

三氟化硼 Bonner 多球谱仪的中子源能谱 测量方法

燕奕宏¹, 谭新建², 翁秀峰², 胡华四¹, 胡光¹, 孙伟强¹, 倪斯¹

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 西北核技术研究院第二研究所, 710024, 西安)

摘要: 为解决³He 气体短缺且价格日益昂贵所造成的中子能谱测量装置灵敏元缺乏问题, 研制了一套 BF₃ 正比计数管多球谱仪系统。基于蒙特卡罗方法对 Bonner 多球谱仪系统的细致结构进行建模, 模拟计算得到了探测器能量响应灵敏度; 在中国原子能科学研究院的高压倍加器上使用 2.86 MeV 与 14.84 MeV 能量的中子对谱仪系统的探测器能量响应灵敏度进行了标定, 结合模拟结果确定了谱仪系统在实验条件下的能量响应灵敏度; 使用此谱仪系统对²⁴¹Am-Be 中子源能谱进行了测量, 对多球谱仪测量结果使用自编 Gravel 算法进行逆卷积解谱, 解谱所得能谱与²⁴¹Am-Be 中子源标准能谱的对比结果表明, 在总体不确定度小于 21.46% 的范围内二者符合良好, 验证了整套多球系统具有较高的可靠性。该三氟化硼多球谱仪系统有望在加速器、反应堆及同位素中子源环境的中子能谱与剂量检测中得到更为广泛的应用。

关键词: Bonner 多球谱仪; 蒙特卡罗方法; ²⁴¹Am-Be 中子源; 解谱

中图分类号: TL811.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202009015 **文章编号:** 0253-987X(2020)09-0136-06



OSID 码

Measurement of Neutron Source Energy Spectrum Using BF₃ Bonner Multisphere Spectrometer

YAN Yihong¹, TAN Xinjian², WENG Xiufeng², HU Huasi¹, HU Guang¹,
SUN Weiqiang¹, NI Si¹

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Second Institute, Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

Abstract: To solve the problem of lacking sensitive elements in the neutron energy spectrum measuring device caused by the shortage of ³He gas and the increasingly expensive price, a set of BF₃ proportional counter multisphere spectrometer system is developed. Based on the Monte Carlo method, the detailed structure of the multisphere spectrometer system is modeled, and the energy sensitivity of the detector is obtained through simulation calculation. The energy response sensitivity of the spectrometer system is calibrated using 2.86 MeV and 14.84 MeV energy neutrons on the Cockcroft-Walton accelerator in China Institute of Atomic Energy, and the energy response sensitivity of the spectrometer system under experimental conditions is determined with the simulation results. Using this spectrometer system, the energy spectrum of the ²⁴¹Am-Be neutron source is measured, and the measurement results are deconvoluted using the self-edited Gravel algorithm. Comparison of the energy spectrum obtained from the unfolding

spectrum with the standard energy spectrum of the ^{241}Am -Be neutron source shows that the two spectra are in good agreement within the overall uncertainty range less than 21.46%, which verifies the high reliability of the multisphere system. This spectrometer system with BF_3 gas as the sensitive element is expected to be widely used in the case where ^3He gas is scarce.

Keywords: Bonner multisphere spectrometer; Monte Carlo method; ^{241}Am -Be neutron source; unfolding spectrum

中子场的测量对于辐射防护以及实验过程中的辐射本底扣除具有重要意义。对于中子场的测量有核反应法、飞行时间法、核反冲法等。基于核反应法的 Bonner 多球谱仪在测量中子场时具有灵敏度高、中子与 γ 射线的分辨能力好等优点,所以在测量中子能谱时应用较为广泛^[1-4]。早期使用的中子剂量仪没有探测器外部的慢化体,只能测量热中子,Boot 等在探测器外包裹慢化体对中进行慢化,显著提高了探测器对中子探测的能量上限^[5];Burgkhardt 等通过改进慢化体尺寸得到了较好的探测器能量响应灵敏度^[6];Birattari 等设计改良后的谱仪系统可对能量高达 400 MeV 的中子进行探测^[7-9];Mourgues 等使用两个包裹直径分别为 6.4 cm 与 10.7 cm 的聚乙烯球的探测器对探测器能量响应灵敏度进行修正,得到了具有较好能量响应灵敏度的谱仪系统^[10];Bartlett 等使用多个 ^3He 探测器设计了同时对热、慢中子及中能中子具有良好能量响应灵敏度的球谱仪系统^[11];汲长松等为降低热中子在探测器内的过响应问题,通过在慢化体中插入镉吸收棒的方法设计制作了 BH-3105 型中子剂量仪^[12];Li 等提出了 SMMD 球谱仪^[13]。

