

# 混合长度理论的改进及其在变物性传热中的应用

毛宇飞 白博峰 郭烈锦

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

**摘要** 根据边界层理论, 对管内变物性湍流强制对流换热控制方程组进行简化; 并通过考虑湍流输运中的密度脉动, 对传统的混合长度湍流模型进行改进, 使之能同时适用于常物性流动和变物性流动。基于该计算模型, 对管内超临界压力水湍流对流换热特性进行了数值模拟。计算结果表明, 本文的计算模型能正确地反映出超临界工况下的变物性对流换热特征, 换热系数预测值与相应实验数据符合良好, 并且计算过程极为高效。

**关键词** 变物性; 超临界; 混合长度; 对流换热

**中图分类号**: TK124 **文献标识码**: A **文章编号**: 0253-231X(2011)01-0058-05

## IMPROVEMENT OF THE MIXING LENGTH THEORY AND ITS APPLICATION TO VARIABLE-PROPERTY HEAT TRANSFER

MAO Yu-Fei BAI Bo-Feng GUO Lie-Jin

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** The governing equations for variable-property turbulent forced convection heat transfer in tubes were simplified according to the boundary-layer theory. And an improved mixing length turbulence model was developed by introducing the effect of density fluctuations into the equations of turbulent transport, which can be applied to both constant-property and variable-property flows. Based on the proposed calculation models above, numerical simulations were carried out to investigate the turbulent convective heat transfer of water flowing in tubes at supercritical pressures. The simulated results showed that the present calculation models can reproduce the heat transfer characteristics exhibited in the experiments for variable-property flows at supercritical pressures. The predicted heat transfer coefficients were in good agreement with the experimental results and the calculation was performed with high efficiency.

**Key words** variable-property; supercritical; mixing length; convective heat transfer

## 0 引言

超临界流体技术的发展, 如超临界火力发电机组、超临界水冷核反应堆以及超临界水氧化技术等, 迫切需要人们更准确地了解和掌握流体在超临界压力下的传热规律。超临界压力下流体的传热具有特殊性, 其根本原因是流体物性在拟临界区域内随温度变化很大。基于单相变物性对流换热机理, 目前许多学者对超临界压力下管内流体湍流对流换热特性进行了数值模拟<sup>[1~5]</sup>。数值计算的精度在很大程度上取决于计算中所选用的湍流模型, 现有的湍流模型几乎都是基于常物性流动发展起来的, 它们是否能直接应用于变物性流动有待商榷。然而, 受超临界工况高温高压条件的限制, 目前还很难通过实验直接获取相关的湍流信息以建立适用于超临界变

物性流动的湍流模型, 因此学者们在数值研究中大多还是采用传统的湍流模型而很少加以改进。

本文从工程应用的角度, 不深入涉及湍流的结构及发生的机理等基本问题, 而是基于边界层理论, 从物理概念上阐明实际流动中物性变化的重要性, 并从考虑密度脉动出发, 对传统的混合长度湍流模型进行改进, 使之同时适用于常物性流动和变物性流动; 通过引入合理的假设, 从数学上简化相关的控制方程, 使之能高效且准确地对管内变物性湍流强制对流换热进行定量计算。

## 1 湍流模型的变物性改进

在拟临界区域, 流体物性的剧烈变化将对流动

**收稿日期**: 2009-12-21; **修订日期**: 2010-12-18

**基金项目**: 国家自然科学基金重点项目 (No.50536020); 创新群体项目 (No.50821064)

**作者简介**: 毛宇飞 (1979-), 男, 江苏宜兴人, 博士, 主要从事超临界流体传热与螺旋管内汽液两相流的研究。

与传热过程产生重大影响, 此时速度场和温度场是相互耦合的。实际研究过程中, 若同时对每个物性变化产生的影响进行分析, 将使问题变得非常复杂。通常采用的办法是重点分析其中某个物性变化的影响, 该物性与其它物性也是相互耦合的, 因为该物性的变化会引起温度场的变化, 而温度场的变化又会引起整个物性场的变化, 这样就从一个物性变化出发却考虑了整体物性变化的影响。目前, 最可行的方法是考虑密度的变化, 因为它能直接与各求解变量联系起来。

