

# 黑体空腔中热平衡条件的导出

黄永义 张淳民

(西安交通大学 物理学院 陕西 西安 710049)

摘要: 通过黑体空腔中原子的电偶极振子辐射阻尼损失的能量和该振子从电磁波获得能量相等的事实导出热平衡条件.

关键词: 辐射阻尼; 黑体空腔; 热平衡条件

中图分类号: O 4-1

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712 (2022) 11-0009-02

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.220018

1900 年瑞利导出瑞利-金斯公式时,直觉地给出了原子的电偶极振子和腔内电磁波交换能量达到热平衡时的条件:

$$\rho(\nu, T) = g(\nu) \bar{\varepsilon}(\nu, T) \quad (1)$$

式中  $g(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3$  为黑体空腔内的电磁波在频率  $\nu$  附近  $\nu \rightarrow \nu + d\nu$  单位体积单位频率间隔内的驻波模式数  $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$  为腔壁原子的电偶极振子的平均能量<sup>[1, 2]</sup>. 1899 年普朗克从电偶极振子辐射电磁波和吸收电磁波平衡也导出了这个热平衡条件<sup>[3]</sup>. 普朗克的原著文章不容易读懂,依据普朗克的思路,吴大猷<sup>[4]</sup>给出了原子的电偶极振子的运动方程并利用电场强度的傅里叶变换导出了热平衡关系式(1); Longair<sup>[5]</sup>从原子的电偶极振子在黑体空腔中做受迫振动时能量辐射率和原子振子不在空腔中做阻尼振动时的能量辐射率相等的条件,导出了热平衡条件. Longair 的导出方法有些不太合理,原子振子受迫振动时的能量辐射率怎么能和该振子阻尼振动时的能量辐射率直接比较呢? 本文通过黑体空腔中原子的电偶极振子辐射阻尼损失的能量和该振子从电磁波获得的能量相等的事实导出了热平衡条件.

## 1 黑体空腔中原子振子的辐射阻尼

如图 1 所示,电场中的原子可视为一维电偶极振子,该振子在腔内电磁波环境中做受迫振动时满足的运动方程为

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = eE_0 \cos(\omega t) / m \quad (2)$$

式中  $m$  为电子质量  $\omega_0$  为原子的电偶极振子的固有

频率  $E_0, \omega$  分别为电磁波的振幅和圆频率,电动力学教材给出的辐射阻尼系数为<sup>[6]</sup>

$$\gamma = \alpha/m = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \quad (3)$$

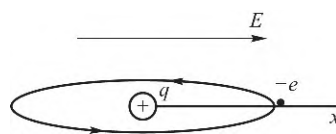


图 1 电场中的原子可视为一维电偶极振子在弱阻尼条件下  $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ , 式(2)的通解为

$$x = A' e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} + \varphi) + \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

式中  $A'$  为弱阻尼振动的初始振幅,  $\varphi'$  为其初相, 第一项阻尼项在长时极限  $t \rightarrow \infty$  下趋于零, 第 2 项为式(2)的长时的稳态解:

$$x = \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

式(5)中稳态解的相位小于零且满足  $\sin \varphi = \frac{-\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$  落后于策动力的零相位, 可以用复

数法方便地求出稳态解<sup>[7]</sup>. 电磁阻尼使得电偶极振子辐射电磁波, 其一个周期内能量损失的平均值为

$$P = -\alpha \langle \dot{x}^2 \rangle = -m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle = -m\gamma \left( \frac{eE_0\omega/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \right)^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle =$$

收稿日期: 2022-01-15; 修回日期: 2022-03-15

基金项目: 教育部高等学校光电信息科学与工程专业教学指导分委员会 2020 年教育教学研究项目, 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会 2021 年高等学校教学研究项目资助

作者简介: 黄永义(1978—), 男, 安徽阜阳人, 西安交通大学物理学院副教授, 主要从事原子物理教学和研究工作.

