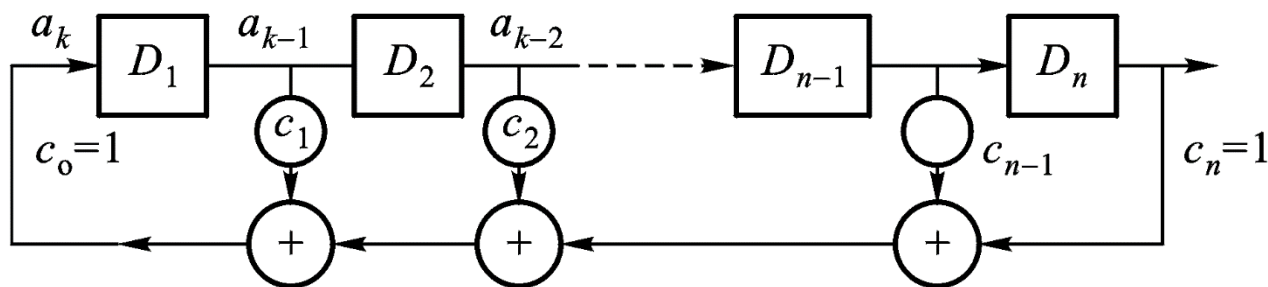
由于 m 序列自相关函数具有良好的脉冲压缩特性，因而，在雷达、通信、测量以及系统识别等领域内， m 序列得到十分广泛的应用。

4.6.1 m 序列的产生



线性反馈移位寄存器系统结构

由 n 级 D 触发器（作为移位寄存单元）、若干个模2和加法器以及反馈连线构成。



4-17

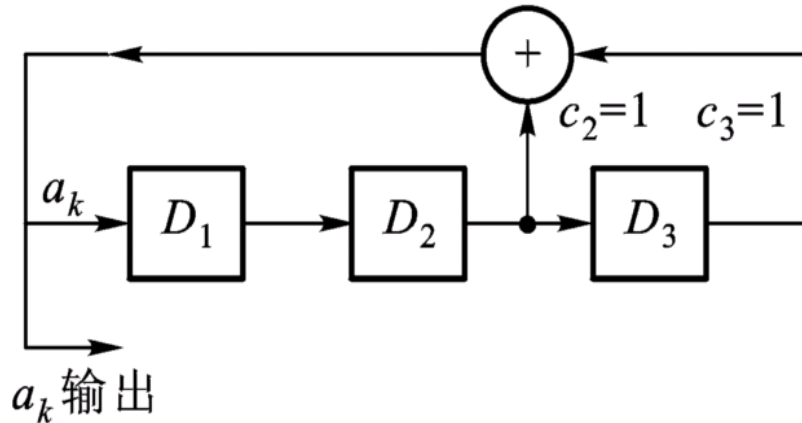
反馈系数为：

线性反馈移位寄存器系统结构

$\{c_0 c_1 c_2 c_3 \dots c_n\}$

图中， c_i 为反馈系数，它代表某一级 D_i 是否参加反馈的模2加运算。如果 D_i 参加反馈，则 $c_i=1$ ，否则 $c_i=0$ 。

4.6.1 m 序列的产生



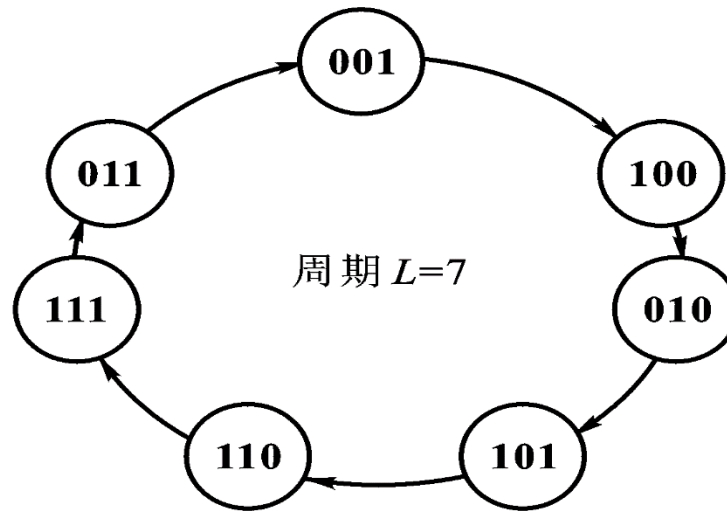
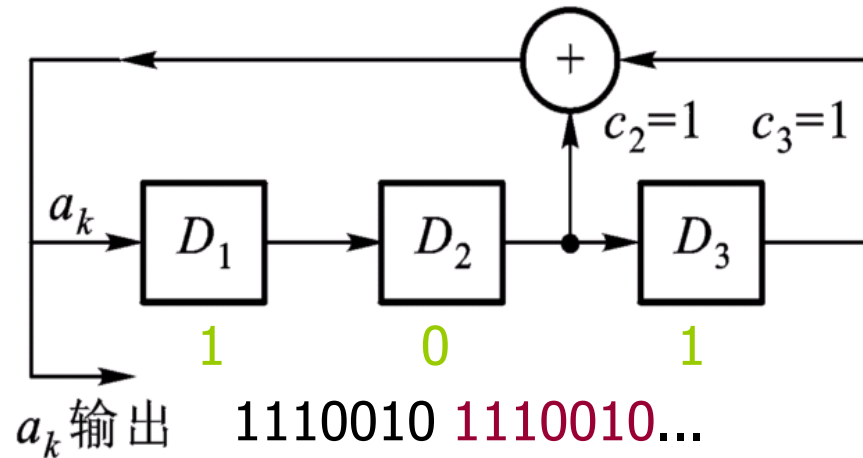
设三级寄存器的初始状态为 $D_1=1$ ， $D_2=0$ ， $D_3=1$

三级移位寄存器系统

反馈系数 $c_1=0$ ， $c_2=1$ ， $c_3=1$ ，即 c_i 的组合为 $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}=\{1011\}$

4.6.1 m 序列的产生

CP 节拍	D_1	D_2	D_3
0	1	0	1
1	1	1	0
2	1	1	1
3	0	1	1
4	0	0	1
5	1	0	0
6	0	1	0
7	1	0	1



状态演变过程

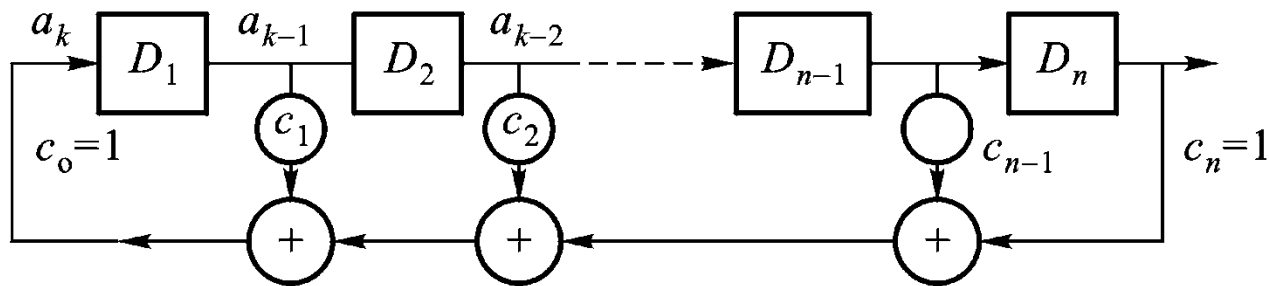
4.6.1 m 序列的产生



递推公式

已知序列的前 n 个元素为 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ ，或 n 级 D 触发器的初态和反馈系数 c_i ，则可以用公式来计算下一个状态序列的输出 a_k (即 $k=n+1$)。

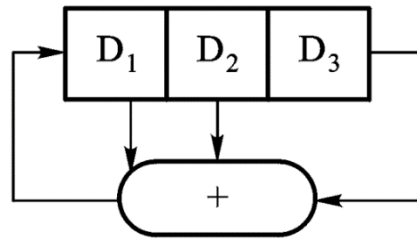
设第一级触发器 D_1 的反馈输入为 a_k ，则 D_1 输出为 a_{k-1} ， D_2 输出为 a_{k-2} ， D_n 输出 a_{k-n} ，则求 a_k 的递推公式为



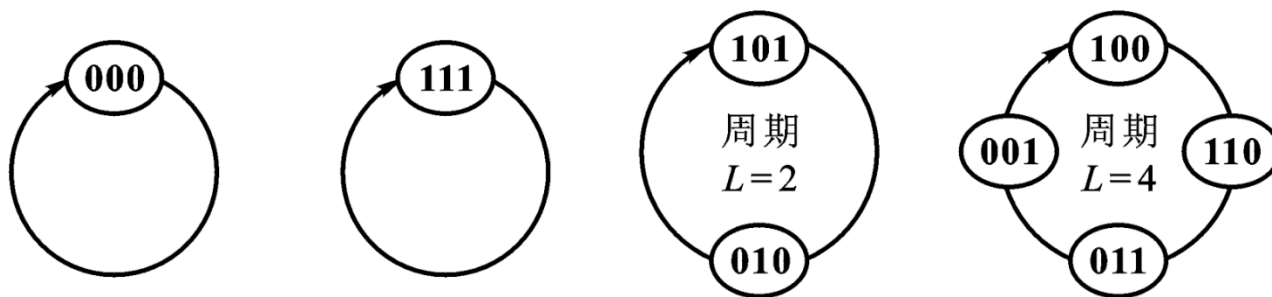
$$a_k = \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i} \quad (\text{模2和})$$

4.6.1 m 序列的产生

反馈移位寄存器的自持运动所产生的序列主要取决于反馈系数的组合情况。在级数相同的线性反馈移位寄存器系统中，不同的组合可以使系统产生不同周期的序列。



(a)



静止状态

(b) 输出: 101010... 输出: 11001100...

