

基于一阶自回归过程的 7/5 小波滤波器优化算法

杨国安, 郑南宁, 刘跃虎, 刘在德, 郭树岗

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 提出了一种基于一阶自回归过程的双正交 7/5 小波滤波器的优化算法. 该算法首先由小波提升算法导出 7/5 小波滤波器簇系数和提升参数关于一个自由提升参数 α 的一维函数式. 其次, 以白噪声的一阶自回归过程作为输入图像模型, 并采用满足完全重构条件的双通道 7/5 小波滤波器组进行子带编码, 同时计算最大编码增益及其 α 值. 最后, 在所确定的 α 值附近选取一组值, 并将每一个 α 值对应的 7/5 小波滤波器组的提升算法嵌入到 JPEG2000 标准的 Jasper1.701.0 中进行图像压缩实验. 实验结果表明: 采用优化算法的 7/5 小波滤波器, 其系数和提升参数均为有理数, 满足计算复杂度低、便于 VLSI 硬件实现的要求, 特别是当 α 为 0.08 时, 重构图像可以获得最大的峰值信噪比, 此时的 7/5 小波滤波器为最优滤波器.

关键词: 自回归过程; 优化算法; 小波滤波器; 编码增益

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)12-1353-05

Optimization Algorithm for 7/5-Tap Wavelet Filters Based on First Order Autoregression Process

Yang Guo'an, Zheng Nanning, Liu Yuehu, Liu Zaide, Guo Shugang

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: An optimization algorithm of the biorthogonal 7/5-tap wavelet filter for image compression was presented. Firstly, a one-dimension function of the 7/5-tap wavelet filter family coefficients and the lifting parameters with respect to a free lifting parameter α were derived from employing wavelet lifting scheme. Secondly, took first order autoregression process as an input image model, and using two-channel 7/5-tap wavelet filter bank which satisfied the perfect reconstruct condition to implement sub-band coding, and calculate the maximum values of the coding gain and corresponding free lifting parameter α values. Finally, took α as a central value to choose one set of values of free parameter α , and embedded them into the Jasper1.701.0 of the JPEG2000 standard to make an experiment for the image compression. The experimental results show that when the free lifting parameter α equals to 0.08, the 7/5-tap wavelet filter can obtain the maximum values of the peak signal-to-noise ratio (PSNR) of the reconstructed image, and its coefficients and all lifting parameters are rational values, thus it not only reduces computational complexity but is also suitable for implementation via VLSI hardware, therefore it is an optimal 7/5 wavelet filter.

Keywords: autoregression process; optimization algorithm; wavelet filter; coding gain

JPEG2000 标准^[1]已经成为静止图像压缩的国际标准, 该标准第一部分只给出了 CDF9/7 (Cohen, Daubechies and Feauveau) 和 LT5/3 (LeGall and

Tabatabai) 2 组默认的小波滤波器, 前者的小波滤波器系数为无理数, 只能用于图像的有损压缩, 后者的小波滤波器系数为有理数, 可实现图像的无损压

缩,该标准推荐使用提升算法^[2-4]进行小波编码。JPEG2000 标准的第二部分^[5]是第一部分的扩展,用户可以自定义小波滤波器。文献^[6]在此基础上自定义了 7/5 小波滤波器,并根据欧几里得算法给出了小波提升算法。目前,如何根据图像性质和图像压缩的要求设计最优小波滤波器,是图像压缩领域亟待解决的问题^[7-9],而取重构图像的最大峰值信噪比 (PSNR) 已成为小波滤波器优化设计的一般原则^[10,11]。

本文构建了一般图像的数学模型,并采用双通道 7/5 小波滤波器组对其进行子带编码,通过计算最大编码增益和仿真实验确定了当自由提升参数 α 为 0.08 时,重构图像的 PSNR 最大,从而确定了最优 7/5 小波滤波器。

1 图像模型的构建

1.1 N 阶自回归过程

数字图像是一个非平稳二维随机序列,通常是用白噪声模型进行仿真。为了构建图像模型,首先设计一个 N 阶自回归 (AR) 过程^[12] (如图 1 所示),即设计一个将白噪声通过一个闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 滤波器的过程,白噪声的功率谱密度 (PSD) 为 $S_{ww}(z) = \sigma_w^2$ 。 $\Phi(z)$ 为全极点滤波器,可表示为

$$\Phi(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = \frac{z^N}{z^N - \sum_{i=1}^N b_i z^{N-i}} \quad (1)$$