对于直管内的二维  $(x-u, r-v)$  边界层型湍流流动, 考虑密度脉动, 并忽略体积力的影响, 其轴向运动方程可写为:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\cdot\bar{u})}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{\rho}\bar{v}\cdot\bar{u})}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} - \bar{\rho}v'u' - \bar{v}\rho'u' - \bar{u}\rho'v' - \rho'u'v'\right)\right] \quad (1)$$

从方程 (1) 可看出, 考虑密度脉动时湍流应力中将产生三个新的密度脉动值附加项。对于边界层型流动,  $\bar{v}$  的值近于零, 忽略三阶脉动值乘积项, 于是变物性条件下的湍流应力为:

$$\tau_t = |\bar{\rho}v'u' + \bar{u}\rho'v'| \quad (2)$$

根据经典热力学, 密度脉动值与温度脉动值之间存在该近似关系:  $\rho' \sim -\rho\beta T'$  ( $\beta$  为热膨胀系数)。代入式 (2) 得到:

$$\tau_t = |\bar{\rho}v'u'| \left| 1 - \beta\bar{u}\frac{\overline{v'T'}}{v'u'} \right| \quad (3)$$

对于边界层型流动, 在加热条件下, 速度脉动值和温度脉动值的符号关系如下:

$$v' < 0, u' < 0, T' > 0; v' > 0, u' > 0, T' < 0$$

于是式 (3) 中二阶脉动值乘积项的符号如下:

$$\overline{v'u'} > 0, \overline{v'T'} < 0$$

根据混合长度理论有:

$$\overline{v'u'} = l_m^2 \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)^2, \overline{v'T'} = -\frac{l_m^2}{Pr_t} \left|\frac{\partial\bar{T}}{\partial r} \cdot \frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right| \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3) 整理得到:

$$\tau_t = \bar{\rho}l_m^2 \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)^2 \left(1 + \frac{\beta\bar{u}}{Pr_t} \left|\frac{\partial\bar{T}}{\partial r} / \frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right|\right) \quad (5)$$

定义下列无量纲量 (为方便起见, 此后各方程中省略时均值的符号):

$$\eta = \frac{r}{R}, U = \frac{\mu_b u}{(-dp/dx)R^2}, \Theta = \frac{T_w - T}{qd/\lambda_b} \quad (6)$$

于是变物性流动时湍流黏性系数计算如下:

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| (1 + F_m) = \mu_{t,0} (1 + F_m) \quad (7)$$

式中,  $\mu_{t,0}$  表示由原始混合长度模型计算的湍流黏性系数,  $F_m$  为考虑密度脉动时的变物性修正因子:

$$\frac{\mu_{t,0}}{\mu} = \frac{\rho l_m^2}{\mu} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| = \frac{\mu_b \rho}{\mu \rho_b} \frac{Re_b}{2} \left(\frac{l_m}{R}\right)^2 \left|\frac{\partial(U/U_m)}{\partial\eta}\right| \quad (8)$$

$$F_m = \frac{\beta u}{Pr_t} \left|\frac{\partial T}{\partial r} / \frac{\partial u}{\partial r}\right| = \frac{\beta q d}{\lambda_b Pr_t} \frac{U}{U} \left(\left|\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right| / \left|\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|\right) \quad (9)$$

在本文数值计算中, 原始混合长度湍流模型选用 Nikurades-Van Driest 模型<sup>[6]</sup>:

$$\frac{l_m}{R} = (0.14 - 0.08\eta^2 - 0.06\eta^4) (1 - e^{-y^+/26}) \quad (10)$$

式中的无因次距离  $y^+$  采用 Goldmann<sup>[1]</sup> 定义来计算:

$$y^+ = \int_0^y \frac{\sqrt{\rho\tau_w}}{\mu} dy = \int_0^y \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_b}{\mu} \sqrt{\frac{\rho Re_b}{\rho_b U_m}}\right) d\eta \quad (11)$$