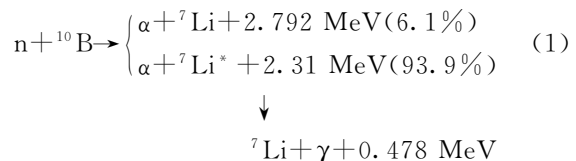
在中子剂量仪发展的过程中,由于国际上 ^3He 气体价格水涨船高,所以越来越多的中子探测器都倾向于选择使用价格低廉且对慢、热中子都有较高能量响应灵敏度的 BF_3 气体作为中子探测器的灵敏元。本文旨在使用 BF_3 正比计数管作为探测器,在其外部不包或包以不同厚度的聚乙烯球壳,组装出一个十件套 Bonner 球中子能谱仪,并通过此谱仪

对镅铍中子源能谱进行测量,以评估该谱仪对快中子能谱测量的可靠性及准确性。 Am -Be 中子源系统测试流程如图 1 所示。

1 Bonner 球谱仪的镅铍中子源能谱测量原理

1.1 Bonner 球谱仪工作原理

Bonner 球谱仪由中心的 BF_3 球形正比计数管与聚乙烯外壳组成。因为在球谱仪中心使用的正比计数管为球形管,所以在球谱仪各个方向的中子能量响应灵敏度相同。当置于中子场中时,不同能量的中子经过不同尺寸的聚乙烯球壳后慢化为热中子,在探测器灵敏体积内与 ^{10}B 发生如下反应



式中:中子与 ^{10}B 有两个反应分支,发生概率分别为 6.1%、93.9%。当发生产物为 $^7\text{Li}^*$ 复合核的反应时, $^7\text{Li}^*$ 会进一步退激产生 ^7Li 与 γ 射线。当中子在灵敏体积内与 ^{10}B 进行核反应时,在电场作用下核反应产生的 ^7Li 与 α 粒子在灵敏体积内电离产生大量的正负离子对,从而在收集极上产生信号。通过记录信号来确定核反应计数。

1.2 解谱算法原理

设共有 10 个 Bonner 球,直径在 0~30.25 cm 之间,其中 0 对应 BF_3 正比计数管探测器不包裹聚乙烯层,即对应裸探测器。球谱仪的计数率 N_i 与

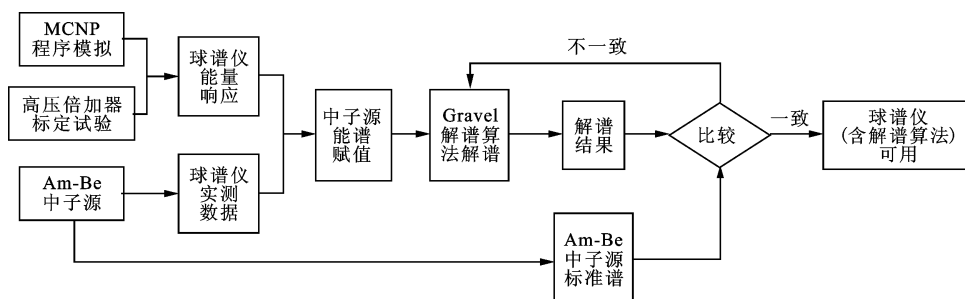


图 1 Am-Be 中子源系统测试流程图

探测器响应 R_{ij} 有如下关系^[14-15]

$$N_i = \sum_j R_{ij}(E_j)\Phi_j(E_j) \quad (2)$$

式中: N_i 为第 i ($i \leq n$) 个 Bonner 球记录到的计数率; $\Phi_j(E_j)$ 为第 j 个能量中子对应的通量密度; $R_{ij}(E_j)$ 为第 i 个探测器对第 j 个能量中子的能量响应灵敏度; E_j 为第 j 个能量的中子。由于球谱仪的数量 n 远小于中子能群数, 所以所求解的方程为欠定方程, 需使用解谱算法对方程进行求解。本文使用 Gravel 算法对欠定方程进行求解。