4.6.1 m 序列的产生



从以上的分析可看出，由三个D触发器构成的移位寄存器的组合状态共有8个。

当为 $\{c_i\}$ 为 $\{1111\}$ 时，系统的自持运动有三种不同的循环过程，即全“0”或全“1”的静态状态，经历010和101二种状态的循环过程及经历100、110、011和001四种状态的循环过程。产生序列的周期最长为 $L=4$ 。

✓ 而在 $\{c_i\}$ 为 $\{1011\}$ 的情况下，系统只有一种循环过程，它包括7种状态（全“0”时仍为静止状态）。可见在这种情况下，系统的自持运动经历了除全“0”外的所有状态，这时产生的移位寄存器序列的**周期最长**（ $n=3$ 时 $L=2^3-1$ ）--- m 序列。

4.6.1 m 序列的产生



一般地， n 级D触发器构成的线性反馈移位寄存器系统产生的 m 序列的周期长为

$$L = 2^n - 1$$

反馈移位寄存器序列的周期总是满足 $L \leq 2^n - 1$ 的。要使移位寄存器产生 m 序列，反馈系数应采用适当的组合。

不同宗序列: 周期相同，但元素排序不同的序列。

如 $n = 3$ 时， c_i 为 $\{1011\}$ 或 $\{1101\}$ 都可以产生 m 序列，周期相同，但排序根本不同。

4.6.2 特征多项式与序列多项式



特征多项式

为了讨论线性反馈移位寄存器序列与反馈系数的关系，可以把反馈系数所处的位置用一个多项式的系数来代表，该多项式称为**特征多项式**。

$$\begin{aligned} f(z^{-1}) &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n} \\ &= \sum_{i=0}^n c_i z^{-i} \end{aligned}$$

对应反馈系数为：
 $\{c_0 c_1 c_2 \dots c_n\}$

式中， z^{-i} 表示 c_i 所处的位置， c_i 只能取0或1。在一般的系统中， c_0 和 c_n 总是等于1的。

如： c_i 为{1011}时，特征多项式为：

$$f(z^{-1}) = 1 + z^{-2} + z^{-3}$$

4.6.2 特征多项式与序列多项式



序列多项式

根据同样的思想，把递推公式所产生的序列按元素的位置用多项式表示出来，该多项式定义为**序列多项式**。

$$\begin{aligned} G(z^{-1}) &= a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \end{aligned}$$

式中， z^{-k} 表示延迟 k 位码元， a_k 只能取“0”或“1”。

$$\text{其中： } a_k = \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i}$$

4.6.2 特征多项式与序列多项式



特征多项式与序列多项式的关系

$$\begin{aligned} G(z^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n c_i a_{k-i} \right) z^{-(k-i)} z^{-i} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-i} z^{-(k-i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} \left[a_{-i} z^i + a_{-i+1} z^{i-1} + \cdots + a_{-1} z^1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} [a_{-i} z^i + a_{-i+1} z^{i-1} + \cdots + a_{-1} z^1] + \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} G(z^{-1}) \end{aligned}$$

4.6.2 特征多项式与序列多项式



将上式移项整理，得

$$\left[1 + \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} \right] G(z^{-1}) = \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} [a_{-i} z^i + a_{-i+1} z^{i-1} + \cdots + a_{-1} z^1]$$

由于 $C_0 = 1$ ，故上式中左边为特征多项式，因而有

$$f(z^{-1})G(z^{-1}) = \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} [a_{-i} z^i + a_{-i+1} z^{i-1} + \cdots + a_{-1} z^1]$$

令上式右边的多项式为 $h(z^{-1})$ ，即

$$h(z^{-1}) = \sum_{i=1}^n c_i z^{-i} [a_{-i} z^i + a_{-i+1} z^{i-1} + \cdots + a_{-1} z^1]$$

式中， $h(z^{-1})$ 称为系统的**初态多项式**，它取决于电路的初始状态。

4.6.2 特征多项式与序列多项式



故有：
$$G(z^{-1}) = \frac{h(z^{-1})}{f(z^{-1})}$$

- ✓ 在已知系统初始状态的情况下，可以用多项式除法（在二元有限域上）来求得输出序列，其结果与递推公式求到的序列相同。

例如，在 $n = 3$ 的线性反馈移位寄存器系统中，
设 $a_{-1} = a_{-3} = 1$ ， $a_{-2} = 0$ ，则 $h(z^{-1}) = 101$ ，
若 c_i 为{1011}，则 $f(z^{-1}) = 1 + z^{-2} + z^{-3}$ ，
在这种情况下，按上式做系数除法…

4.6.3 m 序列的产生条件



定理4.6.1 若序列 $\{a_k\}$ 是 n 级线性反馈移位寄存器产生的周期最长($L = 2^n - 1$)的序列— m 序列, 则系统的特征多项式应为 n 次**本原多项式**。

n 次本原多项式应满足以下条件:

- (1) $f(z^{-1})$ 为既约多项式;
- (2) $f(z^{-1})$ 应能整除 $z^{-L} + 1$, $L = 2^n - 1$;
- (3) $f(z^{-1})$ 不能整除 $z^{-P} + 1$, P 为正整数, 且 $P < L$ 。

此定理描述了产生 m 序列的**充要条件**。可以证明, $f(z^{-1})$ 应是既约多项式。如果不是, 则产生的序列的周期 $L < 2^n - 1$ 。

4.6.3 m 序列的产生条件



证明： 既约多项式是指不能再因式分解的多项式。若为 n 次可分解的多项式（设可分解为两个因式），则

$$f(z^{-1}) = f_1(z^{-1}) f_2(z^{-1})$$

此时产生的序列多项式为：

$$G(z^{-1}) = \frac{h(z^{-1})}{f(z^{-1})} = \frac{h_1(z^{-1})}{f_1(z^{-1})} + \frac{h_2(z^{-1})}{f_2(z^{-1})}$$

$$= G_1(z^{-1}) + G_2(z^{-1})$$

$$G_1(z^{-1}) = \frac{h_1(z^{-1})}{f_1(z^{-1})}; \quad G_2(z^{-1}) = \frac{h_2(z^{-1})}{f_2(z^{-1})}$$

4.6.3 m 序列的产生条件



即 $G(z^{-1})$ 可视为两个序列之和。 $f_1(z^{-1})$ 所产生的序列周期 $L_1 \leq 2^{n_1} - 1$ 。 $f_2(z^{-1})$ 所产生的序列周期 $L_2 \leq 2^{n_2} - 1$ 。而两个周期序列之和的最小周期应为它们的最小公倍数。

即

$$L = LCM[L_1, L_2] \leq (2^{n_1} - 1)(2^{n_2} - 1) = 2^n + 1 - 2^{n_1} - 2^{n_2} \leq 2^n - 3 < 2^n - 1$$

可见，非既约的 $f(z^{-1})$ 不能产生 m 序列。

但既约多项式不一定都能产生 m 序列。

如： $f(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$ 是一个不能产生 m 序列既约多项式。

因为它不仅可以整除 $z^{-(2^4-1)} + 1$ ，而且还能整除 $z^{-5} + 1$ 。

4.6.3 m 序列的产生条件



n 次本原多项式可从 $(z^{-1})^{2^n-1} + 1$ 多项式的分解因式中去寻找。

例: 要得到 $n=4$ 次的本原多项式, 可以先将 $z^{-15} + 1$ 分解为

$$\begin{aligned} z^{-15} + 1 &= (z^{-4} + z^{-1} + 1)(z^{-4} + z^{-3} + 1)(z^{-1} + 1) \\ &\quad (z^{-4} + z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1)(z^{-2} + z^{-1} + 1) \end{aligned}$$