通信作者: 张淳民, E-mail: zcm@mail.xjtu.edu.cn

大学物理

<http://dxwl.bnu.edu.cn>

$$-\frac{m\gamma}{2} \left( \frac{eE_0\omega/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \right)^2 = -\gamma\varepsilon \quad (6)$$

式中

$$\varepsilon = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} \left( \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \right)^2$$

为一维电偶极振子的能量,且有

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2}$$

能够被该振子接收的电磁波对该振子做功,一个周期内给该振子补充能量的平均值为

$$\begin{aligned} P' &= eE_0 \langle \cos \omega t \cdot \dot{x} \rangle = \\ &= \frac{-(eE_0)^2 \omega/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \langle \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t \rangle = \\ &= \frac{(eE_0)^2 \omega/m}{2\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} (-\sin \varphi) = \\ &= \frac{m\gamma}{2} \left( \frac{eE_0\omega/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}} \right)^2 \quad (7) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \langle \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t \rangle &= \\ \frac{1}{T} \int_0^{t+T} \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) dt &= \frac{\sin \varphi}{2} \end{aligned}$$

从式(6)和式(7)看,一个周期内电偶极谐振子损失能量和获得能量相等,这也是意料中的事.事实上,电偶极振子和电磁波都在完美反射的封闭空腔里,电偶极振子辐射阻尼损失的能量变成电磁波,电磁波对电偶极振子做功又把能量还给振子,电偶极振子和电磁波的总能量不会损失,普朗克将空腔里电偶极振子的辐射阻尼称为守恒阻尼.

## 2 黑体空腔中热平衡条件的导出

电磁波对电偶极振子做功给与的能量式(7),这就要求该电偶极振子能够接收此电磁波的辐照能量.当入射电磁波的电场垂直于振子电偶极矩时,该电偶极振子不会接收到该电磁波的辐照能量.实际空腔内的电磁波会来自某电偶极振子的任何一个方向,如何保证电偶极振子能接收各个方向电磁波的辐照能量呢?费曼给出了答案,电偶极矩相互垂直的三个电偶极振子系统像一个振子一样能够接收来自任何方向电磁波的辐照能量<sup>[8]</sup>.从式(6)和式(7)我们得到3个电偶极振子系统辐射阻尼损失的能量和从各种振幅 $E_{0i}$ 、频率为 $\omega$ 的电磁波辐照获

得的能量达到平衡的条件为

$$3\gamma\varepsilon = \frac{\gamma e^2}{2m} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \sum_i E_{0i}^2 \quad (8)$$

式中各种振幅的求和 $\sum_i E_{0i}^2$ 可以用频段 $\omega \rightarrow \omega + d\omega$ 里的光强 $I(\omega)$ 表示:

$$I(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sum_i E_{0i}^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \sum_i E_{0i}^2 \quad (9)$$

式(9)中 $c$ 为光速,将式(9)代入式(8)得

$$\varepsilon = \frac{e^2}{3m\varepsilon_0 c} \frac{\omega^2 I(\omega) d\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \quad (10)$$

一个电偶极振子接收的不只是单一频率 $\omega$ 的电磁波,而是零到无穷的所有频率的电磁波,此时需要对式(10)右侧进行积分:

$$\varepsilon = \frac{e^2}{3m\varepsilon_0 c} \int_0^\infty \frac{\omega^2 I(\omega) d\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \quad (11)$$

在辐射阻尼 $\gamma$ 非常小的情况下电偶极振子的响应曲线 $f(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$ 在 $\omega_0$ 附近十分陡峭,相对地,光强 $I(\omega)$ 则可以视为 $\omega_0$ 附近的缓变函数.在 $\omega \rightarrow \omega_0$ 时式(11)的积分变为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{e^2}{3m\varepsilon_0 c} \int_0^\infty \frac{\omega_0^2 I(\omega_0) d\omega}{(\omega_0+\omega)^2 (\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2 \omega_0^2} = \\ &= \frac{e^2}{3m\varepsilon_0 c} \int_0^\infty \frac{\omega_0^2 I(\omega_0) d\omega}{4\omega_0^2 (\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2 \omega_0^2} = \\ &= \frac{e^2 I(\omega_0)}{12m\varepsilon_0 c} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2/4} = \\ &= \frac{e^2 I(\omega_0)}{12m\varepsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 + \gamma^2/4} \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)中用了变量代换 $\omega' = \omega_0 - \omega$ ,由于 $\frac{1}{\omega'^2 + \gamma^2/4}$ 离开峰值 $\omega' = 0$ 位置后快速趋于零,可以