Gravel 算法是一种从 SAND-II 算法演化而来的迭代算法, 最初由 PTB 实验室提出, 用于求解粒子的脉冲幅度谱^[16]。Gravel 算法可通过逆卷积的方式对少道问题进行求解, 同时具有对初始谱不敏感等优点, 第 $K+1$ 次迭代后的通量密度^[15-17] 为

$$\Phi_j^{K+1} = \Phi_j^K \exp\left(\frac{\sum_i W_{ij}^K \ln(N_i / \sum_j R_{ij} \Phi_j^K)}{\sum_i W_{ij}^K}\right) \quad (3)$$

$$W_{ij}^K = \frac{R_{ij} \Phi_j^K N_i^2}{\sum_j R_{ij} \Phi_j^K \sigma_i^2} \quad (4)$$

式中: σ_i 为第 i 个计数率测量值 N_i 的测量误差; W_{ij} 为与第 i 个球中第 j 个能量对应的权重因子。

2 Bonner 球谱仪中子能量响应灵敏度

2.1 能量响应灵敏度模拟计算

第 i 个球谱仪的能量响应灵敏度定义为在灵敏体积探测到的中子数 N_i 与第 j 个能量的中子照射到 Bonner 球表面的通量之比^[18], 其表达式为

$$R_{ij} = \frac{N_i}{\Phi_j} \quad (5)$$

使用 MCNP 程序对探测器的响应灵敏度进行模拟计算。MCNP 程序可通过不同的计数卡来计算不同情况下的通量、能量沉积等。在此使用体通量计数卡 F4 与乘子卡 FM 结合, 可得到在灵敏体积内特定反应情况下的核反应计数。FM 卡的格式为 FM4 C Mn 107, 其中 C 为归一化因子, Mn 为材料号, 107 为在 Mn 材料中进行的反应编号。模拟时将 Bonner 球编号为 1~10, 其直径分别为 0、9.78、11.75、14.29、17.31、20.91、24.97、26.25、30.25、38.05 cm。聚乙烯球中心探测器模拟几何结构与实际几何结构相同, 为北京核仪器厂生产的 BF_3 球形气体探测器, 球形管直径为 54 mm, 管内气压为 0.07 MPa, 坪区电压为 1 600~1 900 V。 BF_3 正比计数管结构如图 2 所示。

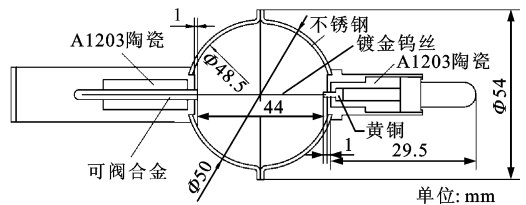


图2 BF_3 正比计数管结构

探测器外部包裹聚乙烯对中子进行慢化。中子进入探测器灵敏体积内与 ^{10}B 发生反应, 记录到的数据通过前置放大器、主放大器的放大到达多道脉冲幅度分析器(MCA), 通过网线连接计算机, 在计算机上对放大后的信号进行记录。

由于不同厚度的 Bonner 球对中子的慢化程度不同, 所以探测器的能量响应灵敏度也各不相同, 为得到中子源的能谱, 需在不同能量下对探测器能量响应灵敏度进行模拟计算。 BF_3 探测器能量响应灵敏度模拟结果如图 3 所示。