N 阶 AR 过程可由差分方程产生,即

$$X(n) = W(n) + \sum_{i=1}^N b_i X(n-i) \quad (2)$$

式中: $W(n)$ 为输入的白噪声序列; b_i 为自回归常数; N 为 AR 过程的阶数。

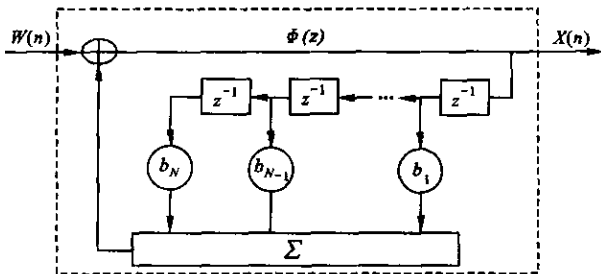


图 1 N 阶 AR 过程

1.2 一阶自回归过程

图像随机序列一般服从均值为 0 的一阶 AR 过程,此时 $N=1, b_1 = \rho, |\rho| < 1, \rho$ 为自相关系数。一阶

AR 过程可由下式得到,即

$$X(n) = W(n) + \rho X(n-1) = W(n) + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i W(n-i) \quad (3)$$

将方差为 σ_w^2 的白噪声通过 $\Phi(z)$ 可得其频率响应

$$\Phi(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \rho e^{-j\omega})} \quad (4)$$

一阶 AR 过程的自相关函数 (ACF) 可由式 (3) 通过数学期望求得,即

$$R_{XX}(k) = E[X(n)X(n+k)] = R_{WW}(k) + \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i R_{WW}(k+i) + \sum_{i=n}^{\infty} \rho^i R_{WW}(k-l) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \rho^i \rho^l R_{WW}(k+i-l) \quad (5)$$

式中:输入白噪声的 ACF 为

$$R_{WW}(k) = E[W(n)W(n+k)] = \sigma_w^2 \delta(k) \quad (6)$$

其中 $\delta(k)$ 为 δ 函数。全极点滤波器输出为广义平稳过程,其平均功率为

$$E[X^2(n)] = R_{XX}(0) = \sigma_X^2 = \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi^2(i) = \frac{\sigma_w^2}{1 - \rho^2} \quad (7)$$

式中: σ_X^2 为一阶 AR 过程的方差; $\phi(i)$ 为 $\Phi(z)$ 的时域表示。最后,得到输入为白噪声的一阶 AR 过程的 PSD 为

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |\Phi(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1 - \rho^2) \sigma_X^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega} \quad (8)$$

当输入为高斯白噪声时,方差 $\sigma_w^2 = 1$,从而可得一般图像模型的 PSD 为

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |\Phi(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega} \quad (9)$$

2 7/5 小波滤波器的编码增益

2.1 7/5 小波滤波器组

可采用双通道 7/5 小波滤波器组对 1.2 节构建的图像模型进行子带编码,它是满足完全重构条件的双正交 7/5 小波滤波器组^[13],如图 2 所示。

设低通分析滤波器和低通综合滤波器分别为 $H_0(z)$ 和 $G_0(z)$,高通分析滤波器和高通综合滤波器分别为 $H_1(z)$ 和 $G_1(z)$,则对称的双正交 7/5 小波滤波器组为

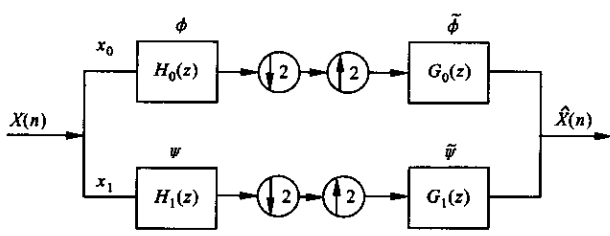


图 2 双通道滤波器组

$$\left. \begin{aligned} H_0(z) &= h_0 + h_1(z + z^{-1}) + h_2(z^2 + z^{-2}) + h_3(z^3 + z^{-3}) \\ H_1(z) &= g_0 - g_1(z + z^{-1}) + g_2(z^2 + z^{-2}) \\ G_0(z) &= g_0 + g_1(z + z^{-1}) + g_2(z^2 + z^{-2}) \\ G_1(z) &= h_0 - h_1(z + z^{-1}) + h_2(z^2 + z^{-2}) - h_3(z^3 + z^{-3}) \end{aligned} \right\} (10)$$