## 2 控制方程组的简化及无量纲化

超临界压力下流体密度在拟临界点邻域内随温度的变化相当剧烈, 此时流体严格意义上应作为可压缩流体处理; 此外, 若考虑密度脉动的影响, 连续方程中会含有密度脉动值的附加项。故很难直接采用常规 SIMPLE 系列算法来求解流场。为此本文忽略径向流动, 将管内湍流对流换热作为一维导热型问题来求解。根据边界层理论, 通过数量级分析, 管内湍流对流换热控制方程组简化为:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r(\mu + \mu_t) \frac{du}{dr} \right] + \left(-\frac{dp}{dx}\right) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r(\lambda + \lambda_t) \frac{dT}{dr} \right] - \frac{\rho}{\rho_b} \frac{c_p}{c_{pb}} \frac{u}{u_m} \frac{4q}{d} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

对方程组 (12) 无量纲化得到:

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[ \eta \frac{\mu}{\mu_b} \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu}\right) \frac{dU}{d\eta} \right] + 1 = 0 \\ \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[ \eta \frac{\lambda}{\lambda_b} \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t}\right) \frac{d\Theta}{d\eta} \right] + \frac{\rho}{\rho_b} \frac{c_p}{c_{pb}} \frac{U}{U_m} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

从无量纲控制方程组 (13) 中可以清楚地看出常物性流动和变物性流动的区别。

### 3 数值方法

计算区域的离散采用区域离散法 B(内节点法), 为了能有效地分辨管道内壁面附近处较大的速度梯度和温度梯度, 径向采用非均匀网格, 沿管心向管壁定比加密。计算时为确保在粘性底层内布置较多的节点, 规定与壁面相邻的第一个节点的无因次距离  $y^+$  小于 0.1。对于超临界压力下的单相变物性流动, 质量流速越高、物性变化越剧烈以及管径越大, 得到精确计算结果所需的网格数就越多。经反复数值试验, 对于本文的计算工况, 相邻径向网格宽度之比取 1.08~1.1, 网格数取 150~200。计算过程中物性的更新直接调用 IAPWS Formulation 95 水物性源程序计算, 并且对所有求解变量和物性均采用了亚松弛处理。当所有的求解变量满足相邻两次迭代的相对偏差小于  $10^{-6}$  时, 认为数值解收敛。

### 4 计算结果与分析

#### 4.1 常物性工况

先计算常物性工况, 对计算模型和数值程序进行验证, 计算结果与传统经验关系式进行比较, 本文选用 Petukhov<sup>[7]</sup> 关系式:

$$Nu = \frac{(f/8)RePr}{1.07 + 12.7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)} \quad (14)$$

式中 Darcy 阻力系数  $f$  由 Filonenko 关系式计算:

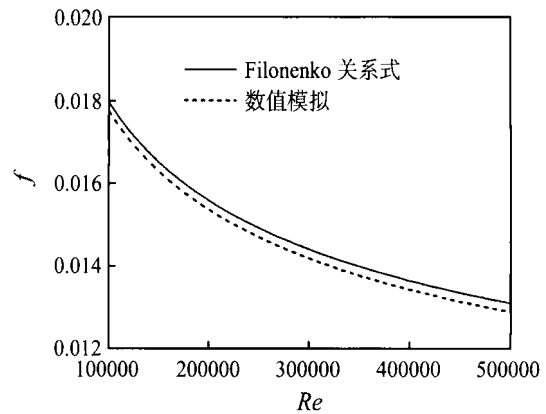
$$f = (1.82 \lg Re - 1.64)^{-2} \quad (15)$$

图 1 给出了直管内常物性湍流强制对流换热的阻力系数和  $Nu$  数的模拟结果 ( $Re=10^5 \sim 5 \times 10^5$ )。由图 1(a), 阻力系数的数值预测值与 Filonenko 关系式计算值的相对偏差在 2%以内; 由图 1(b),  $Nu$  数的预测精度受到湍流  $Pr$  数  $Pr_t$  取值的影响 (计算中  $Pr_t$  数通常取 0.9~1 之间的常数),  $Nu$  数的预测值随  $Pr_t$  数的增大而减小, 对于该常物性工况 (流体  $Pr$  数为 1),  $Pr_t$  取 1 时的数值预测精度最高, 相应  $Nu$  数预测值与 Petukhov 关系式计算值的相对偏差也在 2%以内。计算结果证明了计算模型和数值程序的正确性和可靠性。