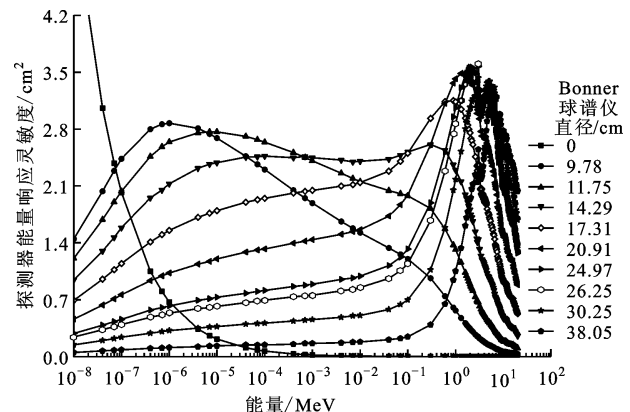


图3 BF_3 探测器能量响应灵敏度模拟结果

从图 3 中可以看出, 随着能量的升高, Bonner 球的探测器能量响应灵敏度呈现先上升后下降的趋势, 同时随着球的直径的增加, 球谱仪的能量响应灵敏度也在向高能区移动, 这符合中子在聚乙烯中慢化的物理规律。

2.2 探测器能量响应灵敏度的标定

为验证图 3 模拟计算结果的准确性, 同时对探测器能量响应灵敏度进行标定, 在中国原子能科学研究所的高压倍加器上进行了标定实验。中国原子能科学研究所的高压倍加器通过加速氘粒子使氘粒子与氘靶作用, 产生能量为 2.45 MeV 与 14.1 MeV 的中子, 具有中子产额高、束斑形状接近点源、中子束单色性好等优点, 而其斜管道厅(与束流方向呈 33°) γ 本底较少, 中子散射影响较小, 所以选择在斜管道厅进行标定实验。查找中国原子能科学研究所

中子角度与能量关系表,并与 Q 方程计算结果进行比对,得到斜管道厅氙氙与氙氙反应产生的中子能量分别为 2.86 MeV 与 14.84 MeV。由于实验条件限制,只对有限的几个 Bonner 球进行了标定实验。标定实验现场布局如图 4 所示。



图 4 标定实验现场布局

探测器使用激光准直与束流出射口进行对心处理,通过平方反比公式得到最大探测器可被中子全部覆盖的位置。因球的大小不同,在进行不同直径 Bonner 球实验时,都需进行对心处理。实验时探测器通过高压电源施加 1 800 V 电压,前置放大器通过直流电源施加 ±24 V 电压,两个电源都通过 UPS 进行稳压供电。信号通过延长信号线在实验厅外的计算机及示波器上进行收集。

中子在球谱仪上的通量通过伴随粒子法得到,α 粒子实验数据通过国家级重点实验室的检测获得。对 α 粒子进行记录的探测器采用小体积(Φ8 mm)、低电阻率(200~500 Ω/cm)、低偏压(5~20 V)的探测器,型号为 GM8 I RA(NA)。因为探测器本底与探测器的体积成正比,同时具备的低阻止本领是为了把质子与 α 粒子分开以便于扣除。探测器摆在主厅距离靶 1.5 m 的位置,与 D 粒子入射方向夹角为 155°。通过对 α 粒子记录后使用下式对数据进行处理

$$\Phi = \frac{k\Omega N_{\alpha}}{S} \quad (6)$$

式中:Φ 为中子通量密度;k 为转换系数;Ω 为 Bonner 球球面度;N_α 为 α 粒子计数率;S 为 Bonner 球截面积。通过式(5)可得到标定后的能量响应灵敏度。表 1 为测试得到的实验数据与模拟数据对比。

通过比较实验数据与考虑细节结构的模拟数据可知,对于 2.86 MeV 能量的中子,实验时准直器和墙体的散射与慢化的影响使慢成分中子变多。同时因为这些中子能量较低,经过聚乙烯的慢化后很难到达探测器灵敏体积内,所以导致探测器计数偏低,探测器的能量响应灵敏度的相对偏差较大。对于 14.84 MeV 能量的中子,经过墙体与准直器慢化后的中子能量偏高,慢成分经过聚乙烯慢化后可到达

探测器灵敏体积内发生核反应,探测器在此条件下能量响应灵敏度较高。在后续对铯铍中子源测试时不存在准直器与墙体散射的影响,所以对于解谱的影响较小。为得到实验标定后的探测器响应灵敏度,通过实验数据与模拟数据的最小二乘法拟合得到平均刻度因子为 1.027。