式中: h_0, h_1, h_2, h_3 为低通分析滤波器系数; g_0, g_1, g_2 为低通综合滤波器系数. 由文献[6]可知, 7/5 小波滤波器的各步提升参数均可表示为 α 的一维函数式, 即

$$\beta = -\frac{1}{4\alpha + 2}, \gamma = \frac{1 - 4\alpha^2}{4}, K = \frac{1}{2\alpha + 1} \quad (11)$$

同时, 还可得到 7/5 小波滤波器系数关于 α 的一维函数式, 即

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{2\alpha + 3}{4(2\alpha + 1)}, & h_1 &= -\frac{2\alpha^2 - 5\alpha - 2}{8(2\alpha + 1)} \\ h_2 &= \frac{2\alpha - 1}{8(2\alpha + 1)}, & h_3 &= \frac{(2\alpha - 1)\alpha}{8(2\alpha + 1)} \\ g_0 &= \frac{\alpha + 1}{2}, & g_1 &= \frac{1}{4}, & g_2 &= -\frac{\alpha}{4} \end{aligned} \right\} (12)$$

因此, 由 α 可以唯一地确定 7/5 小波滤波器组的系数和提升实现算法的全部提升参数. 这样, 7/5 小波滤波器的优化设计只取决于一个自由变量 α , 从而大大简化了优化设计的复杂度.

2.2 7/5 小波滤波器组的最大编码增益

为了设计最优 7/5 小波滤波器, 采用如图 2 所示的双通道 7/5 小波滤波器组对 1.2 节构建的图像模型进行子带编码, 并计算 7/5 小波滤波器的编码增益^[14]. 其中, 子带信号 $x_k(n), k=0, 1$ 的方差为

$$\sigma_{x_k}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (13)$$

式中: $S_{XX}(e^{j\omega})$ 为图 2 中输入图像模型的 PSD, 可由式(9)计算; $H_k(z), k=0, 1$ 与式(10)中的 $H_0(z), H_1(z)$ 相对应. 子带编码误差的方差为

$$\sigma_{\text{SBC}}^2 = \frac{C}{M} \sum_{k=0}^{M-1} 2^{-2b_k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (14)$$

式中: $b_k, k=0, 1$ 为各个子带的比特分配数; C 为依赖于 $x_k(n)$ 统计特性的常数. 由于采用双通道滤波器组, 故 $M=2$. $G_k(z), k=0, 1$ 与式(10)的 $G_0(z), G_1(z)$ 相对应.

脉冲编码调制误差的方差为

$$\sigma_{\text{PCM}}^2 = \frac{C}{2^{2b}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) d\omega \quad (15)$$

其中 $b = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} b_k$ 为平均比特率. 由式(14)、式(15)

可得到 7/5 小波滤波器组的编码增益

$$G = \frac{\sigma_{\text{PCM}}^2}{\sigma_{\text{SBC}}^2} = \left[2^{-2b} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) d\omega \right] / \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} 2^{-2b_k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \right] \quad (16)$$

最后, 利用最佳比特分配算法^[15]使 G 的分母最小, 从而得到采用双通道 7/5 小波滤波器组对图像模型进行子带编码时的最大编码增益

$$G_{\text{max}} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) d\omega \right] / \left[\left(\prod_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \right)^{1/M} \right] \quad (17)$$

不失一般性, 可假设图像模型在水平和垂直方向上的相邻采样的相关性相等, 且 $\rho_v = \rho_h = \rho = 0.95$. 联立式(9)、式(10)、式(12)和式(17), 可得 G_{max} 关于 α 的一维函数式 $G_{\text{max}}(\alpha)$, 再依据 $dG_{\text{max}}(\alpha)/d\alpha = 0$ 得到最优 7/5 小波滤波器的 α 为 -0.3142 , 此时 $G_{\text{max}}(\alpha) = 18.5154$ dB, 如图 3 所示. 这样, 便可由式(11)、式(12)确定在最大编码增益时的理论上最优的 7/5 小波滤波器及其实现算法的全部提升参数.