其中本原多项式为:

$$(z^{-4} + z^{-1} + 1) \quad (z^{-4} + z^{-3} + 1)$$

4.6.3 m 序列的产生条件



n 次本原多项式不只一个,其个数可用以下公式求得。

$$\lambda(n) = \frac{\varphi(2^n - 1)}{n}$$

式中, $\varphi(\cdot)$ 是欧拉(Euler)函数,它具有以下性质:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 1 \\ \prod_{i=1}^s \omega_i^{a_i-1} (\omega_i - 1) & \omega > 1 \end{cases}$$

式中, ω_i 是 ω 的素因数; a_i 为 ω_i 的重次; s 为不同素因数的个数

4.6.3 m 序列的产生条件



例：当 $n=6$ 时，有 $\omega=2^6-1=63$ ，而 $63=3^2 \times 7^1$ ，即有两个不同的素因素3和7，所以 $s=2$ 。这时，欧拉函数为

$$\varphi(2^6-1) = 3^{2-1} \times (3-1) \times 7^{1-1} \times (7-1) = 3 \times 2 \times 6 = 36$$

本原多项式的个数为

$$\lambda(6) = \frac{\varphi(2^6-1)}{n} = \frac{36}{6} = 6$$

虽然不同的 n 次本原多项式产生周期相同的序列，但这些序列在元素的排列次序上是不相同的。

不同宗序列：周期相同而元素次序不同的序列。

4.6.3 m 序列的产生条件



表 4.5 $\lambda(n) \sim n$ 的关系

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lambda(n)$	1	1	2	2	6	6	18	16	48	60	176	144	630	750	1800

表 4.6 部分本原多项式系数表

n	$L=2^n - 1$	本原多项式系数 ($1 C_1 C_2 \dots C_3$)	本原多项式范例
2	3	111	$f(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$
3	7	1011, 1101	$f(z^{-1}) = 1 + z^{-2} + z^{-3}$
4	15	10011, 11001	
5	31	100101, 110111, 111101	
6	63	1000011, 1100111, 1101101	
7	127	10000011, 10001001, 10001111, 10011101, 10111111, 11001011, 11010101, 11100101	
8	255	100011101, 100101011, 101011111, 101100011, 101100101, 101101001, 110000111, 111100111	

4.6.3 m 序列的产生条件



表4.7 较高次 n , 而项数为3的本原多项式

n	系数为1的幂	n	系数为1的幂	n	系数为1的幂
9	0,4,9	21	0,2,21	31	0,3,31
10	0,3,10	22	0,1,22	35	0,2,35
11	0,2,11	23	0,5,23	39	0,4,39
15	0,1,15	25	0,3,25	41	0,3,41
17	0,3,17	28	0,3,28	47	0,5,47
20	0,3,20	29	0,2,29	52	0,3,52

4.6.4 m 序列信号单元的性质

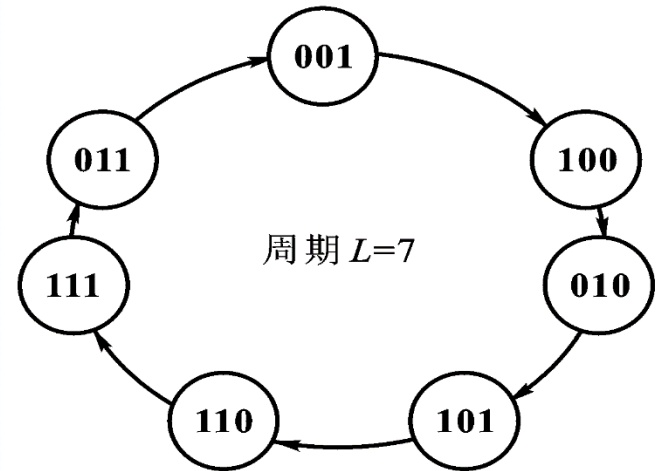
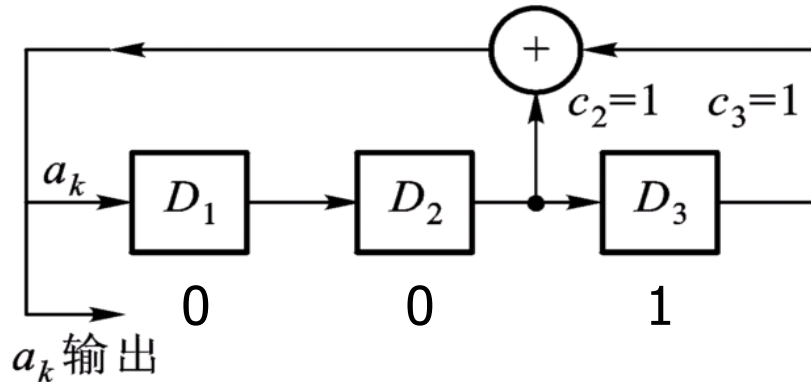


m 序列是一种十分重要的优选信号。它具有以下性质：

- (1) 移位--相加--移位特性（平移等价性）；
- (2) 伪随机序列性质；
- (3) 双值自相关特性；
- (4) 具有包线为 $(\sin x / x)^2$ 型线状功率谱。

4.6.4 m 序列信号单元的性质

(1) 移位--相加--移位特性 (平移等价性);



D_1 输出的序列为: 0101110 0101110...,

D_3 输出的序列为: 1001011 1001011...,

4-19

同宗不同相序列:由相同的 c_i 确定的具有不同相位的循环序列。

4.6.4 m 序列信号单元的性质



移位--相加--移位性质：将移位以后的两个 m 序列模2加，结果仍是一个 m 序列。此 m 序列是原 m 序列移位以后产生的序列，即：

$$m_k \oplus m_p = m_q, \quad k \neq p \neq q$$

原序列 0010111

① 0101110

④ 1110010

② 1011100

⑤ 1100101

③ 0111001

⑥ 1001011

⑦ 0010111

与原序列相同

例： $m_1 \oplus m_4 = m_2$ $m_2 \oplus m_5 = m_3$

4.6.4 m 序列信号单元的性质



(2) m 序列的伪随机序列性质

二进制随机序列的性质

①均衡性。序列中出现0和1的概率各占1/2。

②游程特性。

游程：指序列中连续出现相同符号的一段。这一段中包括的元素的个数称为游程长度 l 。

长度 $l=1$ 的游程个数趋于游程总数的 $1/2$ ，长度 $l=2$ 的游程个数趋于游程总数的 $1/2^2$...，长度为 l 的游程个数趋于游程总数的 $1/2^l$ 。

4.6.4 m 序列信号单元的性质



③二进制随机序列的自相关函数为 $\delta(\cdot)$ 函数。二进制随机序列的自相关函数定义为：

$$\rho(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{L-l} x_k x_{k+l}$$

且

$$\rho(l) = \begin{cases} 1, & l=0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

4.6.4 m 序列信号单元的性质



m 序列的伪随机性质

① 均衡性。

序列中“0”和“1”元素的个数在一个循环周期内趋于相等，只是“1”的个数比“0”的个数多一个。

例如：

$n=3$ ， c_i 为{1011}时， m 序列一个循环周期为：1001011，其中“1”的个数为4，“0”的个数为3。

$n=4$ ， c_i 为{10011}时， m 序列的一个循环周期为：100110101111000，其中“1”的个数为8，“0”的个数为7。

4.6.4 m 序列信号单元的性质



②游程特性。

m 序列中，游程的总数为 2^{n-1} 个，长度为 l 的游程个数约占序列中游程总数的 $1/2^l$ 。即长度为1的游程占1/2，长度为2的游程占1/4，长度为3的游程占1/8，等等，还有一个长度为 n 的连“1”游程和一个长度为 $n-1$ 的连“0”游程。

例： $n=4$ 的 m 序列为 111100011010010...