表 1 实验数据与模拟数据对比

能量 /MeV	探测器直径/cm	探测器能量响应灵敏度/cm ²		相对偏差 /%
		实验数据	模拟数据	
2.86	20.91	2.424	2.303	5.041
	24.97	2.296	2.607	13.56
	26.25	2.184	2.535	16.07
	30.25	1.864	2.300	23.24
	38.05	1.235	1.556	26.04
14.84	20.91	1.354	0.994	26.58
	24.97	1.604	1.240	22.67
	26.25	1.606	1.401	12.76
	30.25	1.648	1.504	8.738
	38.05	1.632	1.678	2.821

3 铯铍源中子能谱测量结果及讨论

3.1 铯铍源测量实验

在西北核技术研究院的铯铍中子源上进行实验。铯铍中子源为置于直径 1.2 m 的圆柱形聚乙烯屏蔽装置中,通过远程控制传动装置将放射源提起对探测器进行照射,铯铍中子源实验装置如图 5 所示。

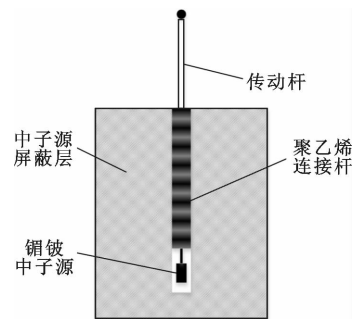


图 5 铯铍中子源实验装置

探测器置于距传动杆 35 cm 的位置处,共进行 10 次测试,每次保持探测器中心位置与传动杆距离不变。前置放大器工作电压为 ±24 V,主放大器与多道脉冲幅度分析器使用 ORTEC 公司生产的 572 与 927 插件,与 MCA 配套使用的记录系统为 Maestro 软件,可在电脑端对核反应计数进行记录,

^{241}Am -Be中子源实验系统示意图如图6所示。

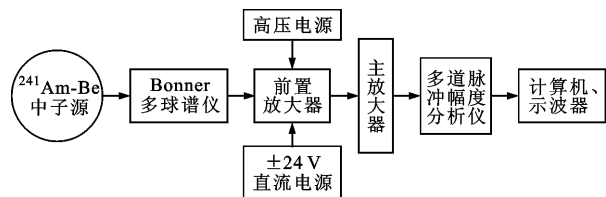


图6 ^{241}Am -Be中子源实验系统示意图

3.2 解谱计算结果

采用 Gravel 算法与标定后的探测器对镅铍中子源进行测量。由于实验厅较大且空旷,所以中子散射影响可以忽略,同时探测器对 γ 射线灵敏度很低、沉积能量较少, γ 射线的能量沉积集中在计数谱的低能段,可以通过卡阏的方法将低能段的 γ 计数去除,从而得到中子计数谱。中子源实验测量结果如表2所示。将镅铍中子源的标准能谱与 Gravel 算法解谱得到的镅铍源中子能谱进行对比,结果如图7所示。

表2 镅铍中子源测量数据

球谱仪 直径/cm	0	9.78	11.75	14.29	17.31
计数率/ s^{-1}	2.085	6.795	13.935	21.323	28.326
球谱仪 直径/cm	20.91	24.97	26.25	30.05	38.05
计数率/ s^{-1}	28.990	38.825	39.601	34.797	25.624

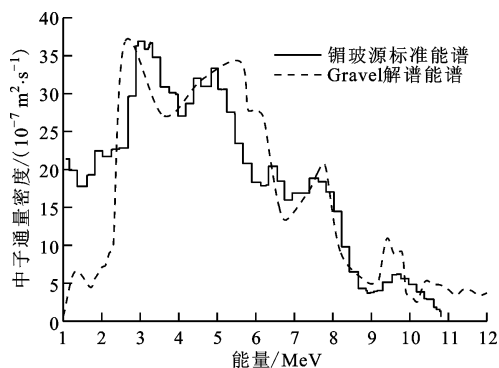


图7 镅铍中子源的标准能谱与 Gravel 算法解谱能谱对比

由图7可以看出,镅铍源标准能谱^[19]与 Gravel 算法所得能谱符合良好,峰值位置大致相同。由于 BF_3 的探测器响应灵敏度较好,材料较之其他材料价格便宜,使用对初始谱不敏感的 Gravel 算法可解得与原谱符合较好的中子能谱,所以本文所研制的基于 BF_3 的 Bonner 多球谱仪能谱测量系统对于中子场的测量是可靠的。