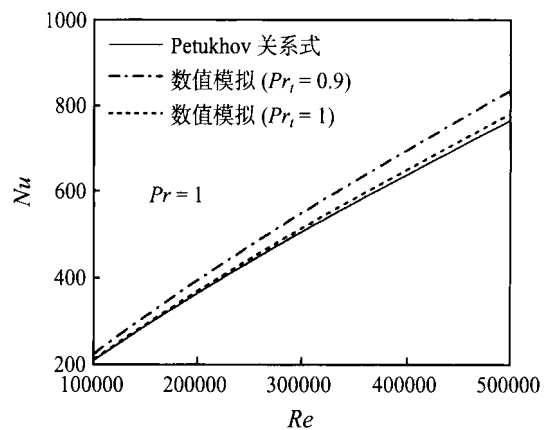
#### 4.2 超临界变物性工况

对一个典型超临界传热工况 (管道直径  $d=10$  mm, 压力  $p=24.5$  MPa, 质量流速  $G=1200$   $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ , 壁面热流密度  $q=465$   $\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$ ) 进行模拟, 计算结果与 Yamagata<sup>[8]</sup> 实验数据的比较如图 2 所示。由图可知, 采用原始混合长度湍流模型时拟临界区域内换热系数的预测值比实验值明显偏低,

而改进湍流模型的预测精度明显提高, 换热系数预测值与实验值吻合良好。此外, 换热系数预测值随  $Pr_t$  的增大而有所减小, 对于该超临界变物性传热工况,  $Pr_t$  取 0.9 要优于取 1.0。在此后的计算中, 湍流模型采用改进混合长度模型,  $Pr_t$  取 0.9。



(a) 阻力系数随  $Re$  数的变化



(b)  $Nu$  数随  $Re$  数的变化

图 1 常物性工况模拟结果

Fig. 1 Comparison of simulation with empirical correlations for constant-property flows

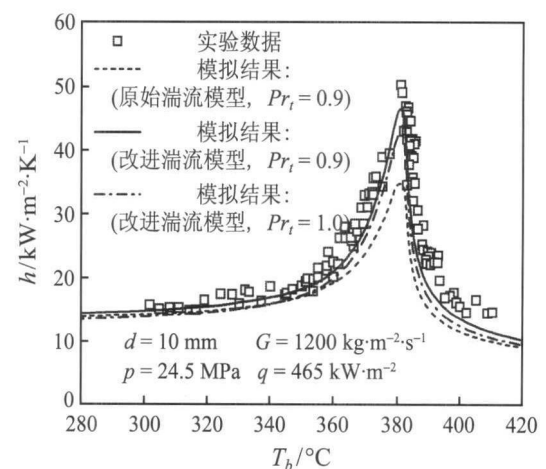


图 2 一个典型超临界传热工况的模拟结果

Fig. 2 Comparison of simulation with the experimental data for a typical supercritical heat transfer

超临界压力下流体在管内的湍流对流换热特性主要受到壁面热流密度、压力及质量流速等参数的影响,下面分别对这些影响因素进行模拟分析。

在管径、压力和质量流速一定的条件下 ( $d=10$  mm,  $p=24.5$  MPa,  $G=1200$  kg·m<sup>-2</sup>·s<sup>-1</sup>), 模拟热流密度对换热系数的影响, 计算结果与 Yamagata<sup>[8]</sup> 实验曲线的比较如图 3 所示。由图可知, 在拟临界区域外的低焓值区和高焓值区, 热流密度对换热系数的影响不大; 但在拟临界区域内, 随着热流密度的增大, 传热强化作用逐渐削弱, 相应最大换热系数也逐渐减小。除低热流密度工况外 ( $q=233$  kW·m<sup>-2</sup>), 换热系数的预测值整体上与实验值吻合良好。热流密度越低, 拟临界区内的传热强化越明显, 但实验数据通常也越分散且带有一定的随机性, 因此在模拟计算中通常会发现某一组低热流工况的模拟结果与实验数据之间存在一定偏差, 但另外一组低热流工况的模拟结果却与实验数据吻合良好。本文的计算模型 (一维无量纲控制方程组配合改进混合长度湍流模型) 的预测性能要明显优于前人采用的计算模型<sup>[2,5]</sup> (二维控制方程组配合各类传统  $k-\epsilon$  湍流模型), 特别对于高热流密度工况。