游程总数： $2^{n-1} = 2^3 = 8$ 个。

长度为1的游程数为4个，占总数的 $4/8 = 1/2$ ；

长度为2的游程数为2个，占总数的 $1/4$ ；

长度为3的游程数为1个，占游程总数的 $1/8 = 1/8$ 。

长度为4 (1111) 的游程数为1个，不符合这个规律。

4.6.4 m 序列信号单元的性质

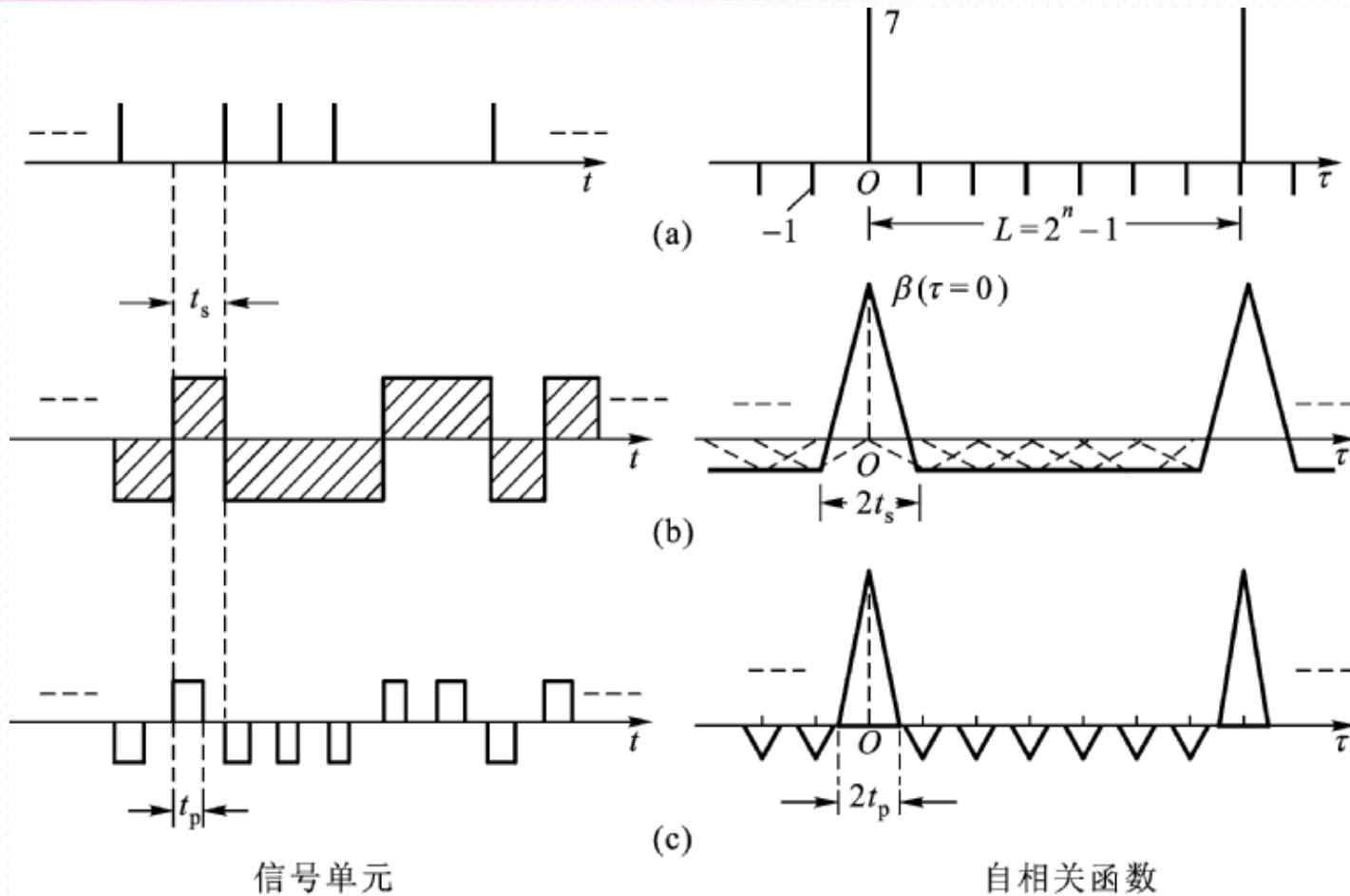


(3) m 序列的双值自相关特性

$$\beta_{ii}(l) = \begin{cases} L = 2^n - 1 & l \text{ 为 } 0 \text{ 或 } L \text{ 的整数倍} \\ -1 & l \text{ 为其它数} \end{cases}$$

$$\rho_{ii}(l) = \begin{cases} 1 & l \text{ 为 } 0 \text{ 或 } L \text{ 的整数倍} \\ -\frac{1}{L} & l \text{ 为其它数} \end{cases}$$