将式(12)的上限取到无穷大.利用 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 + \gamma^2/4} =$

$\frac{2\pi}{\gamma}$ ,式(12)积分可得

$$I(\omega_0) = \frac{6m\varepsilon_0 c \gamma}{\pi e^2} \varepsilon \quad (13)$$

考虑到辐射阻尼系数式(3),光强和能量密度的关系 $I(\omega_0) = \rho(\omega_0) c = \frac{\rho(\nu_0) c}{2\pi}$ ,式(13)变为

$$\rho(\nu_0) = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} \varepsilon \quad (14)$$

(下转42页)

大学物理

<http://dxwl.bnu.edu.cn>

## Discussion on treatment of random error

ZHANG Zhi-ming

- (1. Center of Physics Experiments, Guangdong Technology College, Zhaoqing, Guangdong 526100, China;  
2. Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials,  
South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China)

**Abstract:** Some concepts (including the variance and the standard deviation) about random error in textbooks on physics experiments are discussed. Some related equations (including Bessel equation and the equation for standard deviation of arithmetic mean value) are proved, and some non-self-consistent descriptions for normal distribution are corrected.

**Key words:** college physics experiment; random error treatment; error distribution function; discrete variable; continuous variable

(上接10页)

用腔壁上很多原子的电偶极振子的平均能量  $\bar{\varepsilon}$  代入式(14), 去掉式(14)中的  $\theta$  角标(因为这个结果可用于振子和电磁波平衡时的所有频率), 我们就得到了黑体空腔中原子的电偶极振子和腔内电磁波交换能量满足的热平衡条件:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon} \quad (15)$$

### 3 小结

历史上普朗克先于瑞利导出了热平衡条件, 最早给出了正确的黑体辐射谱的公式. 虽然物理学家的直觉常常是正确的, 不过直觉给出的结果依然需要经过严格的理论论证或实验证实, 因为直觉本质上是非逻辑的比较可靠的主观的猜测. 本文导出热平衡条件的过程对于学习黑体辐射知识是有帮助的, 同时也能很好地串联受迫振动、带电粒子的辐射、光强和电磁波的能量密度等知识点. 理解和掌握该导出过程不需要高深的数学, 只需要大学物理的知识就足够了, 因此本文对物理教学是有意义的.

### 参考文献:

- [1] Rayleigh F. Remarks upon the law of complete radiation [J]. *Philosophical Magazine*, 1900, 49: 539-540.
- [2] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程 量子物理 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [3] Planck M. Über irreversible Strahlungsvorgänge [J]. *Berl. Ber.*, 1899: 440-486.
- [4] 吴大猷. 量子论与原子结构 [M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [5] Longair M. *Theoretical concepts in physics* [M]. 3rd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
- [6] 郭硕鸿著, 黄道本, 李志兵, 林琼桂修订. 电动力学 [M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [7] 钟锡华, 周岳明. 大学物理通用教程 力学 [M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2010.
- [8] Feynman R, R. Leighton, M. Sands. *The Feynman Lectures on physics Vol. 1* [M]. Redwood City, California: Addison-Wesley Publishing Co, 1963.

## Derivation of heat balanced condition in black body cavity

HUANG Yong-yi, ZHANG Chun-min

(School of Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** We derive the heat balanced condition from the fact that the lost energy of an atomic oscillator in its radiation damping in black body cavity is equal to its acquired energy from electromagnetic wave.

**Key words:** radiation damping; black body cavity; heat balanced condition

大学物理

<http://dxwl.bnu.edu.cn>