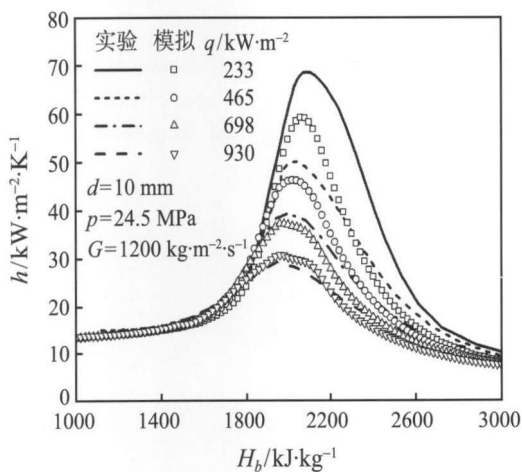


图 3 超临界工况下壁面热流密度对传热的影响

Fig. 3 Effect of wall heat flux on supercritical heat transfer

在管径、质量流速和壁面热流密度一定的条件下 ( $d=10$  mm,  $G=1200$  kg·m<sup>-2</sup>·s<sup>-1</sup>,  $q=465$  kW·m<sup>-2</sup>), 模拟压力对换热系数的影响, 计算结果与 Yamagata<sup>[8]</sup> 实验曲线的比较如图 4 所示。由图可知, 拟临界区域内传热强化的程度随压力  $p$  的升高而逐渐减弱, 相应最大换热系数也逐渐减小, 这也正与超临界压力下比定压热容随压力和温度/焓值的变化特性类似。换热系数的预测精度随压力的减小而有所降低, 这是因为压力越接近临界压力, 物性变化

越剧烈, 边界层型流动的假设的合理性也就越差。

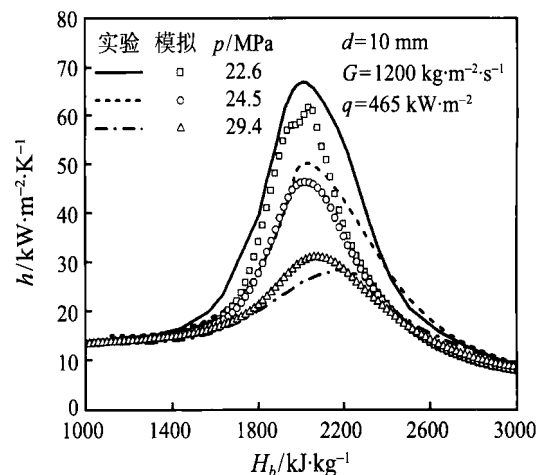


图 4 超临界工况下压力对传热的影响

Fig. 4 Effect of pressure on supercritical heat transfer

在管径、压力和壁面热流密度一定的条件下 ( $d=12$  mm,  $p=23$  MPa,  $q=465$  kW·m<sup>-2</sup>), 模拟质量流速对换热系数的影响, 计算结果与徐峰<sup>[4]</sup> 实验数据的比较如图 5 所示。从图中可看出, 质量流速越大, 强制对流作用越强, 传热效果越好 (与常物性工况实验结论一致), 相应最大换热系数也越大。此外, 质量流速越大, 边界层理论的适用性越好, 计算模型的预测精度也往往越高。