4.6.4 m 序列信号单元的性质



$L=7$ 的 m 序列信号波形及其自相关函数波形

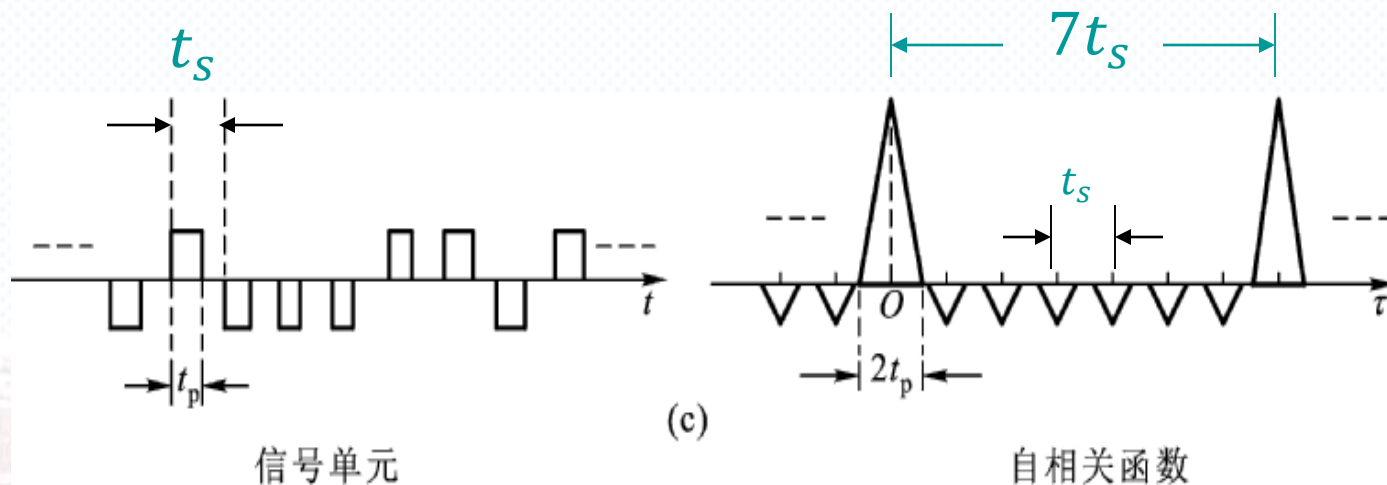
4.6.4 m 序列信号单元的性质



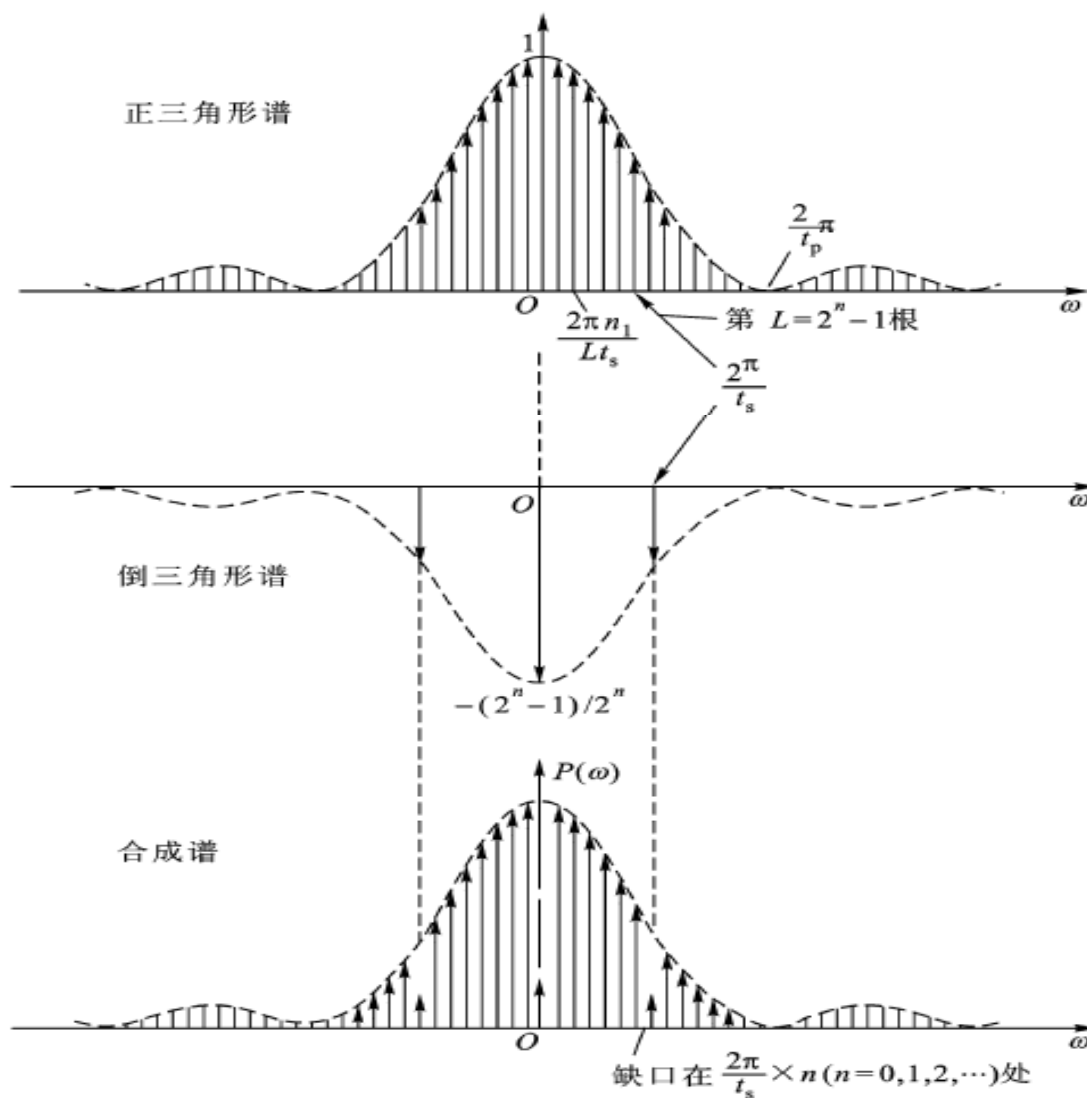
(4) m 序列具有包络线为 $(\sin x/x)^2$ 型的线状功率谱

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

以图4.22 (c) 为例，图中序列的自相关函数波形可分解为两个周期三角波的叠加。序列的频谱是这两个周期三角波频谱的相加。



4.6.4 m 序列信号单元的性质



4.6.4 m 序列信号单元的性质



讨论

(1) 在 $\omega_0 = 0, \pm \frac{2\pi}{Lt_s}, \frac{4\pi}{Lt_s}, \dots, m \frac{2\pi}{Lt_s}$ 处, 具有线状谱。

(2) 在谱线中, 每隔次 L 谐波就出现谱能量减小, 能量大小不是按原包络线规律下降, 而仅有原包络线强度的 $1/2^n$, 形成“缺口”。

(3) 功率谱包线按 $\left(\frac{\sin \omega t_p}{2} / \frac{\omega t_p}{2}\right)^2$ 变化, 在 $\omega = 2\pi/t_p$ 整数倍时出现包络线的零点。当码元采用全占空脉冲, 即 $t_p = t_s$ 时, “缺口”与零点重合。

4.6.5 非线性反馈移位寄存器序列— M 序列



M (大写) 序列: n 级非线性反馈移位寄存器系统产生的周期为 $L = 2^n$ 的序列。

在非线性反馈的情况下, n 级移位寄存器的全“0”状态可以参与反馈循环, 从而使 n 级移位寄存器系统产生的周期序列比 m (小写) 序列长一位, 即 n 级移位寄存器可以经历移位寄存器的所有状态。

M 序列的性质:

- (1) 不具有移位--相加--移位和双值自相关特性;
- (2) 满足均衡性, 游程特性与 m 序列类似。

4.6.5 非线性反馈移位寄存器序列—M序列



M序列应用：加密通信系统。

M序列个数： n 级移位寄存器系统产生的M序列的个数为 $2^{(2^{n-1}-n)}$ 个。

(m 序列数目 $\lambda(n) = \varphi(2^n - 1)/n$)

例如， $n=10$ 时， m 序列有60种；

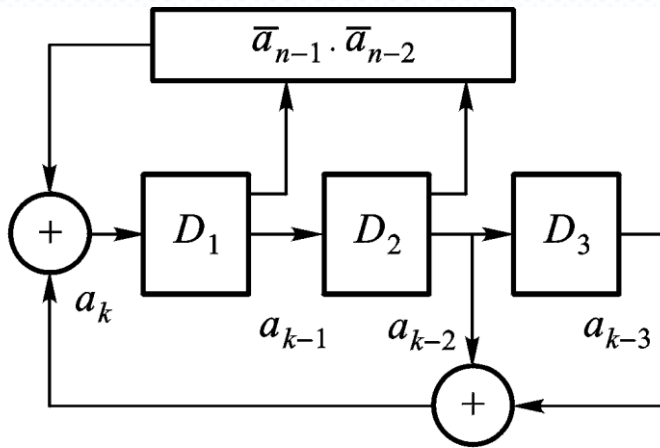
而M序列有 $2^{(2^{10-1}-10)} = 1.30935 \times 10^{15}$ 种

[古德 (Gold) 已证明，对于任意自然数 n 都有 n 级M序列存在。]

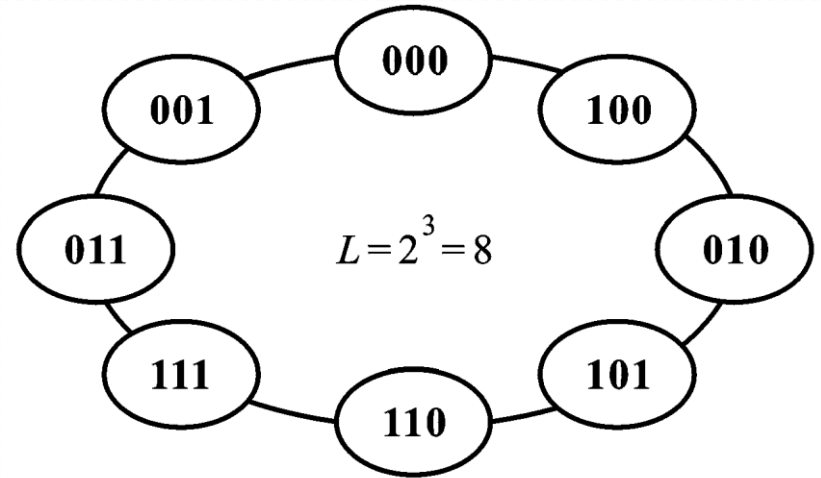
4.6.5 非线性反馈移位寄存器序列—M序列



M序列的产生:



(a) 电路原理图



(b) 状态转换图

M序列: 1011100010111000...

4.6.5 非线性反馈移位寄存器序列—M序列



*M*序列递推公式:

$$3\text{级}m\text{序列递推公式为 } a_k = \sum_{i=1}^3 c_i a_{k-i} = a_{k-2} \oplus a_{k-3}$$

将上式修正后, 得3级 *M*序列递推公式为

$$a_k = \sum_{i=1}^3 c_i a_{k-i} \oplus \overline{a_{k-1}} \cdot \overline{a_{k-2}}$$

*n*级 *M*序列递推公式可表示为

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i} \oplus \overline{a_{k-1}} \cdot \overline{a_{k-2}} \cdots \overline{a_{k-n}} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i a_{k-i} \oplus \prod_{i=1}^n \overline{a_{k-i}} \end{aligned}$$

