

非线性二维稳态导热反问题的一种新解法

白博峰 郭烈锦 陈学俊

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室 西安 710049)

关键词 导热反问题, 非线性, 二维稳态

1 引言

导热反问题, 是指根据实验测得的物体表面或内部某些位置的温度值, 通过求解导热微分方程, 反推导致这一结果的原因。在数学上是一种不适定问题, 求解结果对测量误差十分敏感, 即使有较小的测量误差也会带来较大的影响。

待定边界条件类型的导热反问题在工程和科学试验中有广泛的应用背景。许多学者对此进行了研究, 但多停留在一维和二维线性问题上, 对多维非线性问题的研究较少^[1~5]。Beck^[1] 对一维问题讨论了五种求解方法: 分析法, D'souza 法, Weber 法, RB 方法和 Hill-Hensel 方法, 其中前三种不能求解非线性问题, 后两种对非稳态项做了不同处理, 不能求解稳态问题。MonteCarlo 法^[2] 和积分求解法^[3] 也得到了应用, 但对非线性问题无效。Huang 等人成功地用梯度法找到了第二类边界条件的迭代步长及迭代方向, 通过反复地求解导热正问题, 敏感系数问题和修正问题, 不断地修正边界条件而获得收敛解, 不足之处是对边界条件的初值选择要求很严格, 计算量较大^[6]。

本文从 Huang^[6] 的基本思想出发, 以求解流体在电加热螺旋管内流动时的对流换热系数分布为例, 设计边界条件的迭代步长和迭代方向, 用逐步修正逼近的方法来求解导热正问题, 最终得到收敛解。

2 数学模型及差分格式

如图 1 所示, 边界 Γ_1 上的条件未知。 Γ_1 边界常难以直接测量, 温度传感器多布置在容易实现的边界 Γ_2 上。二维稳态非线性导热问题的数学描述为:

$$\frac{1}{h_2 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial X_1} \left(K \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial T}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left(K \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial T}{\partial X_2} \right) \right] + \dot{S} = 0 \quad (1)$$

$$K \frac{\partial T}{h_1 \partial X_1} = f(X_2), \quad X_1 = r_0 \quad (2)$$

$$K \frac{\partial T}{h_1 \partial X_1} = h(X_2)(T - T_f), \quad X_1 = r_i \quad (3)$$

Γ_1 、 Γ_2 的边界条件根据实际可写成其它类型。 $h(X_2)$ 未知。 h_1 、 h_2 、 h_3 为拉梅系数, 对螺旋管 $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = \{[(t/2\pi)^2 + (R + X_1 \cos X_2)^2 / \cos^2 \gamma] / [R^2 + (t/2\pi)^2]\}^{0.5}$,

国家自然科学基金资助项目。

本文曾于 1995 年 10 月在宜昌召开的中国工程热物理学会传热传质学学术会议上宣读。

$\gamma = \text{tg}^{-1}(X_1 \sin \beta \sin X_2)/(R + X_1 \cos X_2), \beta = \text{tg}^{-1}t/2\pi R$ 。 \dot{S} 为内热源, K 为导热系数, \dot{S} 、 K 均是温度 T 的函数。计算的目的在于求解内壁上换热系数 $h(X_2)$ 的分布。由测量结果还知道 Γ_2 上一些点的温度值:

$$T(r_0, X_{2i}) = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_m \tag{4}$$

N_m 为热电偶总支数。采用内节点法 [7] 划分计算区域, 并对控制容积 P (见图 2) 积分, 得到

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b \tag{5}$$

式中 a_P 、 a_W 、 a_E 、 a_S 、 a_N 、 b 的形式可见文献 [7]。对不同边界条件, 均按附加源项法 [7] 处理。

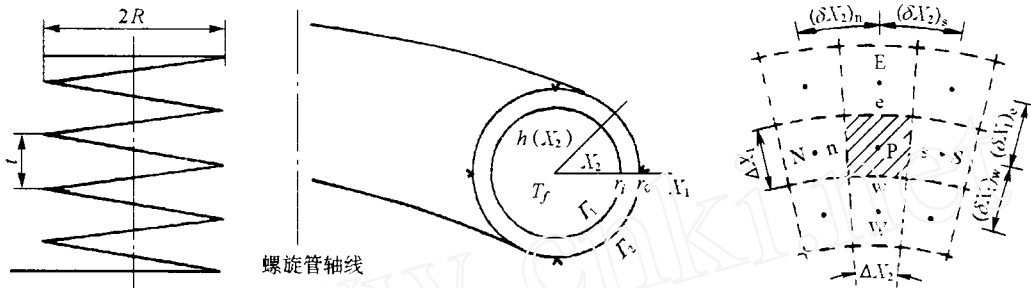


图 1 螺旋管结构图和截面示意图 (v 为热电偶)