4 不确定度分析

不确定度分为 A 类不确定度与 B 类不确定度。A 类不确定度主要由对测试数据的统计过程引入,B 类不确定度主要由其他分析方法引入。二者的合成不确定度 μ_c 通过下式进行合成

$$\mu_c = \sqrt{\mu_A^2 + \mu_B^2 + 2\rho_{AB}\mu_A\mu_B} \quad (7)$$

式中 ρ_{AB} 为 A 类不确定度与 B 类不确定度的相关系数,本次实验中为 0。

A 类不确定度主要存在于探测器能量响应的模拟计算过程中,是由测量过程中计数率的统计引入。通过 MCNP 模拟计算得到的探测器能量响应灵敏度的不确定度小于 10%;测量过程中为了降低统计误差,使镅铍中子源的中子峰值计数达到 1 000 左右,由此引入的不确定度小于 4%。

B 类不确定度主要是由信号的记录过程引入。由 BF_3 气体密度变化引入的不确定度小于 8%;由聚乙烯球壳密度变化引入的不确定度小于 1%;由 γ 射线在球谱仪中产生的能量沉积影响小于 0.5%;探测器位置的最大偏差为 ± 3 mm,引起的不确定度小于 2%;由照射时间及衰变因素引起的不确定度小于 0.3%;通过查阅资料可知,由中子源强度引入的不确定度小于 1.5%。因使用迭代算法,由解谱过程引入的不确定度为 15%,可以通过模拟与实验数据的对比得到。镅铍中子源能谱测量过程产生的不确定度见表3所示。

表3 镅铍中子源能谱测量过程产生的不确定度

不确定度来源	类型	不确定度/%
探测器能量响应灵敏度	A	10.00
探测器计数率	A	4.00
BF_3 气体密度	B	8.00
聚乙烯球壳密度	B	7.00
γ 射线	B	0.50
位置因素	B	2.00
照射时间及衰变因素	B	0.30
中子源强度	B	1.50
解谱过程	B	15.00
总不确定度		21.46

5 结论

中子能谱的测量在辐射防护及中子物理领域具

有重要意义,传统方法中灵敏元为 ^3He 气体的探测器越来越昂贵,并且作为战略物资其获取也相对困难,本文研制的以 BF_3 为灵敏元的多球谱仪系统具有广泛的应用前景。此套多球谱仪系统使用 BF_3 正比计数管为中心探测器,球谱仪直径为 $0\sim 38.05\text{ cm}$,共计10个探测器。通过对整套探测系统的探测器能量响应灵敏度的模拟计算,得到了谱仪系统在所需能段的灵敏度曲线;在中国原子能科学研究院的高压倍加器上使用氘氘与氘氘反应分别产生 2.86 MeV 与 14.84 MeV 能量的中子进行标定实验,得到标定后的能量响应灵敏度。选择采用对初始谱不敏感的Gravel算法对镅铍源能谱的测量进行编程,对测量结果进行解谱计算。Gravel算法解谱结果与 ^{241}Am -Be中子源标准能谱符合较好,整个过程不确定度小于 21.46% 。由此可知,本文所研制的整套快中子能谱测量系统对于中子场中的能谱可以获得较好的测量结果,可用于对低中子产额环境的快中子能谱进行测量,从而有望在加速器、反应堆及同位素中子源环境的中子能谱与剂量检测等工作中得到更为广泛的应用。

参考文献:

- [1] VEGA-CARRILLO H R, MANZANARES-ACUÑA A E. Background neutron spectrum at 2 420 m above sea level [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 2004, 524(1/2/3): 146-151.
- [2] ESPOSITO A, BEDOGNI R, DOMINGO C, et al. Measurements of leakage neutron spectra from a high-energy accumulation ring using extended range Bonner sphere spectrometers [J]. Radiation Measurements, 2010, 45(10): 1522-1525.
- [3] GOLDHAGEN P, REGINATTO M, KNISS T, et al. Measurement of the energy spectrum of cosmic-ray induced neutrons aboard an ER-2 high-altitude airplane [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research; Section A Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2002, 476(1/2): 42-51.
- [4] WIEGEL B, AGOSTEO S, BEDOGNI R, et al. Intercomparison of radiation protection devices in a high-energy stray neutron field: part II Bonner sphere spectrometry [J]. Radiation Measurements, 2009, 44(7/8): 660-672.
- [5] BOOT S J, GIBSON J A B. A counter for measuring neutron dose equivalent from thermal energies to 10 keV: AERE-R-9357 [R]. Harwell, UK: AEA/Atomic Energy Research Establishment, 1978: 1-15.
- [6] BURGHARDT B, FIEG G, KLETT A, et al. The neutron fluence and $\text{H}^*(10)$ response of the new LB 6411 REM counter [J]. Radiation Protection Dosimetry, 1997, 70(1/2/3/4): 361-364.
- [7] BIRATTARI C, FERRARI A, NUC CETELLI C, et al. An extended range neutron rem counter [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research; Section A Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 1990, 297(1/2): 250-257.
- [8] BIRATTARI C, ESPOSITO A, FERRARI A, et al. Calibration of the neutron rem counter LINUS in the energy range from thermal to 19 MeV [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research; Section A Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 1993, 324(1/2): 232-238.
- [9] BIRATTARI C, ESPOSITO A, FERRARI A, et al. The extended range neutron rem counter LINUS: overview and latest developments [J]. Radiation Protection Dosimetry, 1998, 76(3): 135-148.
- [10] MOURGUES M, CAROSI J C, PORTAL G. A light REM-counter of advanced technology [C]// Proceedings of the 5th Symposium on Neutron Dosimetry. Neuherberg, Germany: Commission of the European Communities, 1984: 387-410.
- [11] BARTLETT D T, TANNER R J, JONES D G. A new design of neutron dose equivalent survey instrument [J]. Radiation Protection Dosimetry, 1997, 74(4): 267-271.
- [12] 汲长松, 张恩山, 杨剑峰, 等. BH3105型高灵敏中子剂量当量仪 [J]. 中国核科技报告, 1995(S2): 1035-1048.
JI Changsong, ZHANG Enshan, YANG Jianfeng, et al. BH3105 type neutron dose equivalent meter of high sensitivity [J]. China Nuclear Science and Technology Report, 1995(S2): 1035-1048.
- [13] LI Taosheng, FANG Dong, LI Hong. A Monte Carlo design of a neutron dose-equivalent survey meter based on a set of 3 He proportional counters [J]. Radiation Measurements, 2007, 42(1): 49-54.
- [14] 宋逢泉, 祝庆军, 廖燕飞, 等. Bonner球谱仪对Pu-Be源中子能谱的测量 [J]. 核科学与工程, 2013, 33(1): 60-64.
SONG Fengquan, ZHU Qingjun, LIAO Yanfei, et al. Measurement of neutron energy spectrum of a Pu-Be source based on Bonner spheres spectrometer [J]. Nuclear Science and Engineering, 2003, 33(1): 60-64.

(下转第172页)

$$[\exp(-j\pi m \sin\theta_1) \cdots \exp(-j\pi m \sin\theta_p)] \cdot \mathbf{Q}_1^H \begin{bmatrix} \exp(j\pi k \sin\theta_1) \\ \vdots \\ \exp(j\pi k \sin\theta_p) \end{bmatrix} r$$