4.6.6 m 序列的应用

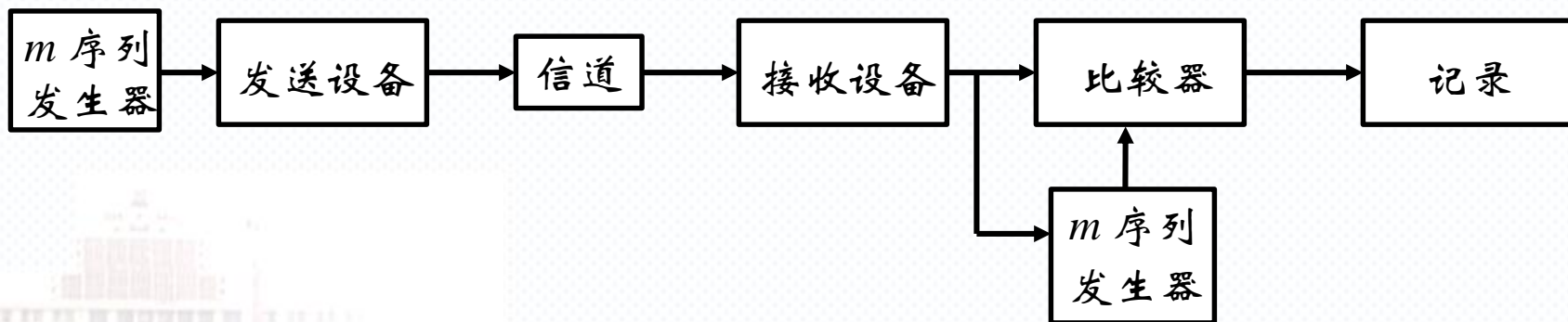


m 序列具有优良的自相关特性，且产生及复制十分容易，因而它成为信号设计中最优选的信号单元之一。

m 序列应用范围：雷达、通信（包括加密、解密）、系统识别及测量等领域。

m 序列典型应用

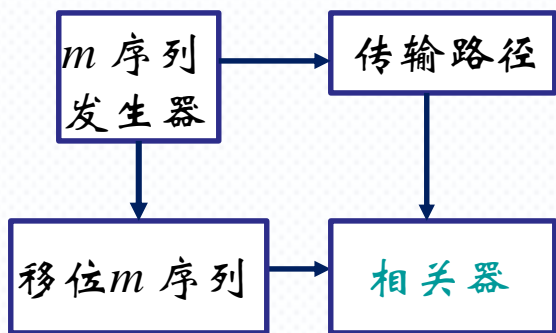
1. 误码率测量



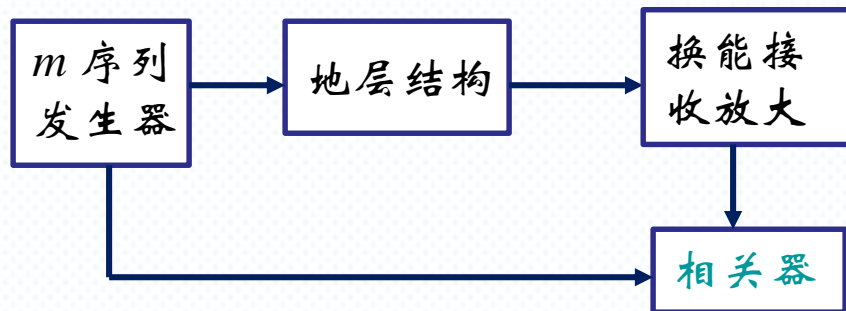
4.6.6 m 序列的应用



2. 距离及延迟时间测量

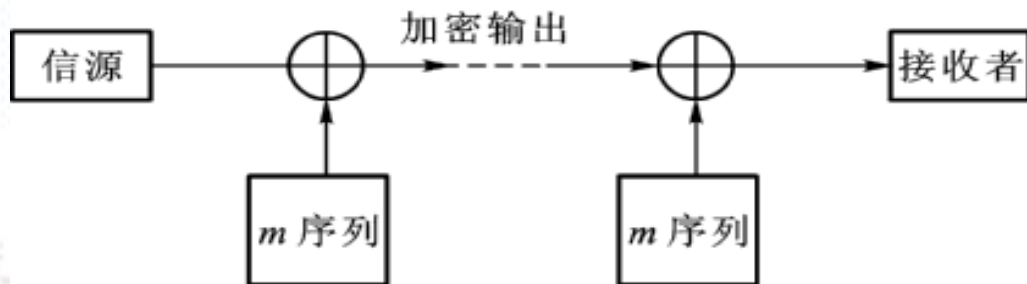


测距原理图



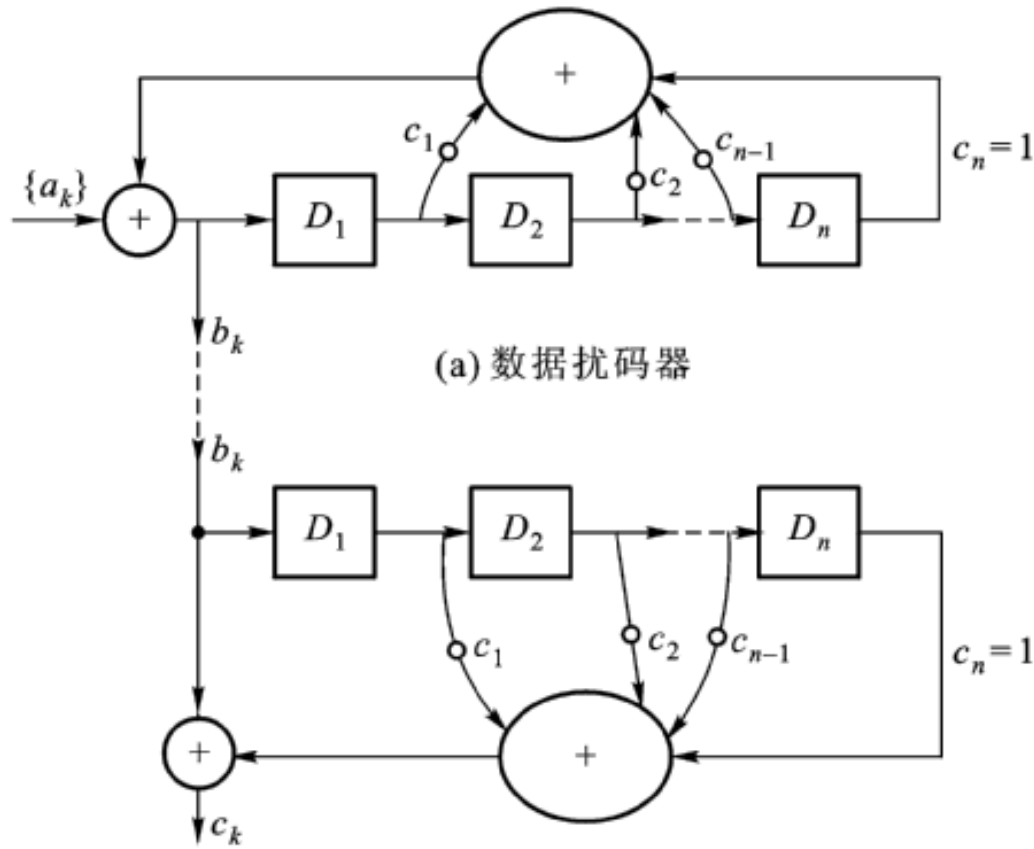
地质勘探原理图

3. 数字通信中的加密及数据扰乱



加密原理图

4.6.6 m 序列的应用



扰码器原理框图

4.6.6 m 序列的应用