图 2 控制容积 P

3 求解方法

假设一个边界条件 $h(X_2)$, 就得到一个温度场。不同的边界条件可得到不同的温度场, 但仅当在边界 Γ_2 上的温度计算值与测量值一致时, 所给的边界条件才为所求。假设温度测量值为真值, 当相应位置上的计算值大于测量值时, 说明换热量的估计值低于真值, 需增加 $h(X_2)$, 相反说明换热量大于真值, 需减小 $h(X_2)$ 。这里提出了如下的迭代关系式:

$$h(X_{2i}) = h(X_{2i})^* + a \cdot (T_i - Y_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_m \tag{6}$$

式中 $h(X_{2i})^*$ 为上次迭代值, a 为迭代步长 ($a > 0$), $(T_i - Y_i)$ 为迭代方向, T_i 为 Y_i 对应点的计算值。如果:

$$|T_i - Y_i|_{\max} \leq \epsilon \tag{7}$$

$h(X_2)$ 即为所求, 否则用 (6) 式修正, 重复计算。

4 算法稳定性数值试验

确定测量误差对计算结果的影响是十分重要的。螺旋管 $\Phi 15 \times 2 \text{ mm}$, $R = 128 \text{ mm}$, $K = 14.28(1 + 0.001T) \text{ W/(m} \cdot \text{C)}$, 单位长度的电加热功率为 8.7 kW/m , 外壁保温热效率为 0.95 , 管内工质温度 113.4°C 。管外壁布置了 8 个热电偶。预先假设换热系数沿圆周方向的三种分布:

$$1. \text{ 三角形分布: } h(X_2) = \begin{cases} 7000 + \frac{14000}{\pi} \cdot X_2, & 0 \leq X_2 < \pi \\ 35000 - \frac{14000}{\pi} \cdot X_2, & \pi \leq X_2 < 2\pi \end{cases}$$

2. 梯形分布：
$$h(X_2) = \begin{cases} 14000, & 0 \leq X_2 < \pi \\ 35000, & \pi \leq X_2 < 2\pi \end{cases}$$

3. 正弦波形分布：
$$h(X_2) = 7000 \cdot (1.5 + 0.5 \sin X_2)$$

用导热正问题的解做为温度测量的真值，“假想”测量值用 $T_{\text{测}} = T_{\text{真}} + \Delta T$ 引入，测量误差 ΔT 取 $0, \pm 0.2, \pm 0.5^\circ\text{C}$ ，用前面叙述的方法求解导热反问题，所得结果 $h(X_2)$ 的估计值与真实值之间的最大相对误差见表 1，其中最大相对误差为：

$$E_h = \frac{|h_{\text{估计}} - h_{\text{真}}|_{\text{max}}}{h_{\text{真max}}} \times 100\% \quad (8)$$

表 1 测量误差对算法的影响

E_h / 分布 \ ΔT	-0.5	-0.2	0.0	0.2	0.5
三角形	3.4	0.7	0.1	2.0	4.9
梯形	2.1	0.7	0.5	1.8	3.4
正弦波形	2.3	0.6	0.4	1.3	3.4

从表 1 可知，当测量温度为真值时，修正逼近法能够足够精确地求得未知边界条件，此时的误差是由逼近误差和数值计算误差所引起的；当测量值存在误差时，未知边界条件的估计值偏离真实值，并且测量误差越大，偏离真实值也越远；未知边界条件的估计误差近似线性地依赖于温度测量误差。当测量误差不超过 0.5°C 时，对上述算例，算法引起的最大误差不超过 5%，因此这种方法的稳定性很好。