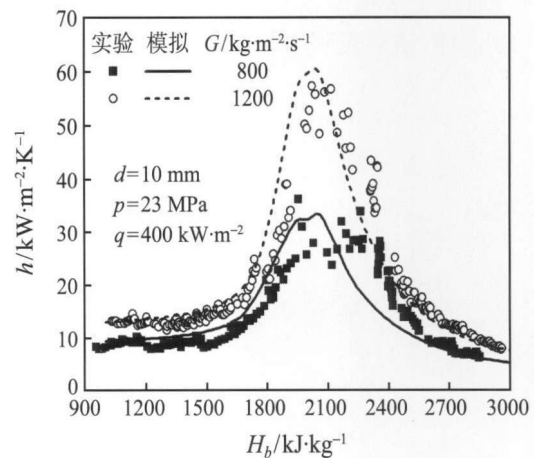


图 5 超临界工况下质量流速对传热的影响

Fig. 5 Effect of mass velocity on supercritical heat transfer

以上的计算工况均是针对垂直圆管, 对于水平圆管内的超临界对流传热工况, 若浮力的影响可以忽略, 也可采用本文的计算模型来模拟。对管径为 6.3 mm 水平管内的两组超临界工况进行模拟, 计算结果与 Bazargan<sup>[3]</sup> 实验数据的比较如图 6 所示, 由图可见, 计算值与相应实验数据吻合良好。

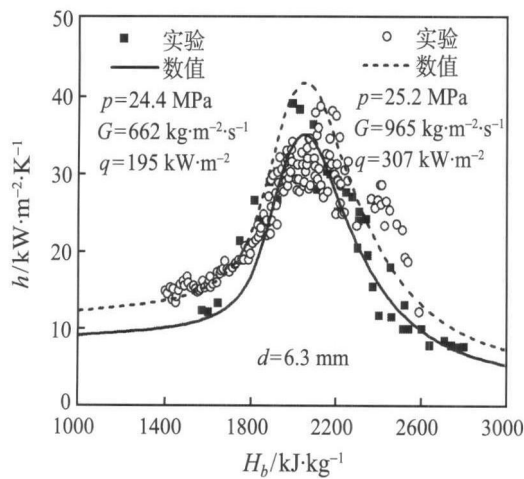


图 6 水平管超临界工况的模拟结果

Fig. 6 Comparison of simulation with experimental data for horizontal flows at supercritical pressures

## 5 结 论

(1) 对于正常超临界传热工况 (包括拟临界内的强化传热和拟临界区外的普通传热), 边界层理论仍然适用于管内变物性流动, 以此建立的一维无量纲对流换热控制方程组能用来模拟超临界变物性传热过程中压力、质量流速和壁面热流密度等参数对换热系数的影响, 并且计算工作量大大减少。

(2) 传统适用于常物性管流的混合长度湍流模型不能直接应用于变物性流动, 但经本文从考虑密度脉动出发提出的湍流运输的变物性修正方法改进后能同时适用于常物性流动和变物性流动。

(3) 模拟结果表明, 本文计算模型 (一维无量纲

控制方程组配合改进混合长度模型) 对直管内超临界湍流强制对流换热具有良好的预测性能。

## 参 考 文 献

- [1] Goldmann K. Heat Transfer to Supercritical Water and Other Fluids with Temperature Dependent Properties [J]. Chem. Eng. Prog. Symp. Ser., 1954, 50(11): 105-113
- [2] Koshizuka S, Takano N, Oka Y. Numerical Analysis of Deterioration Phenomena in Heat Transfer to Supercritical Water [J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1995, 38: 3077-3084
- [3] Bazargan M. Forced Convection Heat Transfer to Turbulent Flow of Supercritical Water in a Round Horizontal Tube [D]. Vancouver: British Columbia University, 2001
- [4] 徐峰. 超临界压力下水在管内流动与传热特性研究 [D]. 西安: 西安交通大学, 2004  
XU Feng. Study of Water Flow and Heat Transfer Characteristics through Pipes under Supercritical Pressure [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2004
- [5] Sharabi M, Ambrosini W. Discussion of Heat Transfer Phenomena in Fluids at Supercritical Pressure with the Aid of CFD Models [J]. Ann. Nucl. Energy, 2009, 36: 60-71
- [6] Patankar S V, Ivanovic M, Sparrow E M. Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer in Internally Finned Tubes and Annuli [J]. ASME J. Heat Transfer, 1979, 101: 29-37
- [7] Petukhov B S. Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties [J]. Advances in Heat Transfer, 1970, 6: 511-564
- [8] Yamagata K, Nishikawa K, Hasegawa S, et al. Forced Convective Heat Transfer to Supercritical Water Flowing in Tubes [J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1972, 15: 2575-2593