3 实验结果与分析

为了设计基于 JPEG2000 标准的最优 7/5 小波滤波器, 可以采用双通道 7/5 小波滤波器组对图像模型进行子带编码, 取得最大编码增益时的 α 值, 从理论上确定最优 7/5 小波滤波器系数及其提升参数. 但是, 理论上的最优 7/5 小波滤波器, 在 JPEG2000 图像压缩系统中一般达不到最佳的压缩性能, 还存在一定的误差. 为此, 在理论计算基础上

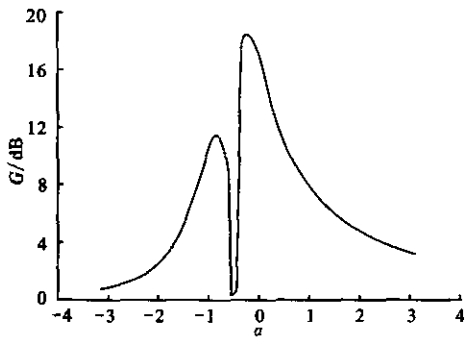


图3 7/5小波滤波器的编码增益

以重构图像取最大PSNR值 r 为基准来确定最优7/5小波滤波器,是小波滤波器优化设计的一般方法.根据理论计算确定的最优7/5小波滤波器的 α 为 -0.3142 ,考虑仿真误差和避免出现局域极值, α 应在 $(-2,2)$ 范围内,并以 0.01 步长确定不同的7/5小波滤波器进行小波编码.

采用文献[6]的实验平台和标准测试图像为样本进行图像压缩实验,可得到不同的7/5小波编码的重构图像PSNR值随 α 的变化曲线.由于篇幅所限,文中只给出一帧灰度位图lena.bmp($512 \times 512 \times 8$)在压缩比为8:1和16:1时的实验结果,如表1、表2和图4、图5所示.为了便于说明,图4和图5只给出了 α 在 $-0.2 \sim 0.5$ 之间的曲线图.

实验结果表明,重构图像达到最大PSNR的 α 值在 $0.04 \sim 0.08$ 区间.在不同压缩比下,通过对大量的标准测试样本图像进行压缩实验,最终得知 α 取 0.08 时的7/5小波滤波器的图像压缩性能最为

表1 压缩比为8:1时7/5小波滤波器簇的PSNR值

α	r/dB	α	r/dB	α	r/dB	α	r/dB
-0.16	35.761	0.02	37.544	0.20	37.479	0.38	36.587
-0.14	36.187	0.04	37.583	0.22	37.435	0.40	36.434
-0.12	36.493	0.06	37.653	0.24	37.368	0.42	36.291
-0.10	36.785	0.08	37.695	0.26	37.266	0.44	35.900
-0.08	37.046	0.10	37.666	0.28	37.180	0.46	35.887
-0.06	37.209	0.12	37.657	0.30	37.080	0.48	35.679
-0.04	37.322	0.14	37.648	0.32	36.943	0.50	35.457
-0.02	37.406	0.16	37.589	0.34	36.819		
-0.00	37.480	0.18	37.540	0.36	36.693		

表2 压缩比为16:1时7/5小波滤波器簇的PSNR值

α	r/dB	α	r/dB	α	r/dB	α	r/dB
-0.16	32.730	0.02	34.626	0.20	34.283	0.38	33.066
-0.14	33.145	0.04	34.666	0.22	34.183	0.40	32.806
-0.12	33.570	0.06	34.659	0.24	34.089	0.42	32.607
-0.10	33.890	0.08	34.639	0.26	33.988	0.44	32.353
-0.08	34.194	0.10	34.570	0.28	33.877	0.46	32.199
-0.06	34.378	0.12	34.542	0.30	33.745	0.48	31.931
-0.04	34.441	0.14	34.343	0.32	33.571	0.50	31.720
-0.02	34.514	0.16	34.427	0.34	33.373		
-0.00	34.573	0.18	34.330	0.36	33.227		

理想.此时的7/5小波滤波器系数及其提升参数均为有理数,满足计算复杂度低、便于VLSI硬件实现的要求,它即为我们所设计的最优7/5小波滤波器,相当于文献[6]中的TB7/5b小波滤波器.