4. m 序列在扩频通信系统中的应用

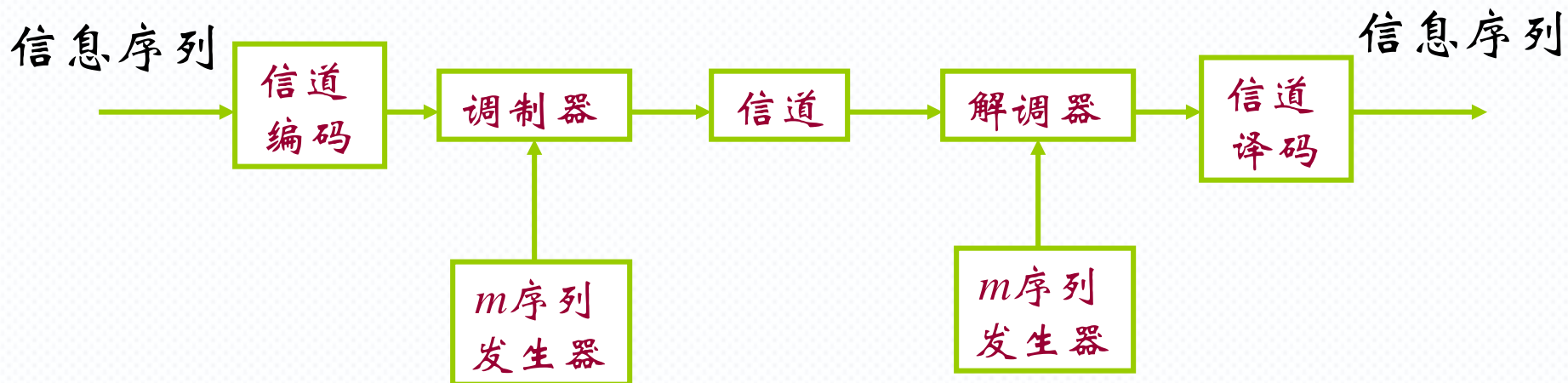
扩频通信:指传输信号的带宽远大于原信号本身带宽的一种通信方式。

扩频通信技术是在香农 (Shannon) 的信道容量公式的指导下产生的。

$$C = B \log_2 (1 + S/N)$$

该式表明, 在相同信道容量条件下, 带宽与信噪比可以互换, 即通过编码利用较宽的频带可以换取低信噪比下的无误信息传输。

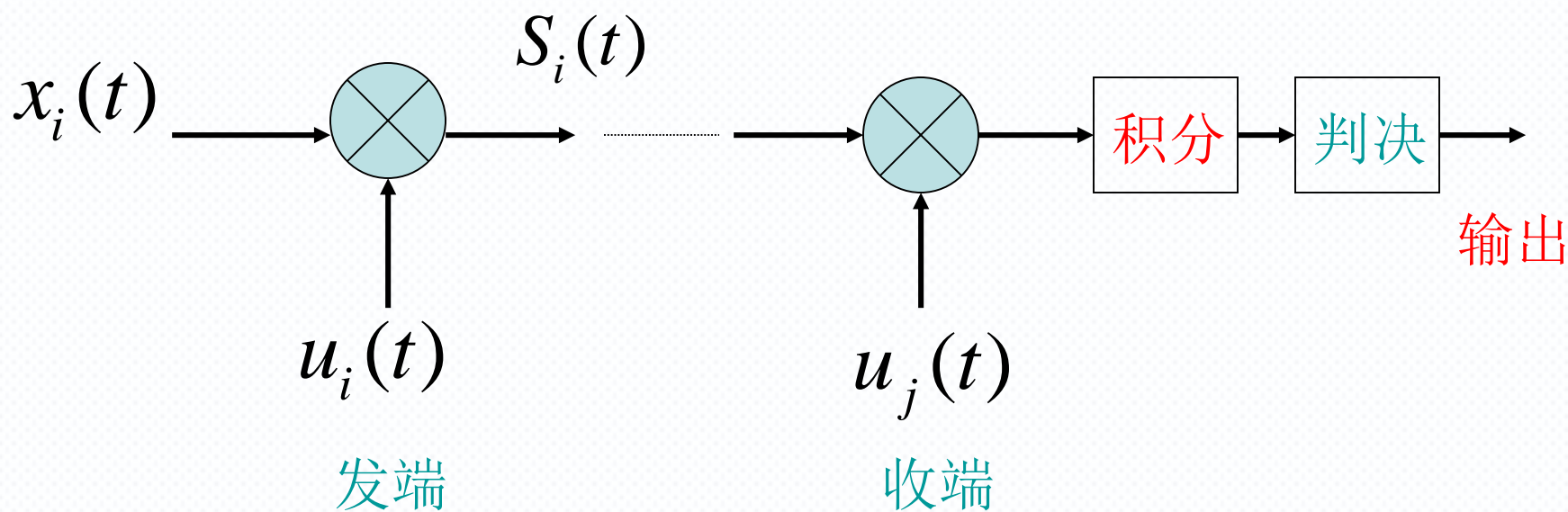
4.6.6 m 序列的应用



扩频通信系统原理图



4.6.6 m 序列的应用



扩频通信系统原理图

4.6.6 m 序列的应用



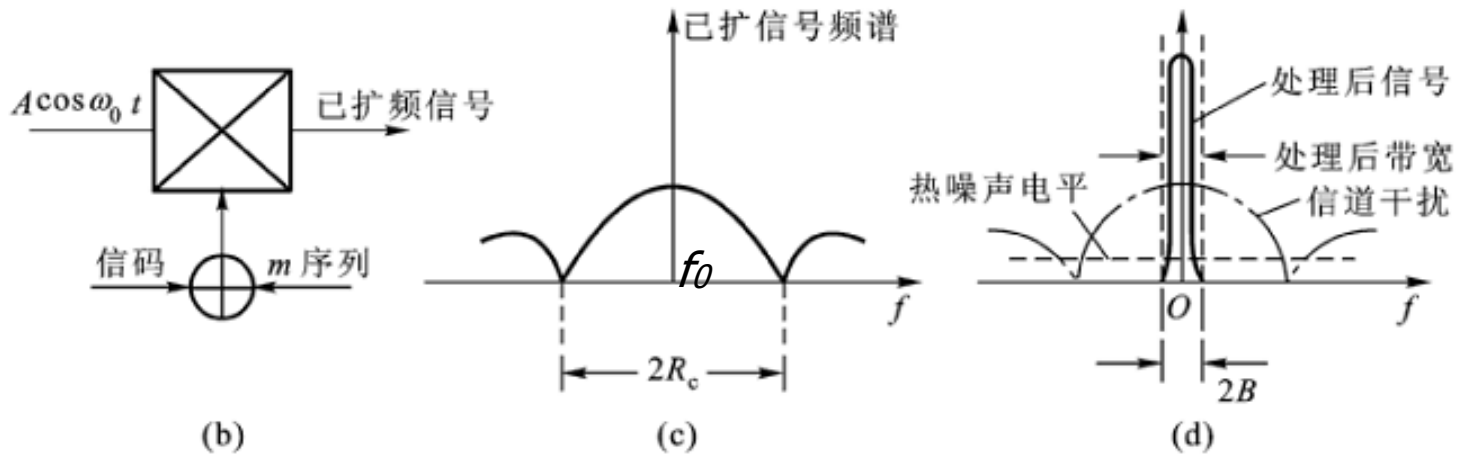
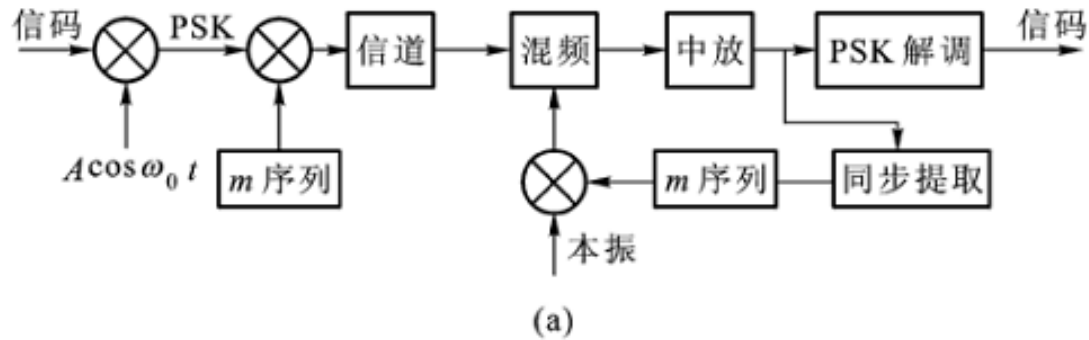
扩频因数: 传输信号带宽与原信号带宽的比值,用 B_e 表示。
 B_e 通常取100~1000。