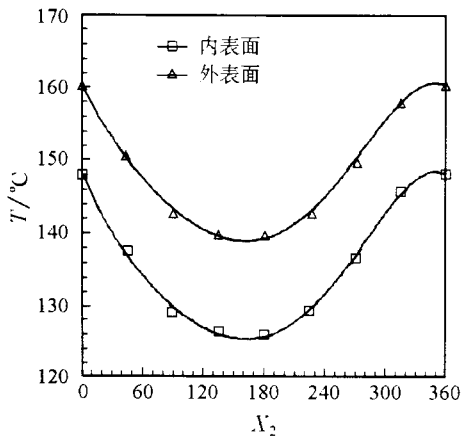


图 3 壁温分布

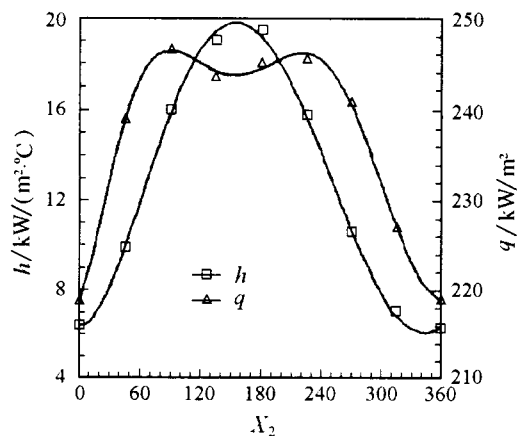


图 4 换热系数及热流密度分布

本文给出了 $P = 0.5 \text{ MPa}$, $\Delta T_{sub} = 40^\circ\text{C}$, $G = 2250 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, $q = 240 \text{ kW}/\text{m}^2$ 下的实验数据处理结果。由图 3 和图 4 可知，内壁温与外壁温分布相似，内外壁温差为 10°C 的数量级，在 $X_2 = 0$ 处壁温最高，换热系数最小，热流密度也最小，在 $X_2 = \pi$ 处壁温最低，换热系数最大，热流密度却不是最大。这些结果同管内工质的流动有密切关系。

由图 1 可知, $X_2 = 0$ 处位于螺旋管圈的最内侧, $X_2 = \pi$ 处位于管圈的最外侧, 由于离心力的作用, 表现为管圈外侧的换热效果大大高于内侧, 因此 $X_2 = \pi$ 处的换热最强, 但是此处的热流密度并不是最大, 这是由于材料的导热不均匀性造成的。

5 结 论

用逐步修正逼近法可求解二维稳态非线性导热反问题, 此方法求解简单, 收敛速度快, 精度高。此方法稳定性好, 在一定的测量误差范围内, 可精确地估计出未知边界条件, 估计值误差完全满足目前科研与工程应用的要求。此法还可应用于求解其它类型边界条件的导热反问题, 并能处理复杂几何形状的物体。此法的全局收敛特性有待改善。

参 考 文 献

- [1] Beck J V, Blackwell B, Clair C R St. Inverse Heat Conduction—Ill Posed Problem. New York: Wilay, 1985, 247-256
- [2] Haji Sheikh A, Backingham F P. Multidimensional Inverse Heat Conduction Using the Monte Carlo Method. ASME J of Heat Transfer, 1993, 115: 26-33
- [3] Zabarar N, Liu T C. An Analysis of Two-dimensional Linear Inverse Heat Transfer Problems Using An Integral Method. Numerical Heat Transfer, 1988, 13: 527-533
- [4] 张洪济. 钢锭模薄壁化研究的导热反问题方法. 工程热物理学报, 1987, 8(3): 268-272
- [5] 李元涌. 摩擦学的研究. [博士论文]. 西安: 西安交通大学, 1991
- [6] Huang C H, Özisik M N. Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat Flux in Laminar Flow Through a Parallel Plate Duct. Numerical Heat Transfer, 1992, 21(Part A): 55-70
- [7] 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 1987, 217-522, 83-87

A NEW SOLUTION TO TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR STEADY INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

BAI Bofeng GUO Liejin CHEN Xuejun

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract

In this paper, a simple and effective method is presented to solve the two-dimensional nonlinear steady inverse heat conduction problem. From the finite difference equation of heat conduction, the convective heat transfer coefficient, which is the unknown boundary, can be numerically obtained with this method. By taking the electrically heated helically coiled tube as an experimental case, this method is successfully applied. It is proved by numerical tests that this method takes the advantages of fast covering, high precision and good stability. It can also be extended to the complex geometrics problems.

Keywords inverse heat conduction problem, nonlinear, two-dimension