因此,矩阵 \mathbf{R}_1^H 可以表示成式(10)的形式,即

$$\mathbf{R}_1^H = \mathbf{A}_c \mathbf{Q} = \mathbf{A}_c \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_c^H r$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} e^{j\pi L \sin\theta_1} & e^{j\pi L \sin\theta_2} & \cdots & e^{j\pi L \sin\theta_p} \\ e^{j\pi(L-1) \sin\theta_1} & e^{j\pi(L-1) \sin\theta_2} & \cdots & e^{j\pi(L-1) \sin\theta_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j\pi L \sin\theta_1} & e^{-j\pi L \sin\theta_2} & \cdots & e^{-j\pi L \sin\theta_p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} q_1 q_1^* - q_1^* q_1 & q_2 q_1^* - q_2^* q_1 & \cdots & q_p q_1^* - q_p^* q_1 \\ q_1 q_2^* - q_1^* q_2 & q_2 q_2^* - q_2^* q_2 & \cdots & q_p q_2^* - q_p^* q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1 q_p^* - q_1^* q_p & q_2 q_p^* - q_2^* q_p & \cdots & q_p q_p^* - q_p^* q_p \end{bmatrix}$$

此时 $\text{rank}(\mathbf{Q}_1) \geq 2$,证明如下。

已知矩阵 \mathbf{Q}_1 的第 i 行第 j 列的元素为 $q_j q_i^* - q_i^* q_j$,任取 \mathbf{Q}_1 的一个 2×2 子阵,假设左上角元素是 \mathbf{Q}_1 第 i 行第 j 列的元素,右下角元素是 \mathbf{Q}_1 第 k 行第 m 列的元素,则该子阵的行列式为

$$(q_j q_1^* q_m q_k^* - q_j q_i^* q_m^* q_k - q_j^* q_i q_m q_k^* + q_j^* q_i q_m^* q_k) - (q_m q_j q_i^* q_k^* - q_m q_i^* q_j^* q_k - q_m^* q_i q_j q_k^* + q_m^* q_j^* q_i q_k) = 2q_i q_k^* \text{Im}(q_m^* q_j) - 2q_i^* q_k \text{Im}(q_m q_j^*)$$

只要 q_i 不全为实数, \mathbf{Q}_1 就不会为 $\mathbf{0}$ 。因此, \mathbf{Q}_1 的任意 2×2 子矩阵的行列式都不为 0, $\text{rank}(\mathbf{Q}_1) \geq 2$ 。

另外, \mathbf{Q}_1 可以表示为

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ \vdots \\ q_p^* \end{bmatrix} [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_p]$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} [q_1^* \quad q_2^* \quad \cdots \quad q_p^*] = \mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{12} \quad (\text{A1})$$

从式(A1)可以看出 $\text{rank}(\mathbf{Q}_{11}) = \text{rank}(\mathbf{Q}_{12}) = 1$, 因此 $\text{rank}(\mathbf{Q}_1) = \text{rank}(\mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{12}) \leq \text{rank}(\mathbf{Q}_{11}) + \text{rank}(\mathbf{Q}_{12}) = 2$ 。证毕。

由于 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}_c^H r$, \mathbf{A}_c 列满秩,所以 $\text{rank}(\mathbf{Q}) = 2$ 。
(编辑 陶晴 刘杨)

(上接第 141 页)

[15] CHEN Yonghao, CHEN Ximeng, LEI Jiarong, et al. Unfolding the fast neutron spectra of a BC501A liquid scintillation detector using GRAVEL method [J]. Science China: Physics, Mechanics and Astronomy, 2014, 57(10): 1885-1890.
[16] MATZKE M. Unfolding of pulse height spectra: the HEPRO program system; PTB-N-19 [R]. Braunschweig, Germany; Physikalisch-Technische Bundesanstalt, 1994; 23-28.

[17] MATZKE M. Unfolding of particle spectra [J]. Proceedings of SPIE, 1997, 2867(2): 589-607.
[18] 陈军, 杨小芸, 容超凡. 有关中子多球谱仪的计算问题 [C]//第十三届全国核电子学与核探测技术学术年会论文集:上册. 北京:中国电子学会中国核学会出版社, 2006: 370-375.
[19] ISO. Reference neutron radiations; part 1 Characteristics and methods of production; ISO 8529-1-2001 [S]. Geneva, Switzerland; ISO, 2001; 1-10.

(编辑 武红江)