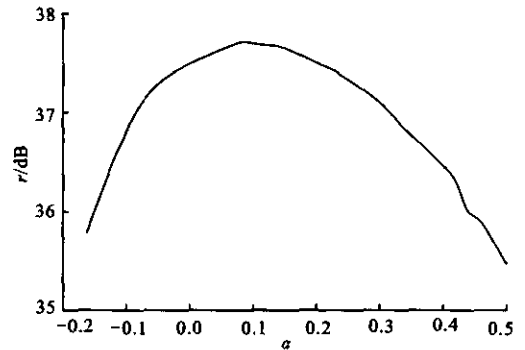


图4 压缩比为8:1时 α 对应的重构图像PSNR值

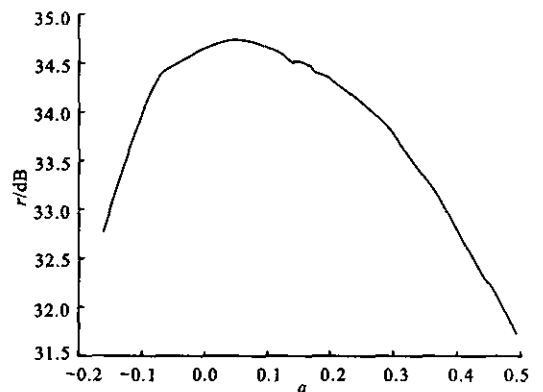


图5 压缩比为16:1时 α 对应的重构图像PSNR值

4 结 论

本文提出的 7/5 小波滤波器的优化算法简捷、有效而且具有较高的精度,是一种新的小波滤波器设计方法,它对于 JPEG2000 图像压缩领域的小波滤波器的设计具有一定的参考价值.特别是,这种小波滤波器的优化算法可以根据图像的特殊要求,如降低计算复杂度、便于 VLSI 硬件实现和图像的无损压缩等,快速设计出整数或有理数的小波滤波器.

参考文献:

- [1] ISO/IEC 15444-1, ITU-T Rec. T. 800, 2003 JPEG2000 image coding system, part I (core) [S].
- [2] Sweldens W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1996, 3(2): 186-200.
- [3] Sweldens W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1997, 29(2): 511-546.
- [4] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps [J]. Fourier Analysis and Applications, 1998, 4(3): 247-269.
- [5] ISO/IEC15444-2, ITU - T Rec. T. 800, 2004 JPEG2000 image coding system, part II (extensions) [S].
- [6] 杨国安,郑南宁,刘跃虎,等. 7/5 小波滤波器簇及其图像压缩性能研究 [J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(6): 628-632.

- [7] Shang Y, Li L, Wah B. Optimization design of biorthogonal filter bank for image compression [J]. ELSEVIER Information Sciences, 2001, 132(1-4): 23-51.
- [8] Winger L L, Venetsanopoulos A N. Biorthogonal nearly Coiflet wavelets for image compression [J]. ELSEVIER Signal Processing, Image Communication, 2001, 16(9): 859-869.
- [9] 罗 强,任庆利,罗 莉. 图像压缩双正交小波滤波器的优化设计 [J]. 中国图像图形学报, 2003, 8(3): 356-360.
- [10] ISO/IEC JTC1/SC29/WG1N1761, 2000 ITU-T SG8 JPEG 2000 standard [S].
- [11] ISO/IEC JTC1/SC29/WG1N1843, 2000 JPEG standard [S].
- [12] Jayant N S, Noll P. 语音与图像的波形编码原理及应用 [M]. 钱亚生,诸庆麟,译. 北京:人民邮电出版社, 1990.
- [13] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. Commun Pure Appl Math, 1992, 45(5): 485-560.
- [14] Djokovic I, Vaidyanathan P P. On optimal analysis/synthesis filters for coding gain maximization [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1996, 44(5): 1 276-1 279.
- [15] Soman A K, Vaidyanathan P P. Coding gain in paraunitary analysis/synthesis systems [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 41(5): 1 824-1 836.

(编辑 苗 凌)

(上接第 1343 页)

参考文献:

- [1] Venkata N D, Kite T D, Venkataraman M, et al. Fast blind inverse halftoning [A]. 1998 International Conference on Image Processing [C]. Los Alamitos, USA; IEEE Comput Soc, 1998. 64-68.
- [2] Kite T D, Venkata N D, Evans B L, et al. A high quality, fast inverse halftoning algorithm for error diffusion halftones [A]. 1998 International Conference on Image Processing [C]. Los Alamitos, USA; IEEE Comput Soc, 1998. 59-63.
- [3] Wong P W. Inverse halftoning and kernel estimation for error diffusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(4): 486-498.
- [4] Shen M Y, Kuo C C J. A robust nonlinear filtering approach to inverse halftoning [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2001, 12

(1): 84~95.

- [5] Xiong Z, Orchard M, Ramchandran K. Inverse halftoning using wavelets [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(10): 1 479-1 483.
- [6] Stevenson R L. Inverse halftoning via MAP estimation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(4): 574-583.
- [7] Kite T D, Evans B L, Bovik A C. Modeling and quality assessment of halftoning by error diffusion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(5): 900-922.
- [8] Jarvis J, Judice C, Ninke W. A survey of techniques for displaying of continuous-tone pictures on bilevel displays [J]. Computer Graphics Image Processing, 1976, 5(1): 13-40.

(编辑 刘 杨)