扩频通信种类

直接序列扩频 (*DSSS* --- *Direct Sequence Spread Spectrum*) 系统

频率跳变扩频 (*FHSS*---*Frequency Hopping Spread Spectrum*) 系统
或称跳频扩频系统。

4.6.6 m 序列的应用

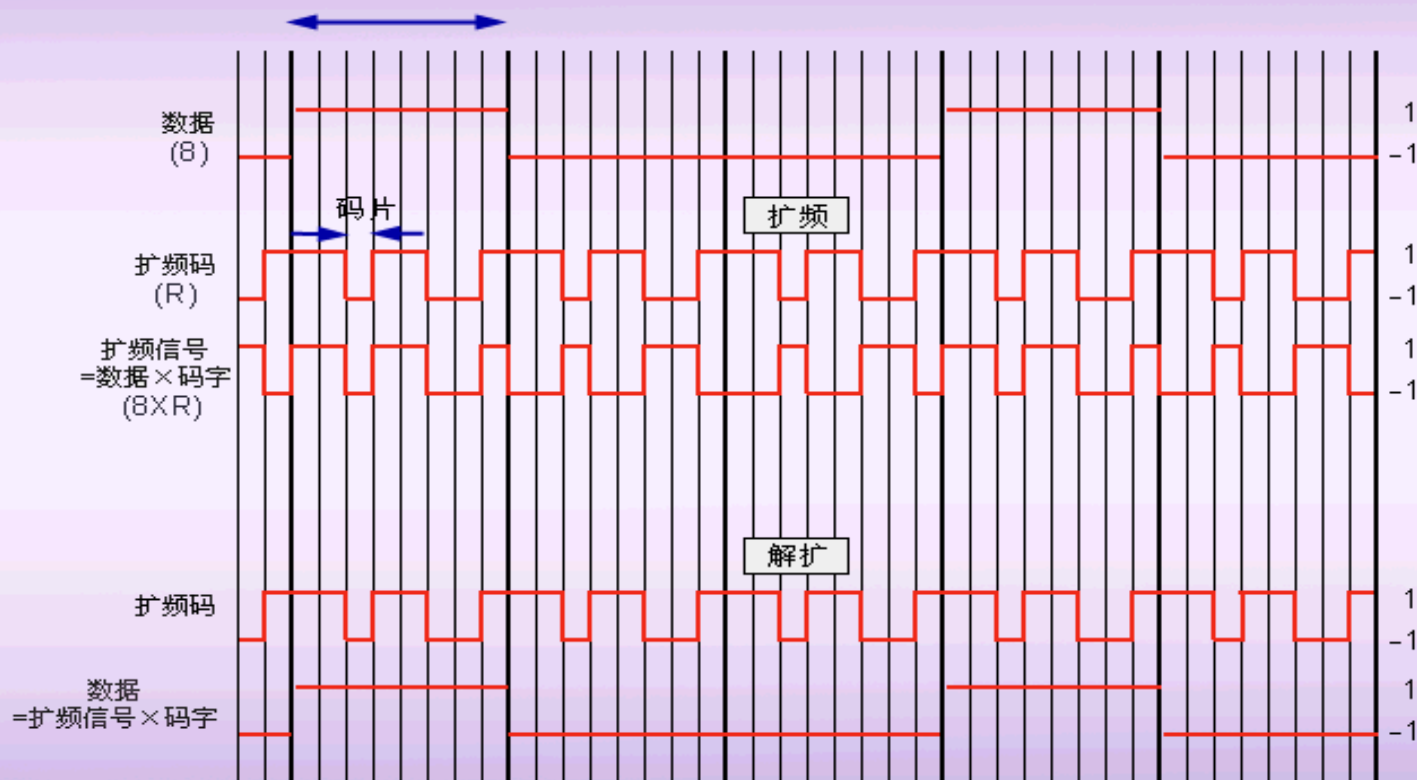


直接序列扩频方框图及频谱

4.6.6 m 序列的应用



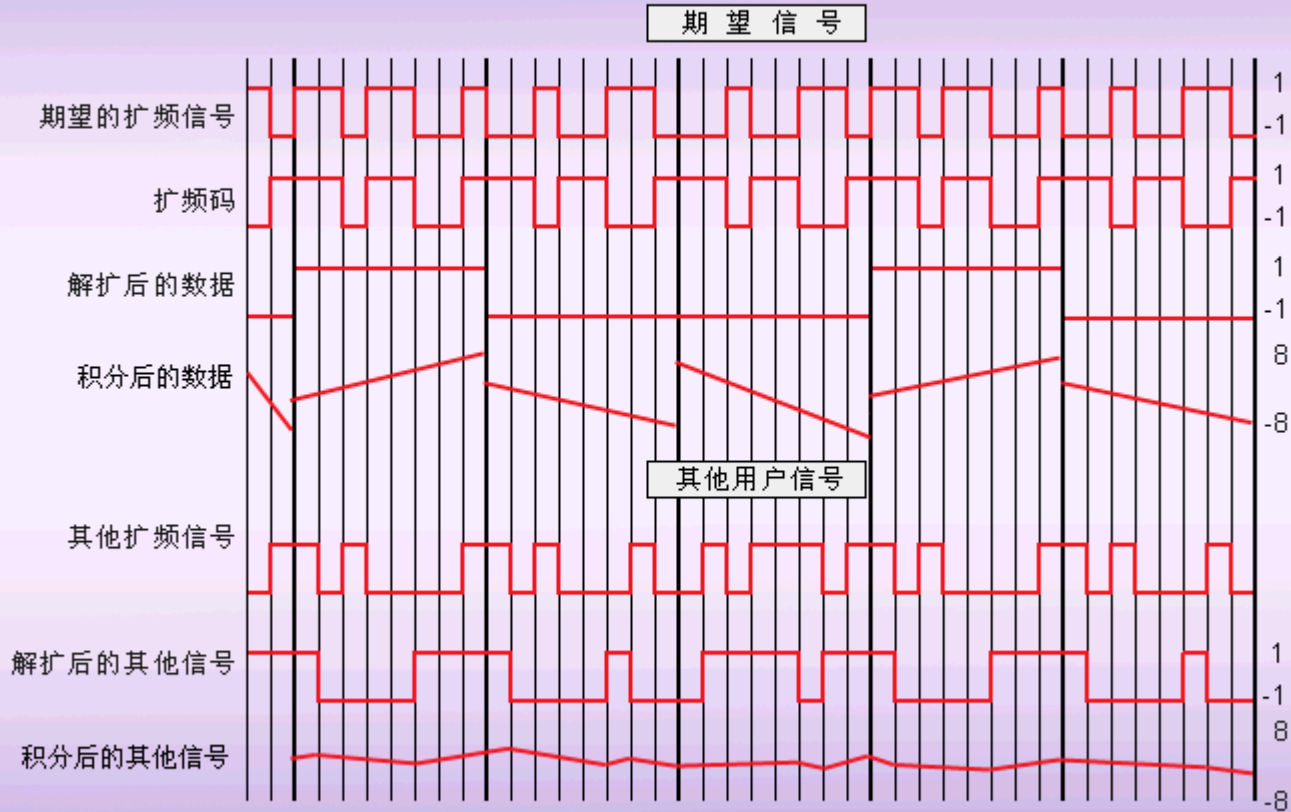
扩频和解扩



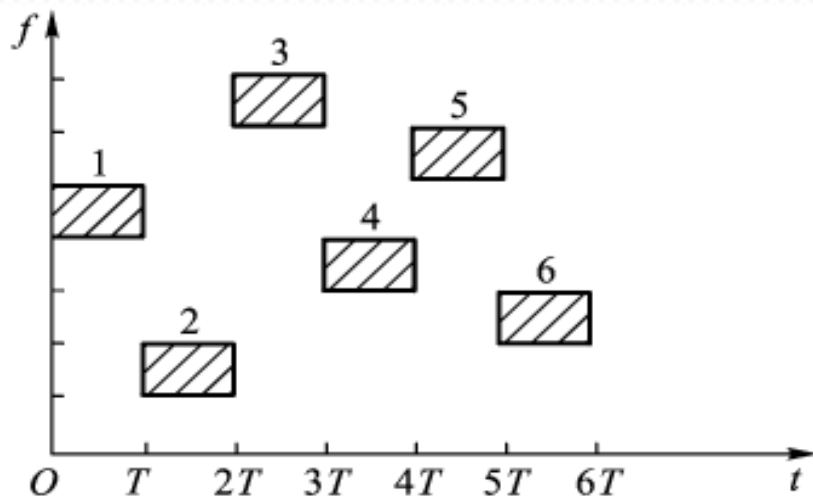
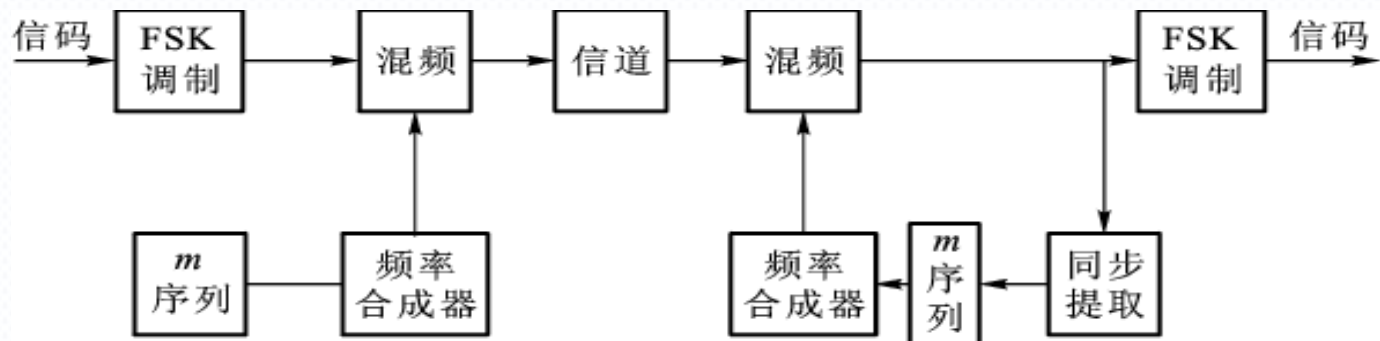
4.6.6 m 序列的应用



相关接收机的基本原理



4.6.6 m 序列的应用



跳频扩频系统 (FHSS) 原理图

4.6.6 m 序列的应用



扩频技术其它应用场合：

(1) 抗干扰。

(2) 低信噪比通信及信号隐藏。

(3) 码分多址 (*CDMA---Code Division Multiple Access*)

CDMA通信系统利用同一个信道(同一个发送频率),同时对几个不同的接收台(机)进行不同内容的通信,这在一般的调制系统中是难以做到的。但在CDMA通信系统中,各发射机用不同的伪随机码序列(地址码)进行扩频,接收端则根据不同的地址码接收信号,每个地址码选用一个不同宗的 m 序列,接收机利用 m 序列的相关性去选择发给自己的扩频信号,与本机地址码不相关的信号,接收机没有输出。这样达到同一信道上的进行多址通信目的。

(4) 多径分离,克服衰落。



本章要求

- 了解信号设计的概念
- 掌握匹配滤波器的设计方法
- 理解巴克序列
- 掌握 m 序列的产生过程、特点及 m 序列的应用情况





本章习题： 4-3、4-7、4-11
4-14、4-16